

用光线矩阵元表达的非涅耳数*

范 滇 元

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

导出了复杂光学系统中任一观察面对入射面光阑的非涅耳数表达式 $N = (a^2/\lambda) [(A/B) + (1/R)]$ 。它是用光学系统的光线矩阵元表示的, 具有较大的普遍性。引入了有效传输距离的概念: $L_{\text{eff}} = B/A$, 它反映了光学系统对衍射场的影响。对一些常见的典型光学系统给出了非涅耳数的具体表达式。对高功率激光系统中真空空间滤波器的像传递作用给出了理论证明, 并导出完善像传递的必要条件。最后, 把非涅耳数推广到复数域, 并用于研究截断高斯光束的衍射问题。

一、引 言

非涅耳数是衍射系统的重要物理量。在实际工作中, 往往不需要严格计算衍射场的细节, 但要知道非涅耳数的大小, 由此可以对衍射场的基本特征作出定性或半定量的分析。

在均匀介质情况下, 相对于圆孔光阑的非涅耳数是熟知的, 即

$$N = a^2/\lambda L, \quad (1)$$

式中 a 是入射面光阑的半径, L 是轴上观察点离孔面的距离。如果入射光束是曲率半径为 R 的球面波, 那么非涅耳数应修改为^[1]:

$$N = a^2/\lambda L + a^2/\lambda R. \quad (2)$$

但是, 当光阑右方的衍射空间存在复杂光学系统时, 非涅耳数的计算就较复杂了。已出版的文献、书刊中尚无普遍适用的表达式。本文用光线矩阵方法解决了这一问题, 获得普遍而又简洁的表达式 $N = (a^2/\lambda) [(A/B) + (1/R)]$, 式中 A, B 是光学系统的光线矩阵元。在此基础上, 我们引入了有效传输距离的概念, 它定义为: $L_{\text{eff}} = B/A$ 。 L_{eff} 定量地反映了光学系统对光束衍射的影响。本文第三部分中对一些常见的光学系统给出了非涅耳数的具体表达式。对高功率激光系统中真空空间滤波器的像传递作用给出了理论证明, 并导出完善像传递的必要条件。

最后, 我们把非涅耳数推广到复数域, 并用于研究截断高斯光束的衍射问题。

二、非涅耳数的普遍表达式

非涅耳数的计算本质上是对光束通过光学系统传输时所经历的光程长度的计算。在旁轴近似下, 可以用几何光学方法处理。文献[2]曾以费马原理为出发点作了讨论。本文则前

收稿日期: 1982年8月4日

* 本文在第一届全国基础光学会议宣读。

后一贯地运用光线矩阵方法来推导, 得出用光线矩阵元表达的光程长度。

1. 单一折射球面情况

任何复杂的共轴光学系统都可以看成由多个折射球面和不同折射率的空间所组成。我们首先考虑最简单的单折射球面情况, 然后再推广到一般的光学系统。如图 1 所示, \mathcal{A} 是入射面, \mathcal{B} 是观察面, 它们所处空间折射率分别是 n_1 和 n_2 , 由曲率半径为 R 的球面分割。我们考察从 \mathcal{A} 面任一点发出的一条光线将经过多长的路程到达观察面 \mathcal{B} 。光线的初始状态用它的端点坐标和方位角表征, 在轴对称系统中为 (r_1, p_1) 。经过球面折射后到达 \mathcal{B} 面时的状态为 (r_2, p_2) , 折射球面的交点为 ξ 。总的光程长度为 $S = n_1 \sqrt{(\xi - r_1)^2 + z_1^2} + n_2 \sqrt{(r_2 - \xi)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, 在旁轴条件下, 上式近似为

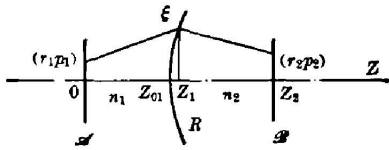


图 1 包含单折射球面的系统

Fig. 1 The system containing a single spherical refracting surface

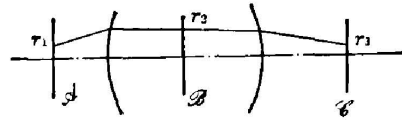


图 2 包含双折射球面的系统

Fig. 2 The system containing two spherical refracting surfaces

$$S \approx S_{12} + (r_2 n_2 p_2 / 2) - (r_1 n_1 p_1 / 2) - (n_2 - n_1) \xi^2 / 2R + (n_1 p_1 \xi / 2) - (n_2 p_2 \xi / 2), \quad (3)$$

