

轴向梯度透镜效应

陈尧生

(中国科学院西安光学精密机械研究所)

提 要

本文导出了以单边梯度变化的矩形介质板作轴向梯度透镜的光线轨迹方程。在以中心折射率 n_0 面为入射面时,光线的轨迹为对数函数曲线,而以边缘折射率 $n(x)$ 为入射面时,光线轨迹为反正切函数,由此可以考虑在光学系统中的应用。

R. W. Wood 采用动物胶试制成折射率径向分布圆柱透镜^[1]。古老的非均匀介质光学只是到了1960年,当它发展到光通信用的光波导阶段时,才引起人们的重视。1964年贝尔研究所制成了变折射率气体透镜光波导,1968年日本在玻璃中成功地实现了近似于平方型折射率分布的棒状透镜,命名为自聚焦纤维,以这种折射率分布制成的圆形介质波导,在光通信中减少了脉冲展宽,增大了通信容量。1978年日本又报道了平板状的自聚焦一维透镜,用于光束变换,可以作效率较高的耦合器^[2]。如果把平板状的一维透镜,拉制或切割成矩形纤维,同样可作为实用的光波导,称它为单边梯度变化的矩形波导,这种波导具有聚焦特性,发散特性和类似平行平板的特性。

若把光线的入射面选择在 xoz 面或 xoy 面,这时光线在介质内的轨迹为正弦曲线,具有聚焦特性,如图1所示。这种聚焦作用,只有上下或左右方向具有光线会聚特性。但是入射面选择在 yoz 面上时,以 n_0 面为基准,光线在介质内的轨迹为对数曲线,具有发散作用,如图2所示。由于这时的光轴垂直于 yoz 面,并在 ox 方向的折射率是梯度变化。尽管折射率变化为

$$n(x) = n_0 \operatorname{sech}(\sqrt{A}x) = n_0 \left[1 - \frac{A}{2} x^2 + \frac{5}{6} \left(\frac{A}{2} \right)^2 x^4 + \dots \right] \quad (1)$$

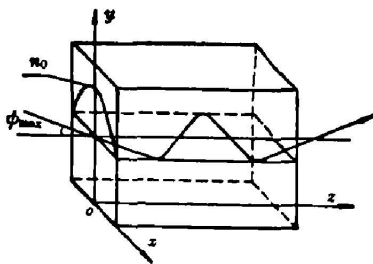


图1 光线入射于 xoy 面或 xoz 面

Fig. 1 Light rays incidence in xoy or xoz plane

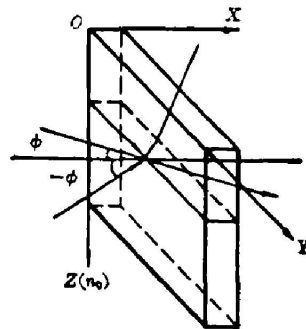


图2 光线入射于 yoz 面

Fig. 2 Light rays incidence in yoz plane

收稿日期: 1981年9月28日, 收到修改稿日期: 1982年11月8日

若取前二项, 折射率分布具有抛物线变化规律。但这种变化还是缓慢的, 受材料与工艺的限制。相对来说, 这种波导在 ox 方向上的宽度是有限的, 甚至做得很薄。由于应用上的原因, 也称做轴向梯度透镜^[3](见图 2)。

在直角坐标下的程函方程为:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z)。 \quad (2)$$

式中的 $n(x, y, z)$ 表示折射率分布, 函数 ϕ 称作程函, 在光线位置矢量 \mathbf{r} 下, $\phi(\mathbf{r}) = \text{常数}$ 的各点连成曲面表示光的波面, 而光线的前进方向可以由与这个面(等程函数)正交的曲线给出。利用 $|\text{grad } \phi| = n$ 的关系, 并设想实际光线轨迹长度为 s , 则可得

$$\frac{d}{ds} \left[n(x, y, z) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \nabla n。 \quad (3)$$

这是非均匀介质中光线轨迹的基本公式^[4]。

用几何光学的方法, 在图 2 所示的介质中, 可以解出方程(3)在 $x-z$ 平面内作二维运动的轨迹。

当近轴光线入射于 yoz 面时, 光线在介质内的轨迹是缓慢变化的, 这时 $dS^2 = dz^2 + dx^2 \approx dx^2$, 若把式(3)写成:

$$\frac{d}{ds} \left[n \left(\frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dz}{ds} \mathbf{k} \right) \right] = \frac{\partial n}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial n}{\partial z} \mathbf{k} \quad (4)$$

