

# 利用 Talbot 效应实现图像振幅 相减的一种方法

王伟建 罗懿祖 张洪钧  
(中国科学院物理研究所)

## 提 要

本文提出了在相干会聚光照明下利用光栅的 Talbot 自成像效应实现图像振幅相减的一种方法。文中对这种方法的原理进行了理论分析,并给出与理论一致的实验结果。

## 一、引 言

光学图像相减的目的在于检测相似物或其图像间的差别。相减的方法通常分为强度相减和振幅相减两种类型。目前已有多种方法可实现实时或非实时的强度相减和振幅相减<sup>[1]</sup>。按照 J. F. Ebersole<sup>[2]</sup> 对相减方法的分类,利用 Talbot 效应实现图像相减属于双光栅编码方法,在这方面一些作者提出了几种方法<sup>[3,4]</sup>。本文提出一种在相干会聚光照明下利用 Talbot 效应实现图像振幅相减的方法。该方法可与 M. L. Roblin 提出的强度相减方法<sup>[5]</sup> 进行比较,不同之处在于实现了振幅相减。

一对占空比为 0.5 的 Ronchi 光栅平行插入相干光学处理器中,使其沿系统轴线对称地置于滤波平面两边,就构成了利用 Talbot 效应实现图像振幅相减的一个系统。当此两光栅间距是 Talbot 距离的整数倍或半奇数倍时,在第二个光栅平面上形成第一个光栅的 1:1 的傅里叶像或逆傅里叶像。这时若使第二个光栅的刻线相对于第一个光栅的傅里叶像或逆傅里叶像平移二分之一周期,即在输入图像间引入  $\pi$  的位相差,则可得到振幅相减的结果。该方法得到的相减图像上调制着余弦函数条纹,空间滤波可以消除这些调制结构。文中给出了滤波前后的实验结果照片。

## 二、理 论

利用 Talbot 效应实现图像振幅相减的系统示意图如下:

将两个待相减图像对称置于输入平面上,用准直单色光垂直照明。Ronchi 光栅  $G_1$  和  $G_2$  的刻线垂直于  $x$  轴,二者沿系统轴线对称地置于滤波平面两边,且到滤波平面的距离都是  $a$ 。

根据标量衍射理论,在 Fresnel 近似下考察空间频率域内的效应<sup>[6]</sup>。先假定待处理的

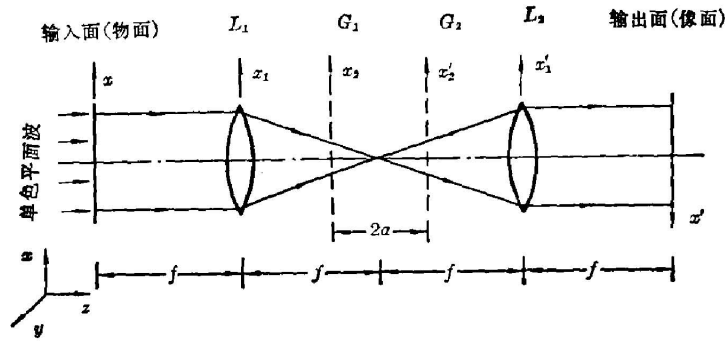


图 1 利用 Talbot 效应实现图像振幅相减的系统

Fig. 1 Arrangement for image amplitude subtraction based on Talbot effect

图像为  $f(x)$ , 其频谱为  $F_0(\nu)$ ; 透镜  $L_1$  前、后平面上光场分布分别是  $U_1(x_1)$  和  $U'_1(x_1)$ ; 光栅  $G_1$  和  $G_2$  前平面上光场分布是  $U(x_2)$  和  $U(x'_2)$ ;  $G_1$  和  $G_2$  的傅里叶级数展开式分别是  $G_1(x_2) = \sum_n C_n \exp[i2\pi(n x_2/d)]$  和  $G_2(x'_2) = \sum_m C_m \exp\{i2\pi[m(x'_2 - x_0)/d]\}$ ,  $x_0$  是  $G_2$  沿  $x$  方向的位移;  $\mathcal{F}\{\}$  表示傅里叶变换; 于是  $F_0(\nu) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ 。经过距离  $f$  的自由空间传播, 在透镜  $L_1$  前平面上光场的频谱为

$$\mathcal{F}\{U_1(x_1)\} = F_0(\nu) \exp(-i\pi\lambda f \nu^2),$$

其中略去了常数位相因子。  $L_1$  后平面上光场的频谱为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{U'_1(x_1)\} &= \mathcal{F}\{U_1(x_1) \exp[(-ik/2f)x_1^2]\} \\ &= \sqrt{\lambda f} e^{-i(\pi/4)} \exp(i\pi\lambda f \nu^2) \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\mu) \exp(-i2\pi\lambda f \nu \mu) d\mu. \end{aligned}$$

