

二元相位计算全息图

龚建民*

(中国科学技术大学物理系)

提 要

本文提出了对物体傅里叶变换频谱的实部或者虚部编码制作计算全息图的方法,并且指出这种全息图可以在相位编码方向上采用多路技术,使其具有一图多用的功能。文中给出了实验结果。

制作傅里叶变换计算全息图需要对物体傅里叶变换频谱编码。通常采用的编码方法是迂回相位法^[1]。采用这种方法时,一般相位需要量化, N 级相位量化对应 N 个相位值。根据迂回相位的原理,还可以采用文献[2]提出的用 0° 、 90° 、 180° 、 270° 这四个相位值以及文献[3]提出的用 0° 、 120° 、 240° 这三个相位值对相位编码,使相位取值个数大大减少,方便了制作。

本文提出可以用对物体傅里叶变换的实部或者虚部编码来代替对整个复频谱编码。实部和虚部的相位分别是 0° 和 180° ; 90° 和 270° ,所以无论实部还是虚部都可以用二个相位值对相位编码,因此我们称这种全息图为二元相位计算全息图。

一、原理和方法

为讨论方便起见,分析限于一维情况,并且将计算全息处理的物体的离散函数作为连续函数考虑。因为这些不会影响分析所得的结果。

若物体为 $g(x)$,其傅里叶变换记为

$$\mathcal{F}[g(x)] = G(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-i2\pi x\mu) dx, \quad (1)$$

式中 $G(\mu)$ 为 $g(x)$ 的傅里叶变换频谱。对于 $g^*(-x)$ 的傅里叶变换显然有

$$\mathcal{F}[g^*(-x)] = G^*(\mu), \quad (2)$$

式中 $*$ 表示取复共轭。若取频谱 $G(\mu)$ 的实部进行逆傅里叶变换,则有

$$\mathcal{F}^{-1}\{\text{Re}[G(\mu)]\} = \frac{1}{2} \{\mathcal{F}^{-1}[G(\mu) + G^*(\mu)]\} = \frac{1}{2} [g(x) + g^*(-x)] = f(x). \quad (3)$$

若取频谱 $G(\mu)$ 的虚部进行逆傅里叶变换,则有

$$\mathcal{F}^{-1}\{I_m[G(\mu)]\} = \frac{1}{2} \{\mathcal{F}^{-1}[G(\mu) - G^*(\mu)]\} = \frac{1}{2} [g(x) - g^*(-x)] = h(x). \quad (4)$$

显然取物体频谱的实部(虚部)可以使相位只具有二个值,并且如果对物体频谱的实部

收稿日期: 1981年11月20日

* 研究生。指导教师: 霍裕平, 谢建平。

(虚部)作逆傅里叶变换,那么结果使得物体 $g(x)$ 和它的厄米共轭物体 $g^*(-x)$ 进行相加(相减),产生了具有厄米对称性质的新的物体 $f(x)$ (厄米反对称性质的新的物体 $h(x)$)。

根据这些性质,我们将讨论如何利用对物体频谱的实部(虚部)编码以及如何利用再现象具有的厄米运算性质制作二元相位计算全息图。

由上面分析结果可知,全息图再现象的振幅正比于 $g(x) \pm g^*(-x)$ 。为了再现物体 $g(x)$,应将物体相对原点平移一段距离 x_0 ,对平移后的物体 $g(x-x_0)$ 的频谱实部(虚部)编码,只要选择距离 x_0 ,使 $x_0 \geq \Delta x/2$,这里 Δx 为物体 $g(x)$ 的大小,这时全息图的再现象为 $g(x-x_0) \pm g^*(-x-x_0)$,再现象强度为 $|g(x-x_0)|^2 + |g(-x-x_0)|^2$ 。无论是对实部或者虚部编码,理论上两种情况全息图的再现象强度完全相同。但是以后分析将表明,对虚部编码的全息图再现象质量相对要好。

利用再现象具有的厄米运算性质,这种全息图还可以再现图象的减法和微分运算的结果。若 $g(x)$ 和 $f(x)$ 是两个待相减的物体,用 $g(x)$ 和 $f(x)$ 组成一个新的物体 $n(x)$

$$n(x) = g(x-x_0) + f^*(-x-x_0)。 \quad (5)$$

对 $I_m\{\mathcal{F}[n(x)]\}$ 编码,这时全息图再现象为

$$n(x) - n^*(-x) = [g(x-x_0) - f(x-x_0)] + [f(-x-x_0) - g(-x-x_0)]^*, \quad (6)$$

