

一步彩虹全息术成像分析*

陈桂丛 H. Chen (陈 选)
(山东海洋学院物理系) (美国沙基诺大学物理系)

提 要

本文从标量衍射理论出发,对一步彩虹全息术的各种可能的记录和重现光路进行系统的理论分析,导出了正重现像或赝重现像可以被观察的定量条件。

一、引 言

自 Chen 和 Yu 提出一步彩虹全息术以来,一直被认为有两种基本的光路^[1]。一种重现赝(pseudoscopic)像(如图1所示);另一种重现正(orthoscopic)像(如图2所示)。比较两种光路,显然,它们的区别仅仅是光路中狭缝的位置不同。在赝像记录光路中,狭缝位于透镜和前焦点之间,其虚像在物体和狭缝之间;在正像记录光路中,狭缝位于透镜前焦点和物体之间,其实像在记录底片的后面。正像记录光路的视场由于渐晕(vignetting)而受到限制;赝像记录光路中的狭缝可以非常接近透镜,甚至能和成像系统的孔径光阑位置重合,因此可以得到较大的视场而渐晕很小。

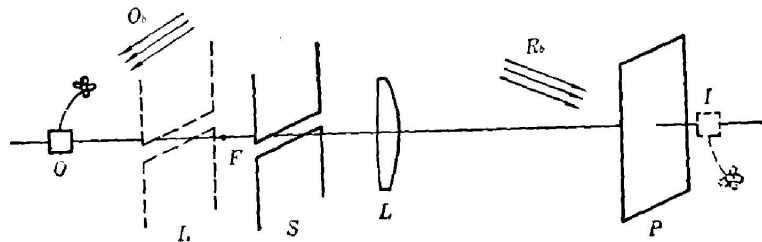


图 1

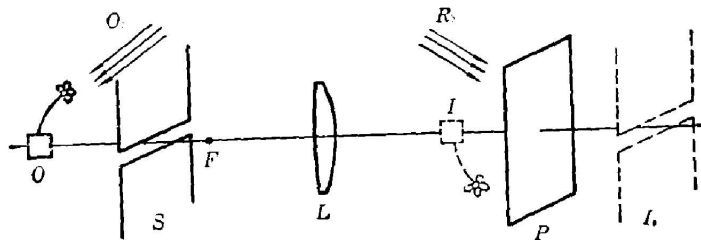


图 2

收稿日期: 1981年12月14日, 收到修改稿日期: 1982年8月16日

* 实验工作在美国沙基诺大学完成。

近来, Benton 等人提出在赝像记录光路中, 把参考点光源向记录底片移近, 可以在重现时获得正像^[2]。Chen 等人的一步彩虹全息术中, 采用孔径共轭技术, 利用赝像记录光路也获得正全息重现像^[3]。但是, 他们的论文中没有给出清楚的理论解释, 也没有给出实现正全息重现像的定量的条件。本文从标量衍射理论出发, 对一步彩虹全息术的光路进行理论分析, 导出了获得正重现像和赝重现像的定量条件。

二、一步彩虹全息术标量衍射理论*

考虑一般的一步彩虹全息的记录和重现光路(如图 3 所示)。假定物体是一个点光源, 被透镜成像在位置 (h, v, l) ; 参考波和重现波都是球面波, 球心位置分别在点 (H_1, V_1, L_1) 和 (H_2, V_2, L_2) ; 狭缝的像的中心坐标为 (O, O, L) , w 为狭缝的像的宽度。