经  $f-a$  距离的自由传播, 光栅  $G_1$  前平面上光场频谱为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{U(x_2)\} &= \mathcal{F}\{U'_1(x_1)\} \exp[-i\pi\lambda(f-a)\nu^2] \\ &= \sqrt{\lambda f} e^{-i(\pi/4)} \exp(i\pi\lambda a \nu^2) f(-\lambda f \nu). \end{aligned}$$

光栅  $G_1$  后光场的频谱为

$$\mathcal{F}\{U(x_2)G_1(x_2)\} = \sqrt{\lambda f} e^{-i(\pi/4)} \sum_n C_n \exp\{i\pi\lambda a[\nu - (n/d)]^2\} f\{-\lambda f[\nu - (n/d)]\}.$$

再经过  $2a$  距离的自由传播, 光栅  $G_2$  前平面上光场的频谱为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{U(x'_2)\} &= \mathcal{F}\{U(x_2)G_1(x_2)\} \exp(-i2\pi\lambda a \nu^2) \\ &= \sqrt{\lambda f} e^{-i(\pi/4)} \exp(-i\pi\lambda \nu^2) \sum_n C_n \exp[-i2\pi\lambda a \nu(n/d)] \\ &\quad \cdot \exp[i\pi\lambda a(n^2/d^2)] \cdot f\{-\lambda f[\nu - (n/d)]\}. \end{aligned}$$

光栅  $G_2$  后光场的频谱为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{U(x'_2)G_2(x'_2)\} &= \sqrt{\lambda f} e^{-i(\pi/4)} \sum_n \sum_m C_n C_m \exp[-i2\pi(m x_0/d)] \exp\{-i\pi\lambda a[\nu - (m/d)]^2\} \\ &\quad \cdot \exp\{-i2\pi\lambda a[\nu - (m/d)](n/d)\} \exp[i\pi\lambda a(n^2/d^2)] f\{-\lambda f[\nu - (m/d) - (n/d)]\}. \end{aligned}$$

最后, 在透镜  $L_2$  的后焦面上光场分布为

$$\begin{aligned}
 U(x') &= \frac{1}{\sqrt{i\lambda f}} \exp\{i\pi/\lambda f [1 - (f-a)/f] x'^2\} \cdot \mathcal{F}\{U(x_2)G_2(x_2)\}_{v=x'/\lambda f} \\
 &= e^{-i(\pi/2)} \sum_n \sum_m C_n C_m \exp[-i2\pi(m x_0/d)] \exp\{[i2\pi a(x'/fd)](n-m)\} \\
 &\quad \cdot \exp[i\pi(\lambda a/d^2)(n^2+2mn-m^2)] f[x' + (\lambda f/d)(m+n)]. \quad (1)
 \end{aligned}$$

由于像面上的输出是物体  $f(x)$  的 1:1 的倒像, 所以要倒置像面上的座标系统。(1) 式表明, 像面上光场分布是物体经光栅  $G_1$  和  $G_2$  两次衍射后形成的多重像(求和指标  $n$  与  $m$  分别相应于  $G_1$  和  $G_2$  的各衍射级)。各级衍射像沿  $x'$  方向的位移是  $\lambda f/d$  的整数倍。第  $N$  级衍射像是在  $N=m+n$  的限制下由  $G_1$  和  $G_2$  的各衍射波相互迭加而形成的, 其振幅由相应的  $G_1$  和  $G_2$  的傅里叶系数决定, 位相由  $n$  与  $m$  的组合形式、两光栅间距  $2a$  以及  $G_2$  的横向位移  $x_0$  共同决定。

