

# CCD 刷扫成像的积分 MTF 和空间分辨率

顾天柱

(中国科学院上海技术物理研究所)

## 提 要

对于 CCD 刷扫成像的 MTF, 一般文章只给出了在与线阵垂直的刷扫情况下, 线阵方向和垂直于线阵方向两个方向上的计算式。本文导出在与线阵交有任意角度的刷扫情况下, 任意方向上的 MTF 计算式。

CCD 刷扫成像由 CCD 线阵的一维运动形成。对于这一成像方式的 MTF 的讨论, 一般只考虑了沿线阵方向和垂直于线阵方向的 MTF, 并假定了刷扫方向与线阵方向垂直。下面给出一般情况下 MTF 的计算式及推导。

假设 CCD 线阵的结构与刷扫方向如图 1 所示。线阵的光敏面长为  $a$ 、宽为  $b$ 、两相邻光敏面的中心距为  $c$ 。线阵方向为  $i$  方向, 垂直于线阵方向为  $j$  方向。刷扫速度为  $v$ ,  $v$  与  $i$  的夹角为  $\theta$ 。

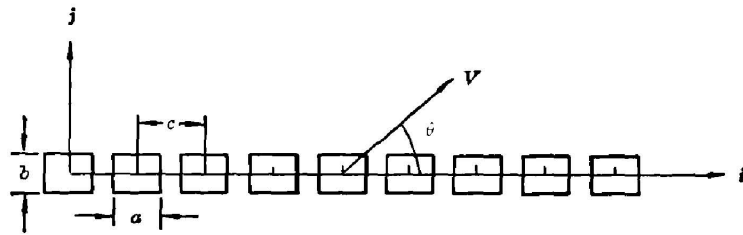


图 1

CCD 刷扫成像是一种取样成像。图 1 中的器件和刷扫构成了如图 2 所示的取样点阵。

以  $m$  标记光敏面在线阵中的位置号, 以  $n$  标记 CCD 线阵在一帧图像中所处的行号。点阵中的每一点代表当 CCD 线阵各光敏面下势阱中的信号电荷转移时, 线阵中各光敏面中心所到达的空间位置。点阵中相邻点的距离可用图 2 所示的基本点阵矢量  $r_1$ 、 $r_2$  来表示, 整个点阵是基本点阵矢量的周期重复。点阵中任意点  $(m, n)$  的位置矢量  $r_{mn}$  可表示为

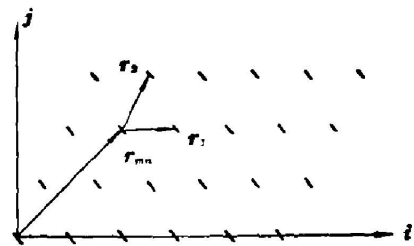


图 2

$$r_{mn} = m r_1 + n r_2, \quad (1)$$

其中  $r_1 = ci$ ,  $r_2 = Tv$ ,  $c$  为线阵相邻光敏面中心距,  $T$  为 CCD 器件的行周期。

## 二

图 3 表示 CCD 线阵中的第  $m$  号光敏面从第  $(m, n-1)$  空间位置刷扫到第  $(m, n)$  空间位置的过程。图中  $\mathbf{r}_t$  代表这一过程中的任意时刻,  $m$  号光敏面中心的的空间位置。其值为

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r}_{mn} - \mathbf{v} \cdot t. \quad (2)$$

如果景物经光学系统成像后, 在 CCD 上的照度分布为  $f(\mathbf{r})$ , 则 CCD 光敏面的输出电流正比于光敏面上照度的平均值, 以  $I(\mathbf{r}_t)$  表示  $\mathbf{r}_t$  位置的输出电流, 则

$$I(\mathbf{r}_t) = \frac{k}{ab} \int_{r_t \cdot j - b/2}^{r_t \cdot j + b/2} \int_{r_t \cdot i - a/2}^{r_t \cdot i + a/2} f(\mathbf{r}) dx dy, \quad (3)$$

式中  $k$  为比例常数。

在  $(m, n)$  点转移出的,  $m$  号光敏面下势阱中的电荷是从相距  $(m, n)$  点为  $\tau v$  的  $P$  点开始累积的,  $\tau$  为器件工作时的积分常数。考虑到 (3) 式, 则此电荷  $q(\mathbf{r}_{mn})$  为

$$q(\mathbf{r}_{mn}) = \frac{k}{ab} \int_0^\tau dt \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} f(\mathbf{r}_{mn} - \mathbf{v}t - \mathbf{r}') dx' dy', \quad (4)$$

