

圆柱面光栅电磁理论的边值问题

庄 杰 佳

(中国科学院高能物理研究所)

提 要

本文介绍利用本征函数展开处理圆柱面光栅电磁理论的边值问题。采用迭代法可容易地获得问题的解。

波动光学的严格数学表式——基尔霍夫(Kirchhoff)定理适用于波(标量)的衍射问题,该理论可有效地处理大多数光学仪器问题,因为在光学仪器中多数属于衍射障碍物的尺寸比光波波长大得多的问题,这时基尔霍夫的边界条件是较好的近似,但在其它情况,如障碍物附近的场,理论与实验的偏离就明显了^[1]。实际上,基尔霍夫理论的解并不能在障碍物处重现所假定的边界条件,亦即这种理论是不自洽的,此外,作为标量理论,当然亦无法完全确定电磁场的分布。电磁场的完全确定,不仅需要场矢的大小,还必需知道场矢的方向(偏振)。

要完全确定光在传播过程中电磁场的分布,必须采用电磁理论。它是目前解释一切与光传播有关问题的严格理论。Petit对平面光栅电磁理论处理已作介绍^[2],在文献[3]中,我们介绍了圆柱面衍射光栅作为电磁理论边值问题的一种处理方法,本文将介绍另一种处理方法,它不用数值积分,而是采用迭代法获得问题的解。它是光栅型的激光加速、自由电子激光场结构以及光波导耦合机构等问题进行计算机设计计算的一种有效方法。

对于介质常数为实数,且与时间无关的情况,麦克斯韦方程具有如下形式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / c \partial t, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / c \partial t, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

考虑 TM 波,在柱坐标 (r, φ, z) 中,省去时间因子 $e^{-i\omega t}$, 则此时场的各分量的关系式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= i k \mu H_\varphi, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r H_\varphi &= -i k \epsilon E_z, \\ \frac{\partial}{\partial z} H_\varphi &= i k \epsilon E_r. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

场的其它分量 $E_r = E_\varphi = H_z = 0$, 式中 $k = \omega/c$ 为波数,其中 ω 为光波角频率, c 为真空光速。在方程组(1)消去 E_r 得(假定 $\mu = 1$)

$$\frac{\partial}{\partial r} E_z = \left[\frac{\partial}{i \partial z} k^{-1} \epsilon^{-1} \cdot \frac{\partial}{i \partial z} - k \right] i H_\varphi, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (i H_\varphi) = k \epsilon E_z. \quad (2)$$

考虑矩形槽圆柱面光栅,其结构示意图(绕 z 轴旋转 360°)如图 1 所示。假定入射区,光栅

区和图透射区的 $\mu=1$, 而入射区和透射区的介电常数 $\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(o)} = 1$, 光栅区介电常数 ε 满足下列关系

$$\varepsilon(r, z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & -\frac{1}{2} fL < z < \frac{1}{2} fL, \\ \varepsilon_0, & \frac{1}{2} fL < z < \frac{3}{2} fL, \end{cases}$$

$\varepsilon(r, z+L) = \varepsilon(r, z)$ 即光栅周期为 L , 对 $\varepsilon(r, z)$ 进行傅里叶展开

$$\varepsilon(r, z) = \sum_n (\varepsilon)_n e^{2\pi i n z / L}, \quad \varepsilon^{-1}(r, z) = \sum_n (\varepsilon^{-1})_n e^{2\pi i n z / L},$$

展开系数为

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon)_n &= \begin{cases} f(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) + \varepsilon_0, & n=0, \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \sin(n\pi f) / n\pi, & n \neq 0, \end{cases} \\ (\varepsilon^{-1})_n &= \begin{cases} (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) f + \varepsilon_0 \varepsilon_1 + 1 / \varepsilon_0, & n=0, \\ -(\varepsilon)_n / \varepsilon_0 \varepsilon_1, & n \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