则

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}。 \quad (5)$$

因折射率变化 $n(x)$ 与 y 轴及 z 轴无关, 且光线入射于 yoz 面(参考图 1), 这是一个等折射率平面, 实质上是由无数个平行于 yoz 面的等折射率平面组成了矩形介质板, 因此 y 轴与 z 轴是等效的, 对于光线的运动轨迹, 只要在 $x-z$ 平面内即可求得, 则 $y=0$, 而这时的 z 坐标相当于光线离光轴的距离 h , 当然光轴垂直于等折射率面 yoz , 所以 z 坐标也相当于某一光束截面任一点半径 r , 即 $z=h=r$, 因为 $\partial n/\partial z=0$, $ds=dx$, 所以式(5)简化为

$$\frac{d}{dx} \left(n \frac{dz}{dx} \right) = 0$$

展开得

$$\frac{dn}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} + n \frac{d^2z}{dx^2} = 0。 \quad (6)$$

由方程(1)近似并微分后代入(6)式

$$\frac{d^2z}{dx^2} \left(1 - \frac{Ax^2}{2} \right) - Ax \frac{dz}{dx} = 0, \quad (7)$$

边界条件为: $x=0$, $dz/dx=P_0$, $x=a$, $z=h_0$ 。解方程(7)并代入边界条件得:

$$h=z = \frac{P_0}{\sqrt{2A}} \ln \left| \frac{\sqrt{Ax} + \sqrt{2}}{\sqrt{Ax} - \sqrt{2}} \right| + h_0, \quad (8)$$

$$P = \frac{dz}{dx} = \frac{P_0}{1 - \frac{1}{2} Ax^2}。 \quad (9)$$

式中 h_0 , h 分别为入射端与出射端光线与光轴的位置, P_0 , P 分别为入射端与出射端光线在介质处的斜率。

可见方程的解为一自然对数函数,光线的轨迹为一对数曲线,它在介质内的变化为单调增加。

根据方程(8),(9)可写成阵阵形式:

$$\begin{pmatrix} h \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2A}} \ln \left| \frac{\sqrt{Ax} + \sqrt{2}}{\sqrt{Ax} - \sqrt{2}} \right| \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{1}{2} Ax^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ P_0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

这就是光线的轨迹表达式,表示当入射光线的位置 h_0 和斜率 P_0 已知时,就能通过计算求得射出光线的位置 h 和斜率 P 。

如果轴向梯度透镜置于空气中,利用近轴光线的关系,设光线的入射角为 ϕ_0 , 出射角为 ϕ , 这时 $P_0 = \phi_0/n_0$, $P = \phi/n(x)$ 。把上式代入式(10)得:

$$\begin{pmatrix} h \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2A}n_0} \ln \left| \frac{\sqrt{Ax} + \sqrt{2}}{\sqrt{Ax} - \sqrt{2}} \right| \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

从式(11)立即可得: $\phi = \phi_0$, 也就是说,光线的入射角等于出射角,光线经过轴向梯度透镜后,方向不变,这与均匀介质的平行平板性质一致。

当光线平行入射时, $P_0 = 0$, 则从(8),(9)式立即可得 $h = h_0$, $P = P_0$, 也就是平行于光轴的光线入射时,仍以同样位置的平行光出射,这又与均匀介质的平行平板性质一致(图3)。

由于方程(8)可写成:

$$h_0 - z = \frac{P_0}{\sqrt{2A}} \ln \left| \frac{\sqrt{Ax} - \sqrt{2}}{\sqrt{Ax} + \sqrt{2}} \right|, \quad (12)$$