得到了 $g(x)$ 和 $f(x)$ 相减后的图象以及它的厄米共轭象。若要再现物体 $g(x)$ 的微分象,取 $n(x)$ 为

$$n(x) = g(x-x_0-\delta x) + g^*(-x-x_0)。 \quad (7)$$

同进行减法过程相同,全息图再现象为

$$[g(x-x_0-\delta x) - g(x-x_0)] + [g(-x-x_0) - g(-x-x_0-\delta x)]^*, \quad (8)$$

得到了 $g(x)$ 沿 x 方向上的微分象。

这里需要指出,计算全息中图象的减法以及微分等运算可以由计算机执行 $m(x) = g(x) - f(x)$ 或者 $m(x) = g(x-\delta x) - g(x)$ 制作 $m(x)$ 的傅里叶变换计算全息图。但是这时必须对复频谱编码,而二元相位计算全息图是对实函数编码(虚部的因子 i 可以作为复常数忽略),上述运算是由再现象具有的厄米运算性质所决定的。

对于大多数物体,特别是以透明文字或字母所构成的物体,其傅里叶变换频谱的零频(直流分量)的数值很大,使振幅动态范围增大,结果对振幅的编码产生了一定的困难。类似问题在光学全息中也会产生。为了克服这个困难,计算全息采用了与光学全息相似的方法,加入由计算机产生的随机相位使频谱的振幅分布均匀化^[4],也可以采用限幅法^[5]。由于零频是实数,当对虚部编码时,其值为零。这样零频的消失使动态范围减小,对虚部编码制作的全息图质量将会有所提高。实验结果证实了这一点。

这种全息图最突出的功能是,由于实部、虚部的相位相互错开 90° ,在相位编码的方向上可以采用多路技术将两个物体同时编码在一个全息图上,这时全息图不仅可以分别再现原来的两个物体,而且还可以再现出这两个物体相加和相减后产生的图象,具有一图多用的效果。

若有两个物体 $g(x)$ 和 $f(x)$,我们可以对某个物体频谱实部以及对另一个物体频谱虚部编码,例如,对 $\text{Re}\{\mathcal{F}[g(x-x_0)]\}$ 以及 $I_m\{\mathcal{F}[f(x-x_0)]\}$ 编码,前者相位为 0° 、 180° ,后者相位为 90° 、 270° ,用迂回相位法中 L_∞ 型^[2] 的编码方式,把两者同时编码在一个全息图

上。因此全息图可以同时再现物体 $g(x)$ 的一对厄米对称象以及物体 $f(x)$ 的一对厄米反对称象, 结果为

$$[g(x-x_0) + g^*(-x-x_0)] + [f(x-x_0) - f^*(-x-x_0)] \\ = [g(x-x_0) + f(x-x_0)] + [g(-x-x_0) - f^*(-x-x_0)]^*, \quad (9)$$

即再现出两个物体 g 与 f 相加运算以及相减运算所产生的图象。借助于 Ronchi 光栅的移动, 同一全息图又可以分别再现物体 $g(x)$ 以及 $f(x)$ 。图 1 说明了这种二元相位全息图的多路编码以及再现方式。

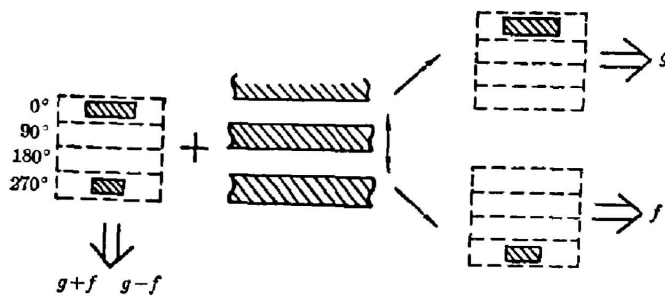


图 1 二元相位计算全息图的多路编码以及再现方式
Fig. 1 Schematic diagram of multiplex coding and reconstruction for CGH of binary phase

文献 [6] 依靠压缩振幅编码方向上的高度制作的多路全息图只能分别再现两个物体, 不能进行两物体之间的相加以及相减运算。因此可以看出二元相位全息图在相位方向上的多路技术比一般全息图在振幅方向上的多路技术具有更多的优点。如果二元相位全息图同时采用振幅和相位两个方向上的多路技术, 借助于在这两个方向上

两个相互垂直的 Ronchi 光栅的移动, 可以进一步扩大多路全息图的功能和应用范围。根据多路二元相位全息图的原理, 我们也可以把多个物体分别制作出对实部以及虚部编码的全息图, 每个全息图除了再现物体的本身图象之外, 若将某物体的实部全息图和另一物体的虚部全息图交迭在一起(或通过成象), 则可以再现这两个物体相加和相减后产生的图象。