同样, 对各区域的电磁场分量亦作傅里叶展开

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \sum_m Z_m \exp(ik_{zm}z) = \sum_m Z_m \exp(i\sigma_m kz), \\ iH_\varphi &= \sum_m \Phi_m \exp(ik_{zm}z) = \sum_m \Phi_m \exp(i\sigma_m kz), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 $\sigma_m = k_{zm}/k = \sin\theta + \frac{m}{P}$, $P = L/\lambda$, θ 为入射角。

将方程组(3)、(4)式代入方程组(2)式, 可把光栅区 $R_0 \leq r \leq R_1$ 的偏微分方程变为傅里叶系数的常微分方程组。选取单位使波数 $k=1$, 则对于某一分波的常微分方程组为

$$\frac{d}{dr} Z_m = \sum_n [\sigma_m (\varepsilon^{-1})_{m-n} \sigma_n - \delta_{mn}] \Phi_n, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \Phi_m = \sum_n (\varepsilon)_{m-n} Z_n. \quad (5)$$

令 $S_{mn} = -\sigma_m (\varepsilon^{-1})_{m-n} \sigma_n + \delta_{mn}$, $T_{mn} = (\varepsilon)_{m-n}$, $\mathbf{Z} = (Z_m)$, $\Phi = (\Phi_m)$, 则光栅区的矩阵形式常微分方程组表述如下:

$$\frac{d}{dr} \mathbf{Z} = -\mathbf{S}\Phi, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r\Phi = \mathbf{T}\mathbf{Z}. \quad (6)$$

由于 ε 为实数, 因此 $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+$, $\mathbf{T} = \mathbf{T}^+$ (此处 \mathbf{S}^+ , \mathbf{T}^+ 分别为 \mathbf{S} , \mathbf{T} 的共轭矩阵), 即 \mathbf{S} , \mathbf{T} 为厄米矩阵, 故有

$$\frac{d}{dr} \mathbf{Z}^+ = -\Phi^+ \mathbf{S}^+ = -\Phi^+ \mathbf{S}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r\Phi^+ = \mathbf{Z}^+ \mathbf{T}^+ = \mathbf{Z}^+ \mathbf{T}. \quad (7)$$

能流守恒关系

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r(\Phi^+ \mathbf{Z} - \mathbf{Z}^+ \Phi) = \mathbf{Z}^+ \mathbf{T}^+ \mathbf{Z} + \Phi^+ \mathbf{S}\Phi - \Phi^+ \mathbf{S}^+ \Phi - \mathbf{Z}^+ \mathbf{T}\mathbf{Z} = 0, \quad (8)$$

由于矩形槽光栅 ε 与 r 无关, 因此矩阵 \mathbf{S} , \mathbf{T} 亦与 r 无关。令算符 $\hat{M} = \begin{vmatrix} 0 & -\mathbf{S} \\ \mathbf{T} & 0 \end{vmatrix}$, 则算符 \hat{M} 的本征方程为

$$\hat{M} \begin{bmatrix} z^{(e)} \\ \varphi^{(e)} \end{bmatrix} = i\beta^{(e)} \begin{bmatrix} z^{(e)} \\ \varphi^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

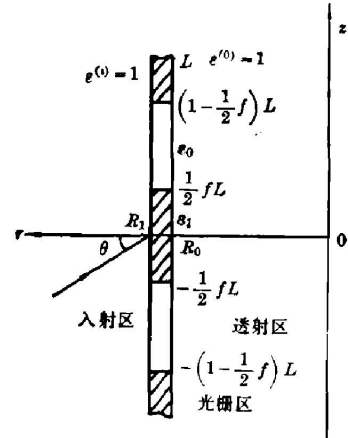


图1 柱面光栅结构示意图 (绕 z 转 360°)

Fig. 1 Schematic diagram of the cylindrical grating structure (the grating and the incident beam revolving together around the z -axis)