若待相减图像

$$f(x) = f_1(x+b) + f_2(x-b),$$

其中  $2b$  是图像  $f_1$  和  $f_2$  沿  $x$  方向的间距, 则(1)式成为

$$\begin{aligned}
 U(x') &= e^{-i(\pi/2)} \sum_n \sum_m C_n C_m \exp[-i2\pi(m x_0/d)] \\
 &\quad \cdot \exp[i2\pi a(x'/fd)(n-m)] \exp[i\pi(\lambda a/d^2)(n^2+2mn-m^2)] \\
 &\quad \cdot \{f_1[x'+b+(\lambda f/d)(m+n)] + f_2[x'-b+(\lambda f/d)(m+n)]\}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

为使像面上各级衍射像不重迭, 对图像宽度要有一定限制。设待减物体的最大宽度为  $W$ , 则必须使  $W \leq \lambda f/d$ 。

为了得到相减结果, 只考虑由  $N=m+n=\pm 1$  确定的衍射像的迭加, 于是应使待减图像  $f_1$  和  $f_2$  沿  $x$  方向的间距  $2b=2(\lambda f/d)$ 。

占空比为 0.5 的 Ronchi 光栅, 所有偶次项傅里叶系数为零 ( $C_{2k}=0, k=\pm 1, \pm 2, \dots$ )。并且  $C_0=1/2, C_k=C_{-k}, C_{2k+1}=(1/2)\sin C(2k+1/2), (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 。利用这些性质, 分别讨论  $m+n=1$  和  $m+n=-1$  两种情形:

(i)  $N=m+n=1$ , 对应着两种可能的组合:  $n=0, m=1$  和  $n=1, m=0$ 。这时(2)式成为:

$$\begin{aligned}
 U_{N=1}(x') &= e^{-i(\pi/2)} C_0 C_1 \exp[-i2\pi(x_0/d)] \exp[-i2\pi(ax'/fd)] \exp[-i\pi\lambda(a/d^2)] \\
 &\quad + \exp[i2\pi(ax'/fd)] \exp[i\pi\lambda(a/d^2)] \cdot [f_1(x'+2b) + f_2(x')]. \quad (3)
 \end{aligned}$$

(ii)  $N=m+n=-1$ , 也只有两种可能的组合:  $n=0, m=-1$  和  $n=-1, m=0$ 。于是(2)式成为:

$$\begin{aligned}
 U_{N=-1}(x') &= e^{-i(\pi/2)} C_0 C_1 \left[ \exp\left(i2\pi \frac{x_0}{d}\right) \exp\left(i2\pi \frac{ax'}{fd}\right) \exp\left(-i\pi\lambda \frac{a}{d^2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \exp\left(-i2\pi \frac{ax'}{fd}\right) \exp\left(i\pi\lambda \frac{a}{d^2}\right) \right] \cdot [f_1(x') + f_2(x'-2b)]. \quad (4)
 \end{aligned}$$

由(3), (4)式可见, 物体  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  经光栅  $G_1$  和  $G_2$  两次衍射, 总衍射级数  $N=\pm 1$  的像  $f_1(x')$  和  $f_2(x')$  在像面的光轴附近, 如图 2 所示的几何图形, 形象地表示(3), (4)两个公式代表的物理图像。

下面讨论光轴附近  $f_1(x')$  和  $f_2(x')$  的迭加。注意(3)式中  $f_2(x')$  分别相应于(0, 1)和

(1, 0) 两光束的迭加, 其位相关系依赖于  $G_2$  的平移距离  $x_0$  及两光栅间距  $2a$ , 并使  $f_2(x')$  带有调制结构。(4) 式中  $f_1(x')$  亦有同样解释。讨论  $x_0$  和  $2a$  取一些特定值的两种情形:

(1)  $x_0 = nd$ , 即  $G_2$  与  $G_1$  的刻线平行且

沿  $x$  方向无相对位移时, 由 (3), (4) 式得:

$$U_{N=\pm 1}(x') = 2C_0C_1e^{-i(\pi/2)} \{ \cos[\pi(\lambda a/d^2) + \pi(2ax'/fd)] f_2(x') + \cos[\pi(\lambda a/d^2) - \pi(2ax'/fd)] f_1(x') \}, \quad (5)$$

$x_0$  取定后, 再考虑  $2a$  取两种特定值的情形:

(i)  $2a = M \frac{2d^2}{\lambda}$  ( $M$  是正整数), 即两光栅间距是 Talbot 距离整数倍的情形, (5) 式成为:

$$U_{N=\pm 1}(x') = 2C_0C_1e^{-i(\pi/2)} (-1)^M \cos[(2\pi M/\lambda f) x' d] [f_1(x') + f_2(x')],$$