对物体的频谱采用二级相位量化也可以制作具有二元相位的计算全息图^[7]。若物体为 $g(x)$, 计算

$$\mathcal{F}[g(x-x_0)] = |G(\mu)| \exp[i\phi(\mu)], \quad (10)$$

并对 $\phi(\mu)$ 进行二级相位量化

$$\hat{\phi}(\mu) = \begin{cases} 0^\circ, & -90^\circ \leq \phi < 90^\circ, \\ 180^\circ, & 90^\circ \leq \phi < 270^\circ, \end{cases} \quad (11)$$

用量化后的 $\hat{\phi}(\mu)$ 对相位编码, 这时全息图再现象为

$$g(x-x_0) + g^*(-x-x_0) + \text{高次假象}. \quad (12)$$

显然二元相位全息图和二级相位量化全息图有着十分相似的条件、特点和结果。但是后者计算了复频谱, 采用了量化手段, 更严重的是产生了由于相位量化而引起的高次假象噪声, 影响了再现象的质量。通过实验比较, 可以清楚地看到这一点。

二、实验结果

实验采用了 Lohmann 提出的迂回相位的编码方法制作计算全息图。在频域的抽样单元 (m, n) 中, 绘制一个黑色矩形, 其高度 A_{mn} 的值正比于该单元中波面的振幅值, 其位置

P_{mn} 的值用来表示该单元中波面的相位值, 其宽度 O 为可以选择的常数。为了使衍射效率最大, 可以选择 $O = \frac{1}{2}$ 。编码方式如图 2 所示。由于我们的全息图具有二元相位的特点, 因此对应的 P_{mn} 的值也具有二元的特点。即对实部(虚部)编码时, 相位 0° 或 180° (90° 或 270°) 对应的 P_{mn} 的值为 0 或 $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$)。如果忽略虚部的因子 i , 则两种情况下 P_{mn} 的值都为 0 或 $\frac{1}{2}$ 。物体抽样点数为 10×20 , 振幅量化级数为 20。

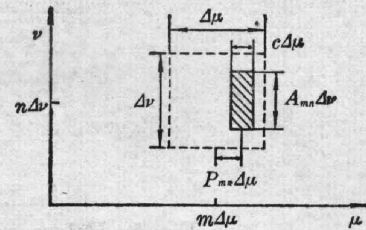


图 2 迂回相位的编码方式
Fig. 2 Schematic diagram of detour phase coding

1. 图象的再现

采用“上”为物体 $g(x, y)$, 沿 y 方向平移为 $g(x, y - y_0)$, y_0 为 5 个抽样点距离。

(1) 对 $\text{Re} \{ \mathcal{F} [g(x, y - y_0)] \}$ 编码, 全息图和再现现象如图 3 所示。

(2) 对 $\text{Im} \{ \mathcal{F} [g(x, y - y_0)] \}$ 编码, 全息图和再现现象如图 4 所示。与图 3 的再现现象相比, 可以看出对虚部编码制作的全息图再现现象质量有所提高。

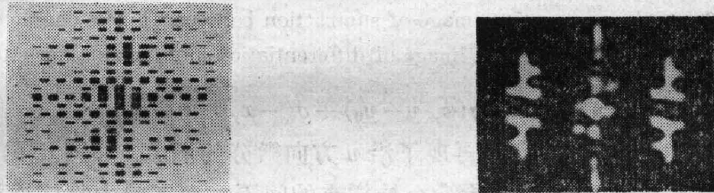


图 3 “上”为物体对实部编码的全息图和再现现象
Fig. 3 Hologram and its reconstruction image with coding real part for object of Chinese character “上”

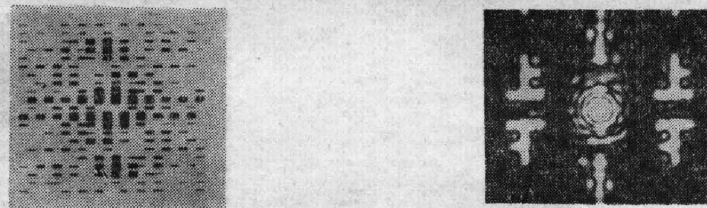


图 4 “上”为物体对虚部编码的全息图和再现现象
Fig. 4 Hologram and its reconstruction image with coding imaginary part for object of Chinese character “上”

(3) 对 $\mathcal{F} [g(x, y - y_0)]$ 进行二级相位量化后再编码, 全息图和再现现象如图 5 所示。可以看到由于相位量化引起的噪声使全息图再现现象质量下降。