或 $-\mathbf{S}\varphi^{(e)} = i\beta^{(e)}z^{(e)}$, $\mathbf{T}z^{(e)} = i\beta^{(e)}\varphi^{(e)}$ 。由于 $\hat{M}^2 = \begin{vmatrix} -\mathbf{ST} & 0 \\ 0 & -\mathbf{TS} \end{vmatrix}$, 因此有

$$-\mathbf{TS}\varphi^{(e)} = [i\beta^{(e)}]^2\varphi^{(e)}, \quad -\mathbf{ST}z^{(e)} = [i\beta^{(e)}]^2z^{(e)}. \quad (10)$$

这表明 $[i\beta^{(e)}]^2$ 为 $-\mathbf{ST}$ 和 $-\mathbf{TS}$ 的本征值, $\varphi^{(e)}$, $z^{(e)}$ 分别为 $-\mathbf{TS}$, $-\mathbf{ST}$ 的本征矢。由于 $-\mathbf{ST} = (-\mathbf{TS})^+$, 因此 $[i\beta^{(e)}]^2$ 为实数。设 $[i\beta^{(e)}]^2$ 为正实数时, $\beta^{(e)}$ 为正虚数, 记为 $i\beta^{(e)'}$; $[i\beta^{(e)}]^2$ 为负实数时, $\beta^{(e)}$ 为正实数, 记为 $\beta^{(e)''}$ 。

利用本征方程 (10) 式可解方程 (6) 式, 作分离变数, 令

$$\mathbf{Z} = \sum^{(e)} Z^{(e)}(r)z^{(e)}, \quad \Phi = \sum^{(e)} \Phi^{(e)}(r)\varphi^{(e)}.$$

代入方程 (6) 得

$$\frac{d}{dr} Z^{(e)}(r) = i\beta^{(e)}\Phi^{(e)}(r), \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r\Phi^{(e)}(r) = i\beta^{(e)}Z^{(e)}(r). \quad (11)$$

其解为

$$\left. \begin{aligned} Z^{(e)}(r) &= \frac{1}{2} H_0^{(1)}(\beta^{(e)}r) \quad \text{或} \quad \frac{1}{2} H_0^{(2)}(\beta^{(e)}r), \\ \Phi^{(e)}(r) &= -\frac{1}{2i} H_1^{(1)}(\beta^{(e)}r) \quad \text{或} \quad -\frac{1}{2i} H_1^{(2)}(\beta^{(e)}r), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中 $H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$ 和 $H_1^{(1)}$, $H_1^{(2)}$ 分别为一类, 二类的零阶和一阶汉克尔 (Hankel) 函数。用待定系数迭加得光栅区 ($R_0 \leq r \leq R_1$) 的通解为

$$\left. \begin{aligned} Z &= \sum^{(e)} \frac{1}{2} [F^{(e)} H_0^{(2)}(\beta^{(e)}r)z^{(e)} + G^{(e)} H_0^{(1)}(\beta^{(e)}r)z^{(e)}], \\ \Phi &= \sum^{(e)} \frac{i}{2} [F^{(e)} H_1^{(2)}(\beta^{(e)}r)\varphi^{(e)} + G^{(e)} H_1^{(1)}(\beta^{(e)}r)\varphi^{(e)}], \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中 $F^{(e)}$, $G^{(e)}$ 为待定系数。

光栅区之外, \mathbf{S} , \mathbf{T} 均为对角矩阵。对于透射区 $0 \leq r \leq R_0$, 考虑 $r=0$ 处场有限, 其解可表示为

$$Z^{(0)} = (Z_n^{(0)}), \quad Z_n^{(0)} = C_n J_0(\alpha_n r); \quad \Phi^{(0)} = (\Phi_n^{(0)}), \quad \Phi_n^{(0)} = \varepsilon^{(0)} C_n J_1(\alpha_n r) / \alpha_n, \quad (14)$$