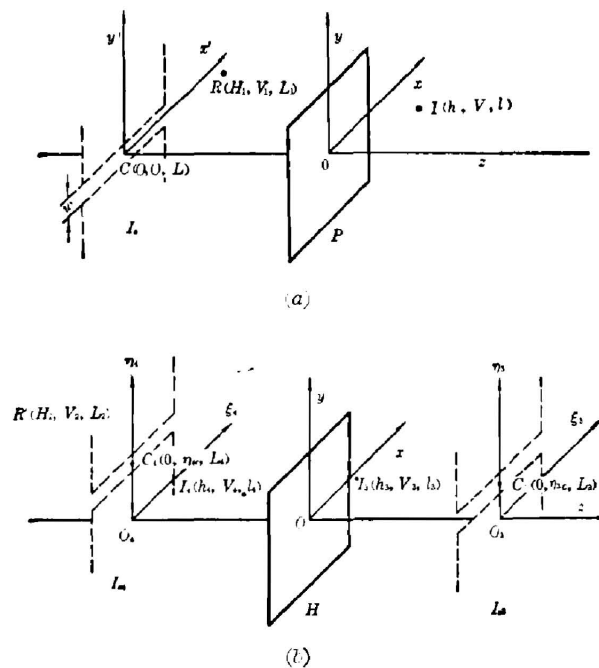


图 3

对球面波使用二次近似, 投射在底片上的波长为 λ_1 的参考波的场可以写为

$$u_R(x, y; k_1) = \exp\{-ik_1[(x-H_1)^2 + (y-V_1)^2]/2L_1\}, \quad (1)$$

落在底片上的物光束的场可以证明为

$$u(x, y; k_1) = \int_w dy' \exp\left\{ik_1 \left[\frac{l}{L(L-l)} \frac{y'^2}{2} + \left(\frac{y}{L} - \frac{v}{L-l} \right) y' \right]\right\} \exp\left(-\frac{ik_1 y^2}{2L}\right) \cdot \exp\left[-\frac{ik_1(x-h)^2}{2l}\right], \quad (2)$$

式中 $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ 。在我们的讨论中感兴趣的是物体和狭缝的重现像的位置, 为了书写简便起

* 我们在这里只是对一步彩虹全息术的标量衍射理论作一简要叙述, 给出和下面的分析有关的公式, 关于这部分理论的详细讨论, 读者可参考文献[4, 5]。

见, 本文略去式中所有表示场的振幅和常位相的复常数相乘因子。选取 z 轴的正向为光照的方向, 并认定光照的一方为底片的左方。在这种规定下, 当 $L_1 < 0$ 时, (1) 式表示从点 (H_1, V_1, L_1) 发散的球面波, 其中心位于底片的左侧; 当 $L_1 > 0$ 时, (1) 式表示向着位于底片右侧的点 (H_1, V_1, L_1) 会聚的球面波。同样, (2) 式适用于图 1 所示的情形, 也适用于图 2 所示的情形, 只要对前者令 $L < 0$; 对后者令 $L > 0$ 。

如果显影后底片的振幅透射率正比于曝光量, 则在透射率中我们关心的项是

$$t = t_3 + t_4 = u_R^* u + u_R u^*, \quad (3)$$

式中比例常数被省略。设全息图被波长为 λ_2 的球面重现波照明:

$$u_R(x, y; k_2) = \exp\{-ik_2[(x-H_2)^2 + (y-V_2)^2]/2L_2\}, \quad (4)$$

式中 $k_2 = 2\pi/\lambda_2$ 。同样, 如果 $L_2 < 0$, (4) 式表示自点 (H_2, V_2, L_2) 发散的球面波; 如果 $L_2 > 0$, 则表示会聚到点 (H_2, V_2, L_2) 。透过底片的两个波前由 (3) 式和 (4) 式相乘而得到

$$u_t = u_{t_3} + u_{t_4} = u_R^* u + u_R u^*. \quad (5)$$

这一点说明在平面 $z = \zeta$ (其直角坐标为 ξ, η) 上的场分布由两项分量波组成, 它们分别是

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= \iint_{-\infty}^{+\infty} u_R^* u \exp\{ik_2[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]/2\zeta\} dx dy, \\ u_4 &= \iint_{-\infty}^{+\infty} u_R u^* \exp\{ik_2[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]/2\zeta\} dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