其中 $S_{12} = n_1 z_{01} + n_2 (z_2 - z_{01})$ 是沿着系统光轴方向的光程。利用折射球面的光线矩阵关系式

$$\begin{pmatrix} \xi \\ n_2 p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n_2 - n_1) / R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ n_1 p_1 \end{pmatrix}$$

可方便地将 (3) 式简化为

$$S = S_{12} + (r_2 n_2 p_2 / 2) - (r_1 n_1 p_1 / 2). \quad (4)$$

注意到上式中 4 个光线状态参数 r_2 、 $n_2 p_2$ 、 r_1 和 $n_1 p_1$ 并不是独立的, 它们受到下列光线矩阵关系式的制约,

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ n_2 p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ n_1 p_1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 是观察面和入射面之间光学系统的光线矩阵。根据 (5) 式, 我们可以用 r_1 、 r_2 这两个独立变量来表达 $n_1 p_1$ 和 $n_2 p_2$, 代入 (4) 式后得

$$S = S_{12} + (A r_1^2 - 2 r_1 r_2 + D r_2^2) / 2B. \quad (6)$$

这是仅存在单折射球面时用光线矩阵元表达的光程。

2. 一般光学系统

图 2 为包含两个折射球面的传输系统。光线从 \mathcal{A} 面 r_1 点发出, 经过 \mathcal{B} 面上 r_2 点, 到达 \mathcal{C} 面 r_3 点。若 \mathcal{A} 、 \mathcal{B} 面之间的光线矩阵为 $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$, 则相应的光程为

$$S_I = S_{12} + (A_1 r_1^2 - 2 r_1 r_2 + D_1 r_2^2),$$

同样, \mathcal{B} 、 \mathcal{C} 面之间的光线矩阵为 $\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$, 相应光线的光程为

$$S_{II} = S_{23} + (A_2 r_2^2 - 2r_2 r_3 + D_2 r_3^2)。$$

所以从 \mathcal{A} 面至 \mathcal{C} 面的总光程为

$$S = S_I + S_{II} = S_{12} + S_{23} + (A_1 r_1^2 / 2B) - (B_1 r_3 + B_2 r_1) r_2 / B_1 B_2 + (D_1 B_2 + B_1 A_2) r_2^2 / 2B_1 B_2 + (D_2 r_3^2 / 2B_2)。$$
 (7)

为了消去中间变量 r_2 , 我们从下列两个光线矩阵式出发

$$\begin{pmatrix} r \\ n_2 p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ n_1 p_1 \end{pmatrix} \quad \text{及} \quad \begin{pmatrix} r_3 \\ n_3 p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ n_2 p_2 \end{pmatrix}，$$

得到下列关系式 $r_2 = (B_1 r_3 + B_2 r_1) / (D_1 B_2 + B_1 A_2)$ 。代入 (7) 式后, S 仅仅是 r_1 、 r_3 的函数。再利用总光线矩阵和前后两部分的局部矩阵的关系

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}，$$

我们得到最后结果

$$S = S_0 + (A r_1^2 - 2r_1 r_3 + D r_3^2)。$$
 (8)

用类似方法可以证明 (8) 式对包含任意个折射面的复杂光学系统是普适的, 只要将 S_0 理解为沿系统轴线的程, r_1 、 r_3 为光线在入射面和观察面上的坐标, $ABCD$ 是传输系统总光线矩阵元。