2. 图象的相减和微分

(1) 采用“上”为物体 $g(x, y)$, “上”字下面的“-”为物体 $f(x, y)$, 两者构成 $n(x, y)$

$$n(x, y) = g(x, y - y_0) + f(-x, -y - y_0) \tag{18}$$

对 $\text{Im} \mathcal{F} \{ [n(x, y)] \}$ 编码。全息图的再现现象如图 6(a) 所示。

(2) 采用字母“T”为 $g(x, y)$, 取 $n(x, y)$ 为



图5 “上”为物体二级相位量化全息图和再现象

Fig. 5 Hologram and its reconstruction image with two level phase quantization for object of Chinese character “上”



图6 (a) “上”和“-”相减产生的再现象; (b) “T”沿 y 方向微分产生的再现象
Fig. 6 (a) Reconstruction image of subtraction between Chinese character “上” and “-” (b) Reconstruction image of differentiation along y axis for letter “T”

$$n(x, y) = g(x, y - y_0) + g(-x, -y - y'_0) \quad (19)$$

对 $I_m\{\mathcal{F}[n(x, y)]\}$ 编码。全息图再现了沿 y 方向微分的图象, 如图 6(b) 所示。微分边缘较粗是由于 y_0 和 y'_0 的间距至少应为一个抽样点的间隔, 而实验中物体抽样点数太少的缘故。

3. 多路全息图的图象再现

采用字母“F”为 $g(x, y)$, “H”为 $f(x, y)$, 用 Lee 型编码方法将 $\text{Re}\{\mathcal{F}[g(x, y - y_0)]\}$

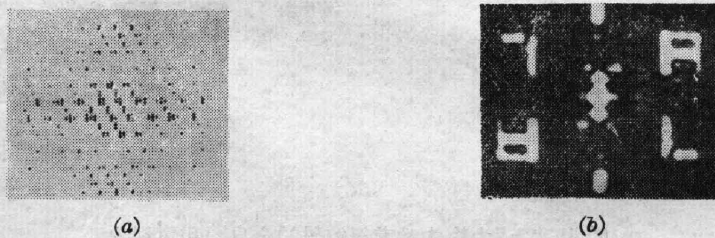


图7 (a) 多路二元相位全息图; (b) “F”和“H”相加, 相减后的再现象
Fig. 7 (a) Hologram of multiplex CGH of binary phase; (b) Reconstruction image of addition and subtraction between letter “F” and “H”



图8 多路二元相位全息图的“F”以及“H”的再现象

Fig. 8 Reconstruction images of multiplex CGH of binary phase for letter “F” and “H”

以及 $I_m\{\mathcal{F}[f(x, y-y_0)]\}$ 编码在一个全息图上,如图 7(a)所示。图 7(b)是全息图直接再现的 $g+f, g-f$ 图象。通过 Ronchi 光栅的移动,同一全息图分别再现出的物体 g, f 如图 8 所示。

三、结 论

通过对二元相位计算全息图的分析以及实验表明,这种全息图具有一些优点:计算上得到了简化,编码和绘制全息图时十分方便。对虚部的编码可以减小振幅的动态范围,提高全息图的质量。利用再现现象具有的厄米运算性质,可以对图象作相加和相减处理。采用多路编码技术进一步扩大了这种全息图所具有的功能。但是,除了多路二元相位全息图外,二元相位全息图是以牺牲一半的有效物体空间为代价的。还可期望,这种全息图将会有一些新的应用。

对于范传州同志在工作中给予的帮助,在此表示谢意。

参 考 文 献

- [1] B. B. Brown, A. W. Lohmann *et al.*; *Appl. Opt.*, 1966, **5**, No. 6 (Jun), 967.
- [2] W. H. Lee; *Appl. Opt.*, 1970, **9**, No. 3 (Mar), 639.
- [3] C. B. Burckhardt; *Appl. Opt.*, 1970, **9**, No. 8 (Aug), 1949.
- [4] H. Akahori; *Appl. Opt.*, 1973, **12**, No. 10 (Oct), 2336.
- [5] A. W. Lohmann, D. P. Paris; *Appl. Opt.*, 1967, **6**, No. 10 (Oct), 1739.
- [6] H. Bartelt; *Opt. Comm.*, 1977, **23**, No. 2 (Nov), 203.
- [7] W. J. Dallas; *Appl. Opt.*, 1971, **10**, No. 3 (Mar), 674.

Computer generated holograms of binary phase*

GONG JIANMIN

(Department of Physics, University of Science and Technology of China)

(Received 20 November 1981)

Abstract

A method for making computer generated hologram (CGH) with coding the real or imaginary part of the Fourier transformation spectrum of an object are proposed. The author shows that multiplex technique is applicable to this kind of hologram in the direction of phase coding, therefore one hologram provides many functions. Experimental results are given in this paper.

* Post-graduate under guidance of Ho Yuping, Xie Jianping