首先考虑分量波 u_3 。将 (1)、(2) 和 (4) 式代入 (6) 式, 交换积分次序, 经整理后, 得

$$\begin{aligned} U_3(\xi, \eta; k_2) &= \int_w dy' \exp\left\{ik_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left[\frac{l}{L(L-l)} \frac{y'^2}{2} - \frac{v}{L-l} y' \right]\right\} \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp\left\{ik_2 \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L} - \frac{1}{L_2} + \frac{1}{\zeta} \right) \frac{y^2}{2} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{y'}{L} - \frac{V_1}{L_1} + \frac{V_2}{L_2} - \frac{\eta}{\zeta} \right) y \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\eta^2}{2\zeta} \right]\right\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left\{ik_2 \left[\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{L_1} - \frac{1}{l} - \frac{1}{L_2} + \frac{1}{\zeta} \right) \frac{x^2}{2} \right. \right. \\ &\left. \left. + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{h}{l} - \frac{H_1}{L_1} + \frac{H_2}{L_2} - \frac{\xi}{\zeta} \right) x + \frac{\xi^2}{2\zeta} \right]\right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

考虑 y^2 项的系数为 0 的平面 $z = \zeta = L_3$, 得

$$\frac{1}{L_3} = \frac{1}{L_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L_1} \right), \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp\left\{ik_2 \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{y'}{L} - \frac{V_1}{L_1} \right) + \frac{V_2}{L_2} - \frac{\eta_3}{L_3} \right] y\right\} = |L| \lambda_1 \delta\left[y' - \frac{\lambda_1 L}{\lambda_2 L_3} (\eta_3 - \eta_{30})\right], \quad (9)$$

$$\eta_{30} = L_3 \left(\frac{V_2}{L_2} - \frac{\lambda_2 V_1}{\lambda_1 L_1} \right). \quad (10)$$

将 (9) 式代入 (7) 式, 积分并经整理后得到在平面 $z = L_3$ 上的场分布, 当

$$|\eta_3 - \eta_{30}| < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left| \frac{L_3}{L} \right| \frac{w}{2} \quad (11)$$

时,

$$U_3(\xi_3, \eta_3; k_2) = \exp \left\{ ik_2 \left[\frac{\left(\frac{1}{L_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{l} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{L_1} \right) \frac{1}{L_3}}{2 \left(\frac{1}{L_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{l} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_3} \right)} (\xi_3^2 + \eta_3^2) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\left(\frac{H_2}{L_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{h}{l} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{H_1}{L_1} \right) \frac{1}{L_3}}{\frac{1}{L_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{l} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_3}} \xi_3 - \frac{\left(\frac{V_2}{L_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{v}{l} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{V_1}{L_1} \right) \frac{1}{L_3}}{\frac{1}{L_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{l} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_3}} \eta_3 \right] \right\};$$

否则, $U_3=0$, 上式显然可以写成

$$U_3(\xi_3, \eta_3; k_2) = \exp \left[ik_2 \frac{(\xi_3 - h_3)^2 + (\eta_3 - v_3)^2}{2(L_3 - l_3)} \right] \quad (12)$$

的形式, 比较两式指数中的系数, 可得方程如下:

$$\frac{1}{L_3 - l_3} = \left[\left(\frac{1}{L_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{l} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{L_1} \right) \frac{1}{L_3} \right] / \left[\frac{1}{L_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{l} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_3} \right], \\ h_3 = \left(\frac{H_2}{L_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{h}{l} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{H_1}{L_1} \right) / \left(\frac{1}{L_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{l} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{L_1} \right), \\ v_3 = \left(\frac{V_2}{L_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{v}{l} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{V_1}{L_1} \right) / \left(\frac{1}{L_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{l} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{L_1} \right).$$

解方程得

$$\frac{1}{l_3} = \frac{1}{L_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{l} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{L_1}, \quad h_3 = l_3 \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{h}{l} - \frac{H_1}{L_1} \right) + \frac{H_2}{L_2} \right], \quad (13)$$

$$v_3 = l_3 \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{v}{l} - \frac{V_1}{L_1} \right) + \frac{V_2}{L_2} \right]. \quad (14)$$