其中  $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}_{mn} - \mathbf{v}t) - \mathbf{r}$ ,  $x' = (\mathbf{r}_{mn} - \mathbf{v}t) \cdot \mathbf{i} - x$ ,  $y' = (\mathbf{r}_{mn} - \mathbf{v}t) \cdot \mathbf{j} - y$ 。景物亮度分布经 CCD 刷扫转换成电荷分布, 这些电荷存在于空间离散的点  $(m, n)$  上, 其大小为 (4) 式所表示的  $q(\mathbf{r}_{mn})$ , 构成了一幅离散的电荷图像  $q_{sam}(\mathbf{r})$ 。考虑  $\delta$  函数性质后,  $q_{sam}(\mathbf{r})$  在数学上可表示为

$$q_{sam}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}) \cdot \sum_m \sum_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{mn}), \quad (5)$$

$q(\mathbf{r})$  是在  $q(\mathbf{r}_{mn})$  中以连续量  $\mathbf{r}$  来代替离散量  $\mathbf{r}_{mn}$  而成的连续函数

$$q(\mathbf{r}) = \frac{k}{ab} \int_0^\tau \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} f(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{r}') dx' dy' dt. \quad (6)$$

## 三

以上可知, CCD 刷扫成像系统的输入是一个连续函数  $f(\mathbf{r})$ , 而输出是某一个连续函数  $q(\mathbf{r})$  的采样值  $q_{sam}(\mathbf{r})$ 。MTF 的概念是对线性系统而定义的, 采样系统不是线性系统, 使采用 MTF 的概念存在困难。采用 MTF 的概念来描述这种系统时必须引进一些规定, 一种办法是引进增广采样系统的规定<sup>[1]</sup>。

增广采样系统是在原来的采样系统的前后分别加上保护滤波器和恢复滤波器后构成的系统。这两个滤波器是两个特性相同的理想低通滤波器, 其截止频率与采样频率间的关系满足 Nyquist 条件。MTF 是对增广采样系统而定义的。

由此, 本文中计算 MTF 所对应的系统如图 4 所示。以  $Q_{out}(\mathbf{w})$ 、 $Q_{sam}(\mathbf{w})$ 、 $F_{res}(\mathbf{w})$ 、



图 4

$F(\boldsymbol{w})$  分别表示  $q_{out}(\boldsymbol{r})$ 、 $q_{som}(\boldsymbol{r})$ 、 $f_{res}(\boldsymbol{r})$ 、 $f(\boldsymbol{r})$  的傅里叶变换。定义系统的频响应函数  $H(\boldsymbol{w})$  和 MTF 分别为

$$H(\boldsymbol{w}) = Q_{out}(\boldsymbol{w})/F(\boldsymbol{w}), \quad \text{MTF} = |H(\boldsymbol{w})/H(0)|。 \quad (7)$$

#### 四

现在来求  $Q_{out}(\boldsymbol{w})$ 。若以  $G(\boldsymbol{w})$  表示滤波器的频响应函数, 显然有

$$Q_{out}(\boldsymbol{w}) = Q_{som}(\boldsymbol{w}) \cdot G(\boldsymbol{w}), \quad (8)$$

$Q_{som}(\boldsymbol{w})$  可对(5)式两边作傅里叶变换, 于是得到<sup>[9]</sup>

$$Q_{som}(\boldsymbol{w}) = [Q(\boldsymbol{w})/\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2] \otimes \sum_p \sum_q \delta(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_{pq}), \quad (9)$$

式中  $\boldsymbol{w}_{pq}$  是  $\boldsymbol{w}$  平面的点阵  $(p, q)$  的位置矢量

$$\boldsymbol{w}_{pq} = p\boldsymbol{w}_1 + q\boldsymbol{w}_2, \quad (10)$$

$\boldsymbol{w}_1$ 、 $\boldsymbol{w}_2$  是点阵  $(p, q)$  的基本矢量, 它们与  $\boldsymbol{r}$  平面上的点阵  $(m, n)$  的基本矢量  $\boldsymbol{r}_1$ 、 $\boldsymbol{r}_2$  具有关系

$$\boldsymbol{w}_l \cdot \boldsymbol{r}_k = \begin{cases} 0 & (l \neq k), \\ 1 & (l = k) \end{cases} \quad (l, k = 1, 2, \dots), \quad (11)$$