3. 菲涅耳数的普遍表达式

按菲涅耳数的定义, 它是光阑边缘发出的子波和光阑中心子波到达轴上观察点时的位相差除以半波位相差 π 或等价地用光程差除以半波长。

先计算光程差对菲涅耳数的贡献。按 (8) 式, 对边缘子波来说 $r_1 = a$ (光阑半径); 同时, 观察点在轴上, 所以 $r_3 = 0$, 则光程为 $S = S_0 + A a^2 / 2B$ 。中心子波的光程就是 S_0 , 所以光程差为 $S - S_0 = A a^2 / 2B$, 它对菲涅耳数的贡献是 $N_1 = (S - S_0) / (\lambda / 2) = A a^2 / \lambda B$ 。当入射光束是曲率半径为 R 的球面波时, 边缘和中心子波之间存在初始位相差 $\Delta\varphi = \pi a^2 / R \lambda$ 。它对菲涅耳数的贡献是 $N_2 = \Delta\varphi / \pi = a^2 / \lambda R$ 。有效的菲涅耳数应是两者之和

$$N = N_1 + N_2 = \frac{a^2}{\lambda} \left(\frac{A}{B} + \frac{1}{R} \right)。$$
 (9)

这是一个一般的表达式, 对于任何具体的传输系统, 只要知道了光线矩阵元 A 、 B , 就可以求出菲涅耳数的具体数值。

4. 有效传输距离

(9) 式以简洁的形式反映了光学系统对衍射场的影响。比较 (9) 式和 (2) 式, 可以看到光学系统的作用相当于使有效的传输距离变为

$$L_{\text{eff}} = B / A。$$
 (10)

特别是当观察面 \mathcal{B} 和入射孔面 \mathcal{A} 的相对位置满足几何光学的共轭成像关系时, 矩阵元 $B = 0$, 此时, $L_{\text{eff}} = 0$ 及 $N \rightarrow \infty$ 。这意味着虽然被光阑截取的光束经历了相当一段实际距离的传输, 但有效的传输距离却为零。所以观察面上的场将不发生衍射, 它是光阑面上场的不失真复现 (当然, 光束口径将放大 A 倍)。这就是像传递作用。它是真空空间滤波器的一个重要特性。

三、应 用

计算几种常见光学系统的菲涅耳数,并作若干分析讨论。

1. 透镜和光阑相隔一段距离

如图 3 所示,从入射面到观察面的总光线矩阵为

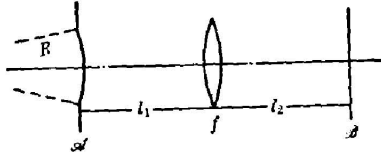


图 3 透镜和光阑相隔一段距离

Fig. 3 A space between lens and aperture



图 4 包含一段介质的情况

Fig. 4 The condition containing a single rod

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (l_2/f) & l_1 + l_2 - (l_1 l_2/f) \\ -1/f & 1 - (l_1/f) \end{pmatrix},$$

由此得菲涅耳数

$$N = \frac{a^2}{\lambda} \left[\frac{f - l_2}{f(l_1 + l_2) - l_1 l_2} + \frac{1}{R} \right]. \quad (11)$$

考虑两个特例:当 $f \rightarrow \infty$ 时, (11) 式简化为

$$N = \frac{a^2}{\lambda} \left[\frac{1}{l_1 + l_2} + \frac{1}{R} \right],$$

这相当于自由空间传输的情况,和(2)式一致。当 $l_1 \rightarrow 0$ 时, (11) 式化为

$$N = \frac{a^2}{\lambda} \left[\frac{1}{L} - \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{R} \right) \right],$$

这是透镜紧靠光阑的情况,也和熟知的结果一致。

2. 包含一段或多段介质

如图 4 所示,光阑面和观察面之间有一段长为 d 、折射率为 n 的介质。此时光线矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_1 + l_2 + (d/n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

菲涅耳数为

$$N = \frac{a^2}{\lambda} \left[\frac{1}{(l_1 + l_2) + (d/n)} + \frac{1}{R} \right]. \quad (12)$$

这个结果容易推广到包含多段不同介质的情况

$$N = \frac{a^2}{\lambda} \left[\frac{1}{\sum_i l_i + \sum_i (d_i/n_i)} + \frac{1}{R} \right] = \frac{a^2}{\lambda} \left[\frac{1}{L - \sum_i (n_i - 1)d_i/n_i} + \frac{1}{R} \right], \quad (13)$$

L 是传输空间的总几何长度, d_i 、 l_i 、 n_i 是各介质的长度、间距和折射率。(13) 式可用于多级行波激光放大器系统,介质相当于放大器的工作物质。