这是图像振幅相加。

(ii)  $2a = \left(\frac{2M+1}{2}\right) \frac{2d^2}{\lambda}$ , 即两栅间距是 Talbot 距离的半奇数倍, (5) 式成为:

$$U_{N=\pm 1}(x') = 2C_0C_1e^{-i(\pi/2)} (-1)^M \sin[(2M+1)\pi x' d/\lambda f] \cdot [f_1(x') - f_2(x')], \quad (6)$$

这就是图像振幅相减, 其上调制着正弦函数。振幅相减要求的位相差为  $\pi$ , 这是由于两光栅间距增减 Talbot 距离之半  $d^2/\lambda$  引入的。

(2)  $x_0 = nd + \frac{d}{2}$ , 即  $G_2$  的刻线平行于  $G_1$  的刻线, 且沿  $x$  方向位移二分之一周期。由 (3), (4) 式得:

$$U_{N=\pm 1}(x') = 2iC_0C_1e^{-i(\pi/2)} \{ \sin[\pi(\lambda a/d^2) + \pi(2ax'/fd)] f_2(x') + \sin[\pi(\lambda a/d^2) - \pi(2ax'/fd)] f_1(x') \}. \quad (7)$$

同样考虑两种情形:

(i)  $2a = M \frac{2d^2}{\lambda}$ , (7) 式成为:

$$U_{N=\pm 1}(x') = 2iC_0C_1e^{-i(\pi/2)} (-1)^M \sin[(2\pi M/x'd)\lambda f] [f_2(x') - f_1(x')], \quad (8)$$

这也是图像振幅相减, 其上仍然调制着正弦函数。而此时位相差  $\pi$  是由  $G_2$  相对于  $G_1$  的 Fourier 像沿  $x$  方向平移二分之一周期引入的。

(ii)  $2a = [(2M+1)/2] (2d^2/\lambda)$ , (7) 式成为:

$$U_{N=\pm 1}(x') = 2iC_0C_1e^{-i(\pi/2)} (-1)^M \cos\left\{ \frac{[(2M+1)\pi]}{\lambda f} x' d \right\} [f_2(x') + f_1(x')],$$

这是振幅相加的结果。

综上所述, 在两栅相距 Talbot 距离整数倍或半奇数倍, 同时  $G_2$  相对于  $G_1$  的傅里叶像或逆傅里叶像沿  $x$  方向平移  $1/2$  周期这两组条件下, 能得到输入图像间的振幅差。

以  $I_i (i=1, 2)$  分别表示与 (6) 式和 (8) 式相应的强度分布, 用胶片进行记录并经过线性处理, 使正片的透过率为:

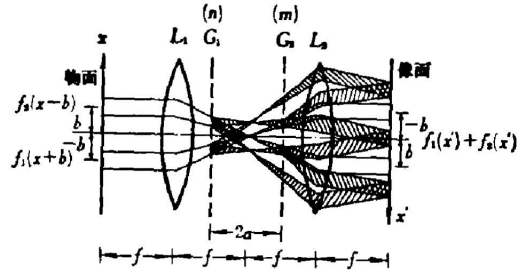


图 2 对应于  $N = \pm 1$  时  $n$  和  $m$  的几种可能的组合, 衍射光束的几何图形表示

Fig. 2 Geometric diagram of diffraction beam for possible combination of  $n$  and  $m$  at  $N = \pm 1$

$$\tau = \tau_0 I_i \quad (i=1, 2), \quad (9)$$

其中  $\tau_0$  是常数振幅透过率。

与(6)式和(8)式相应的强度分布中, 相减图像上调制的余弦函数的频率是  $(2M+1)/b$  和  $2M/b$  ( $b = \lambda f/d$ )。两光栅间距增加( $M$  增大)时, 宽度为  $b$  的图像内调制的条纹数亦随之增加。