(12)式表示中心坐标为 (h_3, v_3, l_3) 的球面波, 在平面 $z=L_3$ 上, 它的波前被限制在不等式(11)所确定的狭窄区域内。由此可见, L_3 是狭缝重现像的 z 坐标, η_{3c} 是其中心的 y 坐标, 狭缝重现像的宽度为

$$w_3 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left| \frac{L_3}{L} \right| w, \quad (15)$$

而 (h_3, v_3, l_3) 则是物点重现像的坐标, 如图 3(b) 所示。

如果 $L_3 - l_3 > 0$, (12) 式表示从物点重现像 I_3 向狭缝重现像 I_{3s} 发散为球面波; 如果 $L_3 - l_3 < 0$, 则表示从 I_{3s} 向 I_3 会聚的球面波。一般彩虹全息术要求在重现时所形成的狭缝像必须处于物体重现像和观察者之间, 因为照明是来自底片的左方, 则观察者总是在右方, 所以 $L_3 - l_3 < 0$ 时, 实际上不能观察物的准单色的彩虹全息重现像(当用白光重现时); 仅当 $L_3 - l_3 > 0$ 时, 彩虹全息重现像才能被观察到。

下面考虑分量波 u_4 , 重复上述推导可得相似的结果。当

$$\eta_4 - \eta_{4c} \left| < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left| \frac{L_4}{L} \right| \frac{w}{2} \right. \quad (11')$$

时,

$$U_4(\xi_4, \eta_4; k_2) = \exp \left[ik_2 \frac{(\xi_4 - h_4)^2 + (\eta_4 - v_4)^2}{2(L_4 - l_4)} \right], \quad (12')$$

否则, $U_4=0$, 式中

$$\frac{1}{L_4} = \frac{1}{L_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L_1} \right), \quad (8')$$

$$\eta_{4c} = L_4 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{V_1}{L_1} + \frac{V_2}{L_2} \right), \quad (10')$$

$$w_4 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left| \frac{L_4}{L} \right| w, \quad (15')$$

$$\frac{1}{l_4} = \frac{1}{L_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{l} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{L_1}, \quad h_4 = l_4 \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{H_1}{L_1} - \frac{h}{l} \right) + \frac{H_2}{L_2} \right], \quad (13')$$

$$v_4 = l_4 \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{V_1}{L_1} - \frac{v}{l} \right) + \frac{V_2}{L_2} \right]. \quad (14')$$

所有具有下标 4 的诸量的物理意义和具有下标 3 的相应的量物理意义相同, L_4 是相应于分量波 u_4 的狭缝重现像的 z 坐标, η_{4c} 是其中心的 y 坐标, w_4 是其宽度, (h_4, v_4, l_4) 是相应于分量波 u_4 的物点重现像的坐标。同样, 仅当 $L_4 - l_4 > 0$ 时, (12) 式表示从 I_4 向 I_{34} 散发的球面波, 这时位于底片右方的观察者可以在狭缝重现像的后面观察到物的彩虹全息重现像。

三、一步彩虹全息术的成像

综上所述, 由一步彩虹全息术记录的全息图被重现时, 可以得到两组物体和狭缝的重现像, 分别对应于分量波 u_3 和 u_4 , 但是仅当 $L_3 - l_3 > 0$ ($L_4 - l_4 > 0$) 时, 物体的准单色的彩虹全息重现像 I_3 (I_4) 才能通过狭缝的重现像 I_{33} (I_{34}) 被人们观察到。

从(13)式求 l_3 对 l 的偏微商, 有

$$\frac{\partial l_3}{\partial l} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 L_1^2 L_2^2}{(\lambda_1 l L_1 - \lambda_2 l L_2 + \lambda_2 L_1 L_2)^2} > 0,$$

上述不等式表明, 如果由透镜形成的物表面的像沿 z 轴的正方向是凸(凹)的, 那么对应于分量波 u_3 的物表面的重现像也是凸(凹)的, 也就是说, 分量波 u_3 重现一个物表面为像和物表面沿 z 轴正方向具有相同的凹凸性。对于全息图右方的观察者来说, 如果 $L_3 - l_3 > 0$, 就可以观察到物体的正像, 因此在这里可以把分量波 u_3 称为正分量波。