式中 $\alpha_n^2 = \varepsilon^{(0)} - \sigma_n^2 = 1 - \sigma_n^2$, C_n 为待定系数。

对于入射区, 考虑场在 $r \rightarrow \infty$ 为零, 其解具有如下形式

$$\left. \begin{aligned} Z^{(i)} &= (Z_n^{(i)}), \quad Z_n^{(i)} = \frac{1}{2} [\delta_{n0} A_0 H_0^{(2)}(\eta_n r) + B_n H_0^{(1)}(\eta_n r)], \\ \Phi^{(i)} &= (\Phi_n^{(i)}), \quad \Phi_n^{(i)} = \frac{\varepsilon^{(i)}}{2\eta_n} [\delta_{n0} A_0 H_1^{(2)}(\eta_n r) + B_n H_1^{(1)}(\eta_n r)], \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中 $\eta_n^2 = \varepsilon^{(i)} - \sigma_n^2 = 1 - \sigma_n^2$, A_0 为由入射条件决定之常数, B_n 为待定系数。

利用电磁场在边界处 $r=R_0$ 和 $r=R_1$ 连续, 可得透射区系数 C_n , 则由 (14) 式即可确定衍射区电磁场分布。

在 $r=R_0$ 处的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_n}{2} [H_0^{(2)}(\alpha_n R_0) + H_0^{(1)}(\alpha_n R_0)] &= \sum^{(e)} \frac{1}{2} [F_n^{(e)} H_0^{(2)}(\beta^{(e)} R_0) + G_n^{(e)} H_0^{(1)}(\beta^{(e)} R_0)] z_n^{(e)}, \\ \frac{C_n}{2\alpha_n} [H_1^{(2)}(\alpha_n R_0) + H_1^{(1)}(\alpha_n R_0)] &= \sum^{(e)} \frac{i}{2} [F_n^{(e)} H_1^{(2)}(\beta^{(e)} R_0) + G_n^{(e)} H_1^{(1)}(\beta^{(e)} R_0)] \varphi_n^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

在 $r=R_1$ 处的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} [\delta_{n0} A_0 H_0^{(2)}(\eta_n R_1) + B_n H_0^{(1)}(\eta_n R_1)] \\ & = \sum^{(e)} \frac{1}{2} [F_n^{(e)} H_0^{(2)}(\beta^{(e)} R_1) + G_n^{(e)} H_0^{(1)}(\beta^{(e)} R_1)] z_n^{(e)}, \\ & \frac{1}{2\eta_n} [\delta_{n0} A_0 H_1^{(2)}(\eta_n R_1) + B_n H_1^{(1)}(\eta_n R_1)] \\ & = \sum^{(e)} \frac{i}{2} [F_n^{(e)} H_1^{(2)}(\beta^{(e)} R_1) + G_n^{(e)} H_1^{(1)}(\beta^{(e)} R_1)] \varphi_n^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由于 $\varepsilon^{(0)} = \varepsilon^{(e)} = 1$, $\sigma_n = \sin \theta + n/P$, 当 $\sin \theta$ 很小时(即接近垂直入射时), α_0, η_0 接近于 1。随着 $|n|$ 增大, α_n, η_n 相应减小, 但仍保持实数, 此时分别记为 α_n', η_n' 。当 $|n|$ 继续增大, α_n, η_n 继续减小, 即转为正虚数, 以 $i\alpha_n'', i\eta_n''$ 表示之。约定 $z_n^{(e)}$ 为实数, 并取归一化条件为

$$z^{(e)+T} z^{(e)} = \sum_n z_n^{(e)} z_n^{(e)*} T_{mn} = |\beta^{(e)}|. \quad (18)$$