将振幅透过率为  $\tau = \tau_0 I_1$  的相减图像插入图 3 所示系统中作空间滤波处理。

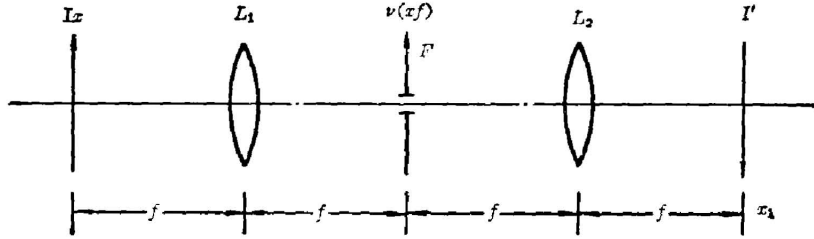


图 3 相干光空间滤波系统

Fig. 3 Spatial filter system for coherent light

$$\tau(x) = \tau_0 \frac{C_1^2}{2} \left[ 1 - \cos \frac{2\pi(2M+1)}{\lambda f} x d \right] \cdot [f_1(x) - f_2(x)]^2.$$

设  $\tau_0 \frac{C_1^2}{2} = A$ ,  $F(\nu) = \mathcal{F}\{[f_1(x) - f_2(x)]^2\}$ , 于是  $L_1$  后焦面上光场分布为

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{i\lambda f}} \mathcal{F}\{\tau(x)\} \\ &= \frac{A}{\sqrt{i\lambda f}} \left\{ F(\nu) - \frac{1}{2} F\left[\nu - (2M+1) \frac{d}{\lambda f}\right] - \frac{1}{2} F\left[\nu + (2M+1) \frac{d}{\lambda f}\right] \right\}, \quad (10) \end{aligned}$$

其中  $\nu = x_f/\lambda f$ 。上式第一、二、三项分别是相减图像的 0 级和  $\pm 1$  级频谱, 间距  $(d/\lambda f)$  ( $2M+1$ ), 与调制余弦函数频率相同。为了便于滤波处理, 两光栅间距应足够大以使各级频谱足以在空间分离。经滤波面上孔径光阑滤波和透镜  $L_2$  的变换, 得到消除调制结构的相减图像。

### 三、实 验

实验装置如图 4 所示。

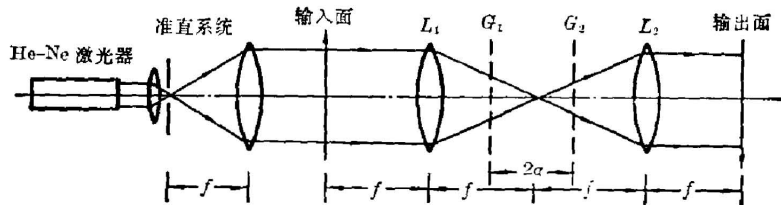


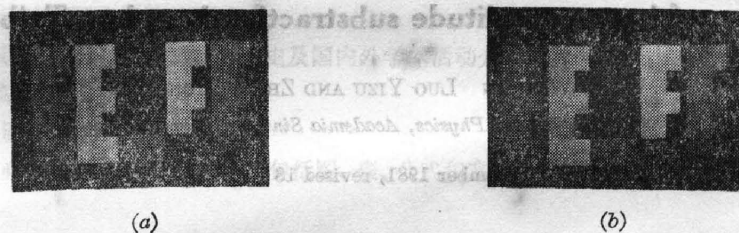
图 4 实验装置示意图

Fig. 4 Schematic diagram of experimental set-up

He-Ne 激光器的输出光 ( $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ ) 经准直系统产生单色平面波垂直照明输入面上待相减图像。光束准直度用 Silva<sup>[7]</sup> 提出的方法, 通过观察两个相距 Talbot 距离整数倍的相同光栅产生的 Moiré 条纹校准。变换透镜  $L_1$  和  $L_2$  的焦距  $f = 400 \text{ mm}$ , Ronchi 光栅  $G_1$  和  $G_2$  占空比为 0.5, 空间频率为 20 lines/mm, Talbot 距离  $z_T = 2d^2/\lambda = 7.9 \text{ mm}$ 。输入面上待减物体是透明字母 E 和 F, 尺寸分别是  $13 \times 5 \text{ mm}^2$  和  $10 \times 5 \text{ mm}^2$ 。细心调节二者的相对位置, 使像面上的  $\pm 1$  级衍射像重合。这时保证待减图像经光栅  $G_1$  和  $G_2$  两次衍射后在像面上  $\pm 1$  级衍射像重合的条件是  $2b = 2(\lambda f/d) = 5.7 \text{ mm}$ 。E 和 F 的宽度  $W (= 5 \text{ mm}) \leq b (= 5.7 \text{ mm})$  使各级衍射像不发生重迭。