从(13')式求 l_4 对 l 的偏微商, 有

$$\frac{\partial l_4}{\partial l} = \frac{-\lambda_1 \lambda_2 L_1^2 L_2^2}{(\lambda_1 l L_1 + \lambda_2 l L_2 - \lambda_2 L_1 L_2)^2} < 0,$$

这表明分量波 u_4 重现的物表面的像和物表面沿 z 轴正方向具有相反的凹凸性。对于全息图右方的观察者来说, 如果 $L_4 - l_4 > 0$, 通过狭缝重现像观察到的是物体的腰像。因此, 可以把分量波 u_4 称为腰分量波。

从上述分析可知, 如果在一定条件下 $L_3 - l_3 > 0$ 和 $L_4 - l_4 > 0$ 同时满足, 那么正重现像和腰重现像都能分别通过相应的狭缝重现像被观察到; 如果仅 $L_3 - l_3 > 0$ ($L_4 - l_4 > 0$) 满足, 那么仅能观察到正(腰)像; 如果 $L_3 - l_3 > 0$ 和 $L_4 - l_4 > 0$ 都不满足, 那么不可能观察到任何彩虹全息像。

考虑到一般的一步彩虹全息其重现像是在像平面附近(本文不考虑像散一步彩虹全息), 可以近似地用不等式 $L_3 > 0$ ($L_4 > 0$) 代替 $L_3 - l_3 > 0$ ($L_4 - l_4 > 0$) 去求出正(腰)重现像可被观察的条件。(8)式和(8')式可以分别写成

$$\frac{1}{L_3} = \frac{1}{L_2} + \frac{1}{a} \quad \text{和} \quad \frac{1}{L_4} = \frac{1}{L_2} - \frac{1}{a}, \quad (16)$$

式中

$$a = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{L_1 L}{L_1 - L}, \quad (17)$$

其正负和大小取决于 L 和 L_1 的正负和大小。在某种记录光路(对应于 L 和 L_1 的某种选择)下,从(16)式求出使 $L_3(L_4) > 0$ 的 L_2 的区域,也就是说,确定可以观察到正(贗)重现像的照明波中心位置的区域。例如,在 $L < 0$ 和 $L < L_1 < 0$ 的情形下, $a > 0$, 当 $L_2 < -a$ 时, $L_3 > 0$, 也就是说当重现波是发散球面波,其中心离全息图距离大于 a 时,就能够观察到正像;当 $-a < L_2 < 0$ 时, L_3 和 L_4 均小于 0, 也就是说当发散球面波的中心离全息图的距离小于 a 时,观察不到彩虹全息重现像;当 $0 < L_2 < a$ 时, L_3 和 L_4 均大于 0, 也就是说如果全息图被会聚波照明,其中心离全息图距离小于 a 时,就能同时观察到正像和贗像;当 $L_2 > a$ 时, $L_3 > 0$; 也就是说当会聚球面波的中心离全息图的距离大于 a 时,只能观察到正像。

四、结 论

对一步彩虹全息术各种可能的记录和重现光路进行上述理论分析的结果,列在表 1 中。

表 1 各种可能记录和重现一步彩虹全息术的光路

Table 1 Various possible recording and reconstruction geometries for one-step rainbow-holography

可观察的重现像			重 现 光 路				
			$L_2 < 0$		$L_2 > 0$		
			$L_2 < - a $	$L_2 > -a$	$L_2 < a$	$L_2 > a$	
记 录 光 路	$L < 0$	$L_1 < 0$	$L_1 > L$	正	无	正, 贗	正
			$L_1 = L$	无		正, 贗	
			$L_1 < L$	无		正, 贗	
		$L_1 > 0$	贗	无	正, 贗	贗	
		$L_1 = \infty$	无		正, 贗		
	$L > 0$	$L_1 > 0$	$L_1 < L$	无		正, 贗	
			$L_1 = L$	无		正, 贗	
			$L_1 > L$	正	无	正, 贗	正
		$L_1 < 0$	无		正, 贗		
		$L_1 = \infty$	无		正, 贗		