从而得到  $Q_{out}(\boldsymbol{w})$  可表示为

$$\begin{aligned} Q_{out}(\boldsymbol{w}) &= [G(\boldsymbol{w})/\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2] [Q(\boldsymbol{w}) \otimes \sum_p \sum_q \delta(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_{pq})] \\ &= [G(\boldsymbol{w})/\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2] \sum_p \sum_q Q(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_{pq}). \end{aligned} \quad (12)$$

根据附录可知, 如果  $Q(\boldsymbol{w})$  是带限的, 那末当

$$G(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 \cdot \text{rect}(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{r}_1) \cdot \text{rect}(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{r}_2), \quad (13)$$

时, (12)式可简化为

$$Q_{out}(\boldsymbol{w}) = Q(\boldsymbol{w}). \quad (14)$$

$Q(\boldsymbol{w})$  可从(6)式的傅里叶变换求出。要注意现在输入到 CCD 采样系统的是  $f_{res}(\boldsymbol{r})$  面, 而不是  $f(\boldsymbol{r})$ , 采用  $\text{rect}$  函数的记号, (6)式应写成

$$q(\boldsymbol{r}) = \frac{k}{ab} \iiint_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{i}}{a}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{j}}{b}\right) \cdot f_{res}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t - \boldsymbol{r}') dx' dy' dt, \quad (15)$$

$q(\boldsymbol{r})$  的傅里叶变换为

$$Q(\boldsymbol{w}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} q(\boldsymbol{r}) \exp(-i2\pi\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{r}) dx dy. \quad (16)$$

将(15)式代入并交换积分次序, 令  $\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t - \boldsymbol{r}'$ , 并分离变量得

$$\begin{aligned}
Q(\boldsymbol{w}) = & \frac{k}{ab} \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2}\right) \exp(-i2\pi\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}t) dt \right] \\
& \times \left[ \iint_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{i}}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{j}}{b}\right) \exp(-i2\pi\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}') dx' dy' \right] \\
& \times \left[ \iint_{-\infty}^{\infty} f_{res}(\boldsymbol{r}'') \exp(-i2\pi\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}'') dx'' dy'' \right], \quad (17)
\end{aligned}$$

上式中的三个积分均为傅里叶变换式, 故有

$$Q(\boldsymbol{w}) = k\tau \exp(i\pi\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}\tau) \text{sinc}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}\tau) \cdot \text{sinc}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{i}a) \cdot \text{sinc}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{j}b) \cdot F_{res}(\boldsymbol{w}). \quad (18)$$

根据增广系统的假定  $F_{res}(\boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{w}) \cdot G(\boldsymbol{w})$ ,  $G(\boldsymbol{w})$  已由(13)式给出, 由此求得

$$\begin{aligned}
Q(\boldsymbol{w}) = & (\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2) k\tau \exp(i\pi\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}\tau) \text{sinc}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}\tau) \text{sinc}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{i}a) \\
& \times \text{sinc}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{j}b) \text{rect}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}_1) \text{rect}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}_2) F(\boldsymbol{w}). \quad (19)
\end{aligned}$$

由(19)式可以看出, 不管  $F(\boldsymbol{w})$  是否带限,  $Q(\boldsymbol{w})$  总是带限的, 从而满足从(12)式简化为(14)式的条件, 使  $Q_{out}(\boldsymbol{w}) = Q(\boldsymbol{w})$ , 因而求得

$$\text{MTF} = \text{sinc}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}\tau) \text{sinc}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{i}a) \text{sinc}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{j}b) \text{rect}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{i}c) \text{rect}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}T). \quad (20)$$

## 五

(20)式是 CCD 刷扫成像系统 MTF 的一般表达式。式中的第一项为有限时间的累积影响, 第二、第三项为有限面元平均的影响, 第四、五项为采样的影响。

从该式中可以看出, MTF 是  $w$  平面上位置矢量  $\boldsymbol{w}$  的函数, 它不仅与  $w$  的大小有关, 也与  $\boldsymbol{w}$  的方向有关。根据二维傅里叶变换的物理意义, 任何一幅二维图像均可分解为一系列正弦光栅的加权和,  $\boldsymbol{w}$  矢量的方向代表正弦光栅的方向,  $w$  矢量的模值代表正弦光栅的频率。(20)式说明了系统不仅对不同频率的正弦光栅具有不同的响应, 即使对同一频率的正弦光栅, 因其方向不同也具有不同的响应。因此在研究系统的空间分辨率时, 必须考虑方向因素。