3. 空间滤波器的像传递作用

这种滤波器由一对共焦透镜组成,在共焦面处放置一个针孔,整个系统置于真空室内,如图 5 所示。它已被广泛应用于大型高功率激光系统,是克服强光非线性自聚焦的有效措

施^[3], 1977年 Hunt等^[4]通过计算机数值计算发现它还具有像传递的功能, 以后又从几何光学角度作了理论解释^[5]。应用本文导出的非涅耳数和有效传输距离的表达式, 可以从物理光学角度给予理论说明, 并能进一步确定实现完善像传递的条件和离焦效应。

从光阑面到观察面的光线矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

当 $d=f_1+f_2$ 时, 有

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{d}{f_1} - b \left[\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \left(1 - \frac{d}{f_1} \right) \right] = -M, & B &= -aM - \frac{b}{M} + f_1 + f_2, \\ C &= -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} \left(1 - \frac{d}{f_1} \right) = 0, & D &= aC + \left(1 - \frac{d}{f_1} \right) = -\frac{1}{M}, \end{aligned}$$

式中 $M=f_2/f_1$ 是透镜组的扩孔倍率。按(10)式, 有效传输距离为

$$L_{\text{eff}} = B/A = a + (b/M^2) - (f_1+f_2)/M, \quad (14)$$

而从光阑面到观察面的几何距离是 $L_0 = a + b + f_1 + f_2$, 所以两者之差为

$$L_{\text{err}} = L_0 - b[1 - (1/M^2)] - (f_1 + f_2).$$

当 $M \geq 1$ 时, 恒有 $L_{\text{err}} < L_0$, 即空间滤波器对光束衍射的影响表现为缩短了传输距离。若 $M < 1$, 则要视 b 的大小而定, 当 $b < (f_1+f_2)/[(1/M^2)-1]$ 时, 仍有 $L_{\text{err}} < L_0$ 。

根据前面的讨论, 要实现完善的像传递, 首先必须使 L_{err} 等于零。由(13)式, 这要求满足以下的关系

$$aM + (b/M) = f_1 + f_2. \quad (15)$$

还应指出, 在本文的推导中, 假定了除 \mathcal{A} 面上的光阑外, \mathcal{A} 、 \mathcal{B} 面之间不允许存在有效光阑。这就要求滤波器中的针孔不能太小, 否则将不能得到无衍射的重现像。

如果观察面离焦, 即偏离共轭像面一段距离 Δ , 那么由(14)式可推得

$$L_{\text{err}} = \Delta/M^2. \quad (16)$$

这说明只要 Δ 不太大, L_{err} 就不大, 因而不会有明显的衍射。而且, 扩孔倍率 M 越大, 允许的偏离量也越大。所以在像面附近相当长的一段范围内, 衍射都是不显著的。

四、复数非涅耳数

经典的衍射理论大多假定入射光是匀幅光束, 并且按照非涅耳数的数值大小划分为非涅耳衍射和夫琅和费衍射区域^[1,6]。如果入射光是非匀幅的, 那么衍射场的特征将会发生明显的变化。例如, 光强分布为高斯函数的光束经过小孔光阑后, 只要截断水平不太高, 那么在相当长的传输距离内都不出现衍射环^[7]。因此, 普通形式的非涅耳数不再能确切描述非匀幅波的衍射特性。但是, 至少对一类非匀幅波——高斯光束, 前面得到的表达式(19)仍然适用。所以不同的仅在于矩阵元 $ABCD$ 变为复数, 从而非涅耳数亦为复数。如果入射光束为匀幅波, 但传输系统中包含高斯光阑、高斯反射镜和增益(或损耗)为二次型分布的介质时, 衍射特性仍可用复数非涅耳数描述。下面导出具体表达式。

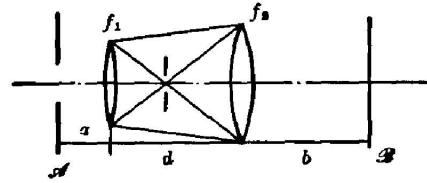


图5 真空空间滤波器

Fig. 5 The vacuum spatial filter

入射高斯光束的振幅分布为 $\psi(r) = \psi_0 \exp(-r^2/w)$, 可以看成是一个匀幅波通过位于入射光阑面的高斯光阑而形成的。高斯光阑的透过率为 $T(r) = \exp(-r^2/w^2)$, 它的矩阵表达式是^[8]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix}, \quad F = ikw^2/2.$$