因 $\sqrt{Ax} + \sqrt{2} > \sqrt{Ax} - \sqrt{2}$, 可见这对函数虽是递增曲线,但其区域在

$$0 < \left| \frac{\sqrt{Ax} - \sqrt{2}}{\sqrt{Ax} + \sqrt{2}} \right| < 1,$$

所以 $\ln \left| \frac{\sqrt{Ax} - \sqrt{2}}{\sqrt{Ax} + \sqrt{2}} \right|$ 必为负值,则

$$h_0 - z < 0 \quad \text{或} \quad h_0 < z, \quad (13)$$

这里注意符号规则: $h_0 = 0$ 时, z 恒为正值。这种曲线的区域如图4所示的实线段。

由于方程(9)可近似表示为 $P = n_0 P_0 / n(x)$, 因为 $n(x) < n_0$, 所以

$$P_0 < P, \quad (14)$$

从式(13),(14)得到证明:以 n_0 面为入射面的轴向梯度透镜,在光学系统中只起平行平板的作用,因 $P_0 < P$, 说明光线的轨迹始终是递增的,光线前进方向的斜率总是比临近出发点的斜率大。由于平行平板对一定角度入射的光线产生轴向位移,恒产生负位置色差、负球差等,所以在光路系统中起补偿和校正像差的作用。对普通均匀介质的平行平板,近轴光线折射后的轴向位移量为

$$\Delta = d \left(1 - \frac{1}{n} \right), \quad (15)$$

式中 d 为平板厚度, n 为平板折射率。而轴向梯度板的轴向位移量为:(图5)

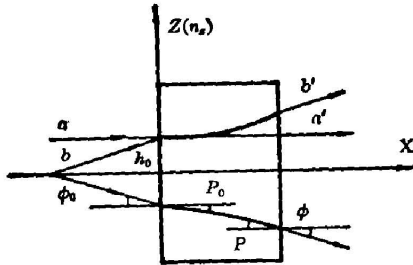


图3 光线以 n_0 面为入射面时
Fig. 3 Light rays incidence in n_0 plane

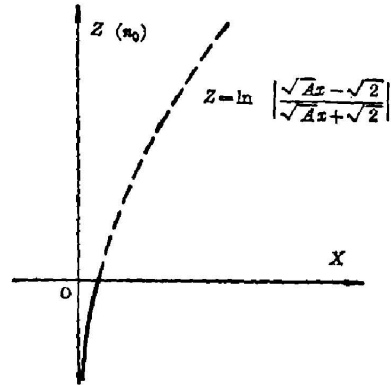


图4 以 n_0 面为基准的光线轨迹区域
Fig. 4 The locus areas of light rays with reference to n_0 plane

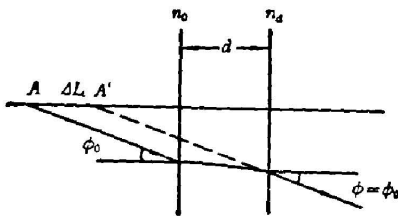


图5 光线产生了轴向位移量 ΔL
Fig. 5 Light rays produce a longitudinal displacement of ΔL

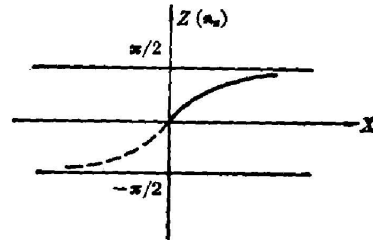


图6 光线以 $n_0(x)$ 为入射面的轨迹区域
Fig. 6 The locus areas of light rays in $n_0(x)$ plane

$$\Delta L = d \left[1 + \frac{n_0 P_0}{2\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{\sqrt{\Delta} + 1}{\sqrt{\Delta} - 1} \right| \right], \quad (16)$$

其中 $\Delta = n_0 - n_{(x)}/n_0$ 为相对折射率, 在相同厚度 d 中, 比较上述二式, 显然 $\Delta L > \Delta l$ 。

那么, 要使 $\Delta L = \Delta l$, 在相同的 Δ 条件下, 则厚度比普通平行平板小得多, 在光学系统中有利于缩小体积, 减少光能损失, 并且可以得到较大的像差校正量。

若把边缘折射率 $n_{(x)}$ 面作为光线的入射面, 而 n_0 面作为光线的出射面, 这时的折射率分布应写成

$$n_{(x)} = n_0 \left(1 + \frac{1}{2} Ax^2 \right), \quad (17)$$

这时光线的轨迹方程为

$$\frac{d^2 z}{dx^2} \left(1 + \frac{1}{2} Ax^2 \right) + Ax \frac{dz}{dx} = 0, \quad (18)$$