(20)式的极坐标表示式给出了系统在与  $\boldsymbol{i}$  (线阵方向) 的交角为  $\varphi$  的方向上的 MTF 值

$$\begin{aligned}
\text{MTF}_\varphi = & \text{sinc}[wv\tau \cos(\varphi - \theta)] \text{sinc}(wa \cos \varphi) \\
& \times \text{sinc}(wb \sin \varphi) \text{rect}(w \cos \varphi) \text{rect}[wvT \cos(\varphi - \theta)]. \quad (21)
\end{aligned}$$

图 5、图 6、图 7 是 MTF 值在空间分布的形象表示。图中,  $\boldsymbol{i}$  为线阵方向,  $\boldsymbol{j}$  为垂直于线阵方向,  $\boldsymbol{i}$ 、 $\boldsymbol{j}$  组成的平面为  $w$  平面,  $w$  平面上某点的高度表示在该频率值时系统的 MTF 值。 $w$  平面上所有点的 MTF 值构成一张曲面。这三张图都是在假定  $a$ 、 $b$  和  $v\tau$  均相等的情况下, 用计算机直接从(21)式画出的。图 5 是刷扫方向与线阵方向垂直时的分布, 图 6 与图 5 是同一分布, 只是在画图时换了一个观察方向。从图 5 和图 6 中可以清楚地看出系统的高频特性在  $\boldsymbol{i}$  方向最好, 在  $\boldsymbol{j}$  方向最差, 在其它方向介于两者之间, 即系统的空间分辨具有方向性。设计一个系统时, 一般说来要使系统的空间分辨率在所有方向上都差不多, 在 CCD 刷扫成像系统中, 可以通过调节  $a$ 、 $b$  和  $v\tau$  之间的相互关系来做到。例如仍在  $a$ 、 $b$  和  $v\tau$  三者相等的情况下, 将  $\boldsymbol{v}$  的方向转过  $45^\circ$ , MTF 的分布情况如图 7 所示, 从中可以看出, 系统的频率特性在各个方向上是差不多的。

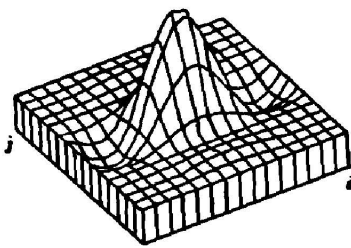


图 5

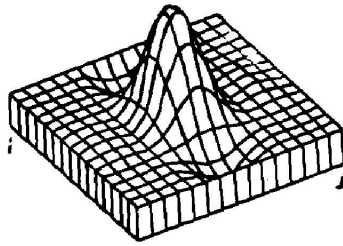


图 6

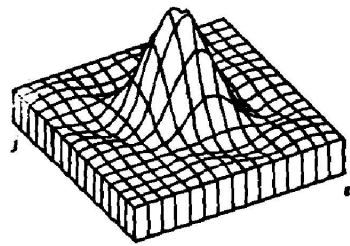


图 7

有些文章给出了一些特殊情况下,特殊方向上的 MTF 的计算式。例如在刷扫与线阵方向垂直的情况下,系统的 MTF 在  $i$  方向和  $j$  方向给出的计算式分别为

$$\text{MTF}_x = \sin c(wa), \quad \text{MTF}_y = \sin c(wv\tau) \sin c(wb), \quad (22)$$

这两个式子实为(21)式的一个特例,将  $\theta$  和  $\varphi$  的值代入(21)式立即可得到

$$\text{MTF}_x = \sin c(wa) \text{rect}(wc), \quad \text{MTF}_y = \sin c(wv\tau) \sin c(wb) \text{rect}(wvT), \quad (23)$$

(23)式除了一个  $\text{rect}$  函数的因子外,与(22)式完全吻合, $\text{rect}$  函数项的加入更能反映采样系统 MTF 的特点。

## 六

MTF 是用来衡量仪器空间分辨率的一个完善指标,但由于 MTF 往往是空间频率的一个复杂函数,对仪器优劣的直观判断缺少简明性。实用上,常用一个数来代替,广泛采用的做法是取在某一确定空间频率处的 MTF 值。从上面的一系列分析知道,对于 CCD 刷扫成像系统,存在一个频率上限,当频率大于此值时 MTF 为零。因此常取此上限时的值作为衡量指标,例如对于(23)、(25)式可算得

$$\text{MTF}_x|_{w_0} = \sin c(a/2c), \quad \text{MTF}_y|_{w_0} = \sin c(\tau/2T) \sin c(b/2vT). \quad (24)$$