光栅  $G_1$  和  $G_2$  置于能调节其沿光轴和垂直光轴两个方向运动的微调支架上。  $G_1$  位置确定后, 沿光轴调节  $G_2$ , 使二者相距 Talbot 距离的整数倍或半奇数倍。然后保持二者相对位置不变, 使其作为一个整体沿光轴调节, 直到对称于滤波平面为止。最后垂直光轴方向调节  $G_2$ , 使其相对于  $G_1$  的傅里叶像或逆傅里叶像平移二分之一周期, 于是在像面上得到带有调制结构的相减图像。

为了便于空间滤波处理, 分别取  $2a = 12z_T = 95 \text{ mm}$  和  $2a = \left(14 + \frac{1}{2}\right)z_T = 115 \text{ mm}$ , 得到如图 5(a), (b) 的实验结果, 图像宽度内调制的条纹数分别是 24 和 29 条。

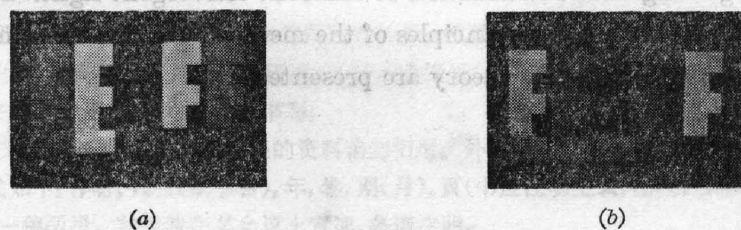


(a)

(b)

图 5 带有调制结构的振幅相减图像

Fig. 5 Amplitude subtraction images with modulation structures



(a)

(b)

图 6 零级 (a) 和一级 (b) 滤波处理后的实验结果

Fig. 6 Experimental results of 0-order and  $\pm 1$  order filtering processing

将记录的带有调制结构的相减图像置于相干光处理器输入面上, 作 0 级和一级滤波处理, 结果如图 6(a), (b) 所示, 显示出消除了相减图像上的余弦调制结构。实验结果与理论一致。图 6 中出现的条纹是由于实验上滤波不彻底的误差造成的。

为了得到较好的相减结果, 照明输入图像的平面波必须在整个输入图形上保持尽可能均匀的照度, 以保证振幅相减能有最大对比度。

#### 四、结 论

利用 Talbot 效应在相干会聚光下实现图像振幅相减的这种方法, 与 M. L. Roblin 的强度相减方法一样, 在相减图像上调制有正弦函数。象其它所有的图像振幅相减方法一样, 该方法亦无法避免激光相干噪声对相减输出图像的影响。相干光处理中的激光散斑噪声是目前尚未解决的问题。图 6 的结果显示出相减图像上迭加的激光散斑噪声。

#### 参 考 文 献

- [1] J. F. Ebersole; *Opt. Engineer*, 1975, **14**, No. 5 (Sep-Oct), 438.
- [2] K. S. Pennington, P. M. Will *et al.*; *Opt. Commun.*, 1970, **2**, No. 3 (Aug), 113.
- [3] K. Patorski, S. Yokozeki *et al.*, *Now. Rev. Opt.*, 1975, **6**, No. 1 (Sep-Oct), 25.
- [4] K. Potoraki; *Opt. Commun.*, 1979, **29**, No. 1 (Apr), 13.
- [5] M. L. Roblin; *Opt. Commun.*, 1974, **10**, No. 1 (Jan), 43.
- [6] J. W. Goodman; *«Introduction to Fourier Optics»*, (McGraw-Hill, New York, 1968)
- [7] D. E. Silva; *Appl. Opt.*, 1971, **10**, No. 8 (Aug), 1980.

### Realization of image amplitude subtraction based on Talbot effect

WANG WEIJIAN LUO YIZU AND ZHANG HONGJUN  
(*Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing*)

(Received 1 December 1981, revised 18 February 1982)

#### Abstract

A new method-realization of image amplitude subtraction is described based on Talbot effect of grating with illumination of coherent convergent light. The theoretical analyses are made to explain the principles of the method, and the experimental results, which are in accordance with the theory are presented.