可以看到,原来的“贗像记录光路”就是表中所列的 $L < 0$, $L_1 < L$ 的情形,当用发散球面波重现时,只可能观察到贗像。但如果用会聚球面波照明,其中心离全息图距离小于 $|a|$,那么正重现像和贗重现像都能分别通过相应的狭缝重现像被观察到。图 4 中的两幅照片就是在这种记录和重现光路下,同时观察到的正像和贗像的照片。由(10)式和(10')式,两个狭缝重现像相对于会聚球面波的中心有如下位置关系:

$$\frac{\eta_{3c}}{L_3} = \frac{V_2}{L_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{V_1}{L_1}, \quad \frac{\eta_{4c}}{L_4} = \frac{V_2}{L_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{V_1}{L_1}。$$

在 $L_1=L$ 的特殊情形下, $L_3=L_4=L_2$, 这时有 $\eta_{3c,4c}=V_2 \mp (\lambda_2/\lambda_1)(L_2/L_1)V_1$ 。也就是说, 两个狭缝重现像和会聚波的中心共平面, 且以会聚波的中心为对称点, 这就是所谓无透镜傅里叶变换的情形。原来的“正像记录光路”就是 $L>0, L_1<0$ 的情形, 当用发散球面波重现时, 可以观察到正像。Benton 等人的工作^[2]则是属于 $L<0, L<L_1<0$ 的情形, 当用发散球面波重现时, 可以观察到正像, 所以, 它是一步彩虹全息术的一种光路安排。

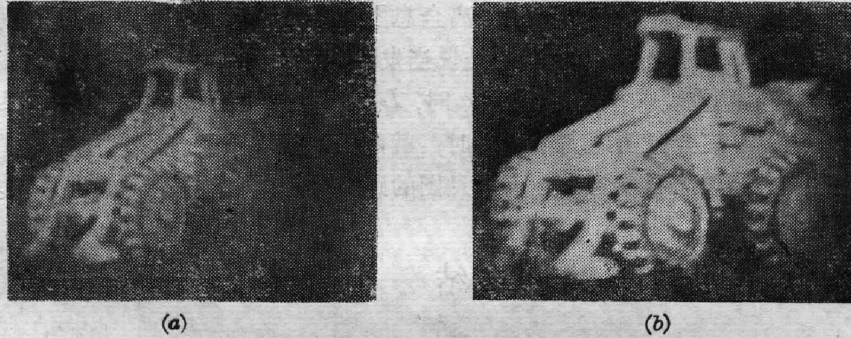


图 4

表中列出的所有结果, 作者在美国沙基诺大学的光学实验室中都已得到实验证实。

本文得到山东海洋学院单启蛰同志和上海科技大学陈明仪同志的帮助, 在此致谢。

参 考 文 献

- [1] H. Chen, F. T. S. Yu; *Opt. Lett.*, 1978, **2**, No. 1 (Jan), 85.
- [2] S. A. Benton, H. S. Mingace Jr. *et al.*; *Proc. SPIE*, **215** (Pub. by SPIE Bellingham, Washington, 1980), 156.
- [3] H. Chen, Qi-zhe Shan *et al.*; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, No. 20 (15 Oct), 3557.
- [4] S. L. Shuang, P. H. Ruterbusch *et al.*; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, No. 5 (1 Mar), 872.
- [5] H. Chen, Qi-zhe Shan *et al.*; (Manuscripts in preparation).

Imaging analysis of one-step rainbow holography

CHEN GUICONG

(Department of Physics, Shandong College of Oceanology, Qingdao)

H. CHEN

(Department of Physics, Saginaw Valley State College)

(Received 14 December 1981, revised 16 August 1982)

Abstract

Starting from scalar diffraction theory, various possible recording and reconstruction geometries of one-step rainbow holography are analyzed, and quantitative conditions for obtaining orthoscopic or pseudoscopic reconstructed image are derived.