与前面同样的边界条件, $x=0, dz/dx = P_0$; $x=0$ 时 $z = h_0$ 代入方程(18)的通解, 可得其特解为:

$$z = \frac{\sqrt{2} P_0}{\sqrt{A}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{Ax}}{\sqrt{2}} + h_0, \quad (19)$$

显然光线的轨迹为正切函数曲线, 由于 $x \geq 0$, 轨迹曲线仍为单调增加。如图6所示的实线

部分即为轨迹区域。

因为出射端斜率 $P = dz/dx$, 则对式(19)求导数, 并把(17)式代入后所得

$$P = \frac{P_0 n_0}{n(x)}. \quad (20)$$

若把式(19), (20)写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} h \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{Ax}}{\sqrt{z}} \\ 0 & \frac{n_0}{n(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ P_0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

同理, 把轴向梯度板置于空气中(图7), 利用近轴光线的关系式

$$P_0 = \phi_0' n(x), \quad P = \phi' n_0, \quad (22)$$

于是方程(21)可写成:

$$\begin{pmatrix} h \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A \cdot n(x)}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{Ax}}{\sqrt{z}} \\ 0 & \frac{n_0^2}{n^2(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

式中 $P_0, P, \phi_0, \phi, h_0, h$ 的意义与前同。从(23)式中可得到: 因 $n_0 > n(x)$, 则 $\phi > \phi_0$, 证实了出射角总是比入射角大。因此, 其作用和发散透镜相似。

从式(19)中得到: $P_0 = 0$ 时, $z = h = h_0$, 即平行于光轴的入射光线, 无折射现象, 这又与 n_0 面作为光线入射面的结论一样。所以, 轴向梯度板只能

与轴夹一定角度的光线才起发散作用。

综上所述, 正割分布的轴向梯度板不能单独起成像作用, 但加工成球面状的轴向梯度透镜, 能代替普通均匀介质的非球面透镜, 并设想与普通的平凸球面透镜或其它透镜组合使用, 能起校正像差的作用, 作成较理想的光学系统。当然它的应用必将随着研究的深度而不断扩大。

选写本文过程中, 得到殷宗敏、周绍祥等同志的帮助, 谨此致谢。

参 考 文 献

- [1] 西沢 敏一; レーザー研究, 1980, 8, No. 5 (Sep), 748.
- [2] 西沢 敏一; 光学技術コンタクト, 1978, 16, No. 5, 25.
- [3] D. T. Moore; *Appl. Opt.* 1980, 19, No. 7 (Apr), 1035.
- [4] 大越孝敬编, 刘时衡、梁民基译; 《光学纤维的基础》, (人民邮电出版社, 1980).

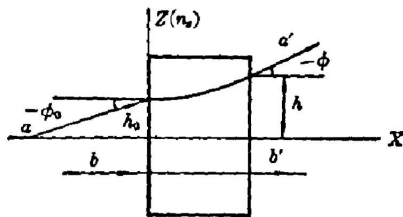


图7 光线与轴成一定角度入射时, 波导类似发散透镜

Fig. 7 The waveguide acts as a divergent lens when incidence rays are at a certain angle with axis

The effect of axial gradient index lens

CHEN YAOSHENG

(Xian Institute of optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 28 September 1981, revised 8 November 1982)

Abstract

The paper presents a derivation of the locus equation of rectangular waveguide of which index distribution function is $n(x) = n_0(1 - 1/2 Ax^2)$. The locus of light rays can be described with logarithmic function as incidence plane is the central plane having refraction index n_0 , and the locus of light rays can be indicated with arc tangent function as incidence plane is in edge which has index of $n(x)$. When tangential plane crosses n_0 plane, the locus of paraxial rays locating in tangential plane is a well-known sinusous function.

According to the locus equation, this waveguide has a function similar to parallel plate or divergent lens or cylindrical lens.

When it is used as parallel plate, the waveguide offers much larger displacement than that given by a parallel plate which made of homogenous medium. As a divergent lens, the waveguide can not be used as image-forming element, because it only acts when light rays have a certain angle with optical axis. The image-forming feature depends on the distribution constant A , the central refraction index n_0 and the thickness z_0 . Thus, the locus line may locate in the outside or inside or end of the medium. The waveguide may be used in optical systems.

The paper places emphasis on deriving locus equation of light ray motion in the inside of the medium according to eikonal equation.