这两个式子也可在有关的文章中见到。

采用等效平方带宽作为衡量空间分辨率的指标也是合适的。等效平方带宽  $N_e$  被定义为

$$N_e = \int_0^\infty (\text{MTF})^2 dw, \quad (25)$$

例如对于(23)式的情况,可算得

$$N_e = \int_0^\infty [\sin c(wa) \text{rect}(wc)]^2 dw = \int_0^{1/2a} [\sin c(wa)]^2 dw, \quad (26)$$

该积分中的被积函数是正定的,当  $c$  愈小时,积分值就愈大。这意味着采样频率愈高,空间分辨率就愈高。当  $c \rightarrow 0$  时,这一情况类似于卷积扫描成像,于是(26)式变为

$$N_e = \int_0^\infty [\sin c(wa)]^2 dw = 1/2a, \quad (27)$$

这一结果与卷积扫描成像时导出的结果<sup>[3]</sup>完全一样。这一点说明采样成像系统的空间分辨率原则上可以做得与卷积扫描成像时一样,但由于采样频率不可能做得无限大,因此一般要略低一些。

## 附 录

如果由(10)、(11)式所描述的点阵  $w_{pq}$  如图 A-1 所示, (12)式中的  $\sum_p \sum_q Q(w - w_{pq})$  项表示频谱  $Q(w)$  在  $w$  平面上的周期延拓。为了使延拓的各次频谱不相重叠,  $Q(w)$  必须是带限的。带限的条件是使  $Q(w)$

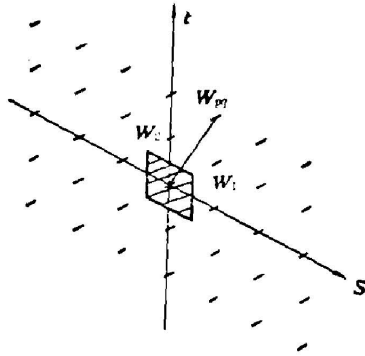


图 A-1

为非零值的  $w$  矢量必须落入图示的阴影区内。在这种情况下, 只要将  $G(w)$  取作在阴影区内为常数, 在阴影区外为零, 就可在延拓谱中将基谱取出。

若以  $s, t$  分别表示基本点阵矢量  $w_1, w_2$  的单位矢量。频率矢量  $w$  在  $s, t$  上的斜投影分别为  $w_s, w_t$ , 使得

$$w = (w_s s + w_t t), \quad (\text{A-1})$$

上述带限条件从分析上可表示为

$$|w_s/w_1| \leq 1/2, \quad |w_t/w_2| \leq 1/2, \quad (\text{A-2})$$

(A-1)式可变化为

$$w = [(w_s w_1/w_1) + (w_t w_2/w_2)]. \quad (\text{A-3})$$

在(A-3)式两边分别点乘  $r_1$  和  $r_2$ , 并利用(11)式可得

$$w \cdot r_1 = w_s/w_1, \quad w \cdot r_2 = w_t/w_2. \quad (\text{A-4})$$

将(A-4)式代入(A-2)式中, 带限条件可表示为

$$|w \cdot r_1| \leq 1/2, \quad |w \cdot r_2| \leq 1/2, \quad (\text{A-5})$$

故当

$$G(w) = r_1 \cdot r_2 \text{rect}(w \cdot r_1) \text{rect}(w \cdot r_2) \quad (\text{A-6})$$

时, (12)式可简化为(14)式。

## 参 考 文 献

- [1] 顾天柱:《红外研究》, (待发表).
- [2] Rosenfeld Azriel:《Digital picture processing》, Academic Press, Inc., (1976), 68.
- [3] J. M. 劳埃德:《热成像系统》, (严白云, 戴衡译校: 国防工业出版社, 1981), 43, 47.

---

**The integration MTF and the spacial resolution of the  
pushbroom imaging system using the charge couple device**

GU TIANZHU

*(Shanghai Institute of Technological Physics, Academia Sinica)*

(Received 21 January 1982, revised 24 May 1982)

**Abstract**

On MTF theory of the pushbroom imaging system using the CCD line array, the formula which is used to calculate, respectively, the MTF in the line direction and in the direction perpendicular to the line direction has been given in some articles, under a special condition of pushbroom motion perpendicular to the line. In this paper author derives a general formula which is valid for any direction and any angle crossed by the directions of the line array and pushbroom motion.