若传输系统本身的光线矩阵为 $\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$, 那么总光线矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 - (B_0/F) & B_0 \\ C_0 - (D_0/F) & D_0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

所以非涅耳数为

$$N = \frac{\alpha^2}{\lambda} \frac{A}{B} = \frac{\alpha^2}{\lambda} \left(\frac{A_0}{B_0} - \frac{1}{F} \right) = N_0 + i \frac{\alpha^2}{\pi w^2}, \quad (18)$$

其中, N_0 代表由光学系统决定的非涅耳数(实数), w 是入射高斯光束的光斑尺寸。

非涅耳数的虚部反映了光束振幅分布不均匀对衍射的影响。当 $\alpha^2/w^2 \ll 1$ 时, 虚部可以略去, 此时接近于匀幅波衍射的情况; 而 $\alpha^2/w^2 \gg 1$ 时虚部起主要作用, 接近于高斯光束自由传输情况, 基本上不出现衍射环。在一般情况下, 截断高斯光束的衍射场可用复宗量的 Lommel 函数表示

$$\psi = -i \frac{\pi \alpha^2}{\lambda B_0} \frac{\exp(iu/2)}{u/2} [U_1(u, v) - iU_2(u, v)], \quad (19)$$

其中, $v = kar/B_0$, $u = 2\pi N$ 。由于非涅耳数是复数, 所以 u 是复数。如果将 Lommel 函数 U_1 、 U_2 的级数展开式代入, (19)式化为

$$\psi = -i \frac{\pi \alpha^2}{\lambda B_0} \frac{\exp(iu/2)}{u/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{iu}{v} \right)^n J_n(v). \quad (20)$$

这个表达式和文献[9]通过复杂数学运算得到的结果一致(仅选取的符号不同)。

当传输系统中存在高斯光阑、高斯反射镜和增益(耗损)为二次型分布的介质时, (18)式中的矩阵元 A_0 、 B_0 亦为复数, 非涅耳数的普遍表达式仍然正确。

本文的结果表明, 用光线矩阵元表达的非涅耳数具有较大的普遍性, 它不仅适用于任何常规光学元件组成的传输系统, 而且适用于非匀幅的高斯光束的衍射问题, 以及包含高斯光阑、复数类透镜介质等特殊元件的传输系统, 可以解决一些用常规方法难以解决的问题。

参 考 文 献

- [1] A. J. Campills, J. E. Pearson *et al.*; *Appl. Phys. Lett.*, 1973, **23**, No. 2 (15 Jul), 85.
- [2] S. A. Collis; *J. O. S. A.*, 1970, **60**, No. 9 (Sep), 1168.
- [3] D. R. Speck *et al.*; *IEEE J. Q. E.*, 1981, **QE-17**, No. 9 (Sep), 1599.
- [4] J. T. Hunt *et al.*; *Appl. Opt.*, 1977, **16**, No. 4 (Apr), 779.
- [5] J. T. Hunt *et al.*; *Appl. Opt.*, 1978, **17**, No. 13 (1 Jul), 2053.
- [6] G. B. Parrent, B. J. Thompson; *Physical Optics Notebook* (SPIE, 1969), **23**.
- [7] 郑玉霞等; *光学学报*, 1982, **2**, No. 5 (Sep), 477.
- [8] 范慎元; *激光*, 1980, **7**, No. 8 (Aug), 26.
- [9] G. O. Claofe; *J. O. S. A.*, 1970, **60**, No. 12 (Dec), 1654.

The Fresnel number in terms of ray matrix elements

FAN DIANYUAN

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)

(Received 4 August 1982)

Abstract

The number of Fresnel half-period zones for complex optical systems is derived. Its formula is $N = (a^2/\lambda) [(A/B) + (1/R)]$. Since it is expressed by the ray matrix elements, there is a universal significance. We have introduced a concept of "effective propagation path" $L_{\text{eff}} = B/A$, which reflects the influence of optical system on the diffraction field. For several typical systems the concrete expressions of the Fresnel number are given. The imaging properties of the vacuum spatial filter are indicated using the ray matrix theory. The perfect image-relaying conditions are determined. Finally we extend the Fresnel number to the region of complex number, and use it to investigate the diffraction problem of a truncated Gaussian beam.