由方程(10)可知, 当 $\beta^{(e)}$ 为正实数 $\beta^{(e)'}$ 时, 相应 $\varphi_n^{(e)} = -i \sum_n T_{mn} z_n^{(e)}/\beta^{(e)'}$ 为虚数, 记为 $i\varphi_n^{(e)'}$; 当 $\beta^{(e)}$ 为正虚数 $i\beta^{(e)''}$ 时, $\varphi_n^{(e)} = -\sum_n T_{mn} z_n^{(e)}/\beta^{(e)''}$ 为实数, 记为 $\varphi_n^{(e)''}$ 。因此 $\varphi_n^{(e)}$ 有虚部和实部, 具体依 $\beta^{(e)}$ 而定。令 $B_n = B_n' + iB_n'', C_n = C_n' + iC_n'', F_n^{(e)} = F_n^{(e)'} + iF_n^{(e)''}$ 和 $G_n^{(e)} = G_n^{(e)'} + iG_n^{(e)''}$ 。把代数方程组(16)、(17)实部和虚部分开求解得 $C_n', C_n'',$ 代入(14)、(4)式得透射区电磁场

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \sum_n J_0(\alpha_n r) \{ [C_n' \cos(\sigma_n z) - C_n'' \sin(\sigma_n z)] + i[C_n' \sin(\sigma_n z) + C_n'' \cos(\sigma_n z)] \}, \\ E_r &= \sum_n \frac{\sigma_n}{\alpha_n} J_1(\alpha_n r) \{ [C_n' \sin(\sigma_n z) + C_n'' \cos(\sigma_n z)] - i[C_n' \cos(\sigma_n z) - C_n'' \sin(\sigma_n z)] \}, \\ H_\varphi &= \sum_n \frac{1}{\alpha_n} J_1(\alpha_n r) \{ [C_n' \sin(\sigma_n z) + C_n'' \cos(\sigma_n z)] - i[C_n' \cos(\sigma_n z) - C_n'' \sin(\sigma_n z)] \}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

令 $E_z = E_z' + iE_z'', E_r = E_r' + iE_r'',$ 和 $H_\varphi = H_\varphi' + iH_\varphi'',$ 把方程组(19)实部和虚部分开, 求得场分量的实部和虚部, 即得透射区真正电磁场

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \sqrt{E_z'^2 + E_z''^2} \cos[\omega t - \text{tg}^{-1}(E_z''/E_z')], \\ E_r &= \sqrt{E_r'^2 + E_r''^2} \sin[\omega t - \text{tg}^{-1}(E_r''/E_r')], \\ H_\varphi &= \sqrt{H_\varphi'^2 + H_\varphi''^2} \sin[\omega t - \text{tg}^{-1}(H_\varphi''/H_\varphi')]. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

对于 TE 波, 仅需将上述诸方程中 ε 和 $-\mu, \mathbf{E}$ 和 \mathbf{H} 的对应分量等互换, 即得相应方程。

为了产生 TM 波, 入射单色光的磁场应沿光栅槽向; 若要产生 TE 波, 则入射光电场应沿光栅槽向。实际光栅还具有一定厚度的基底, 属介质常数的均匀区, 可以直接进行解析求解。

在进行计算机计算时, 上述求和限不可能对 $\pm\infty$ 求和, 而截止于 $\pm N$ 。N 值的确定由问题收敛的快慢等因素决定。我们利用这种处理方法对调相聚焦激光加速器的调相聚焦场结构的某些参数进行在机计算, 获得与文献[2]一致的结果。

本工作是在彭桓武教授指导下进行的。计算工作由沈天骥副研究员完成, 在此向他们表示衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] M. Born, E. Wolf; *«Principles of Optics»*, (Pergamon, New York, 1959).
[2] R. Petit; *Nouv. Rev. Opt.*, 1975, 6, No. 2 (Mar-Apr), 129.
[3] 彭桓武, 庄杰佳; *«中国科学»*, 1979, No. 10 (Oct), 953.

**Boundary value problems for electromagnetic
theory of cylindrical grating**

ZHUANG JIEJIA

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing)

(Received 12 December 1981)

Abstract

In this paper we describe the eigen-function expansion for the boundary value problems of electromagnetic theory of cylindrical grating. It is easy to solve them by means of the interaction computing method.