

正弦形和矩形浅槽光栅的衍射效率

陈南滇

(上海工业自动化仪表研究所)

提 要

本文描述了理想导体正弦形光栅和矩形光栅的衍射效率与入射角之间的近似关系。文章的分析是从电磁场理论入手,解边界条件方程式,作出一些近似使解简化,在一定的条件下得到它们之间的复杂关系的近似解。

一、引 言

对于许多用在紫外谱线范围的轮廓深度浅的由理想导体所构成的光栅,严格的电磁场理论计算表明 P 偏振光和 S 偏振光的衍射效率是近乎相等的,并且它们的衍射效率对波长的关系也不存在 Wood 反常现象。在这种情况下,光栅的衍射场就可以不必采用严格的电磁场理论求解;对于二个方向的偏振光,只要讨论平行于光栅槽向的 P 偏振光就够了。Loewen^[1] 对这类光栅进行了近似理论的分析,得到的结果与严格的电磁场理论的解是一致的。但是 Loewen 仅仅讨论了在正向入射时衍射场的效率问题。本文则进一步推广,从电磁场理论入手,求解光栅在非正向入射时的衍射场和衍射效率的近似解。

二、光栅的边界条件方程式

设衍射光栅如图 1 所示的形状,我们假定它是由理想导体所构成的,光栅常数为 l ,轮廓曲线的深度为 h ,光栅轮廓曲线函数可以写成 $z = hg(x)$,其中 $g(x)$ 是光栅轮廓曲线的归一化函数。设平面入射场是 TE 波

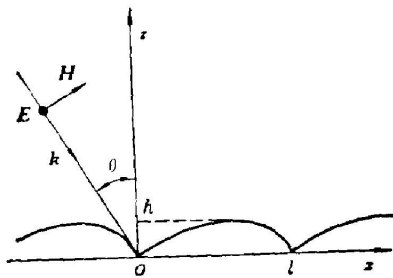


图 1 光栅示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the grating

$$E^{(i)} = \mathbf{j} \exp [ik(x \sin \theta - z \cos \theta)],$$

其中 θ 是入射角, \mathbf{j} 是 y 轴的单位矢量, $k = 2\pi/\lambda$ 。这里我们已经将入射场归一化了,其振幅为单位值。由于光栅是属于周期性结构的边界状态,可以由 Rayleigh 级数^[3~5] 将光栅衍射场展开成下面的形式

$$E^{(d)} = \mathbf{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp(ik'z) \cdot \exp[i(k_x + 2\pi n/d)x], \quad (1)$$

其中 $k' = \sqrt{k^2 - (k_x + 2\pi n/d)^2}$, $k_x = k \sin \theta$ 。按照电磁场理论,切线电场分量的边界条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp(in\omega x) \exp[ihg(x)\sqrt{k^2 - (k_x + 2\pi n/l)^2}] = -\exp[-ihkg(x)\cos\theta], \quad (2)$$

其中 $\omega = 2\pi/l$ 。将(2)式中的根式以级数展开取二项,并考虑到在紫外谱线范围内,入射场的波长较短,并且要求的衍射效率是在 $n = -1$ 的情况下, $n^2\lambda^2/l^2$ 项可以略去,于是得到

$$h\sqrt{k^2 - (k_x + 2\pi n/l)^2} \approx \Theta[1 - (\sin^2\theta + 2\lambda n \sin\theta/l)/2], \quad (3)$$

其中 $\Theta = hk$ 。将(3)式代入(2)式中,化简后边界条件方程式为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp[i(n\omega x - \lambda\Theta \sin\theta ng(x)/l)] = -\exp[-ig(x)\Theta(1 - \sin^2\theta/2 + \cos\theta)]. \quad (4)$$

(4)式是从电磁场理论出发,考虑了光栅边界条件,并经过一些近似之后得到的。其中 R_n 就是我们所要求的各级衍射场的模。这个方程式的严格解是很复杂的;但是,经过适当的处理后可以求其近似解,从而得到各级衍射场以及衍射效率和入射角之间的关系。

三、正弦形反射光栅

正弦形反射光栅的归一化轮廓曲线函数是 $g(x) = \sin\omega x$, 于是就得到正弦形反射光栅的边界条件方程式

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp[i(n\omega x - \lambda\Theta \sin\theta/l \cdot n \sin\omega x/2)] \\ = -\exp[-i\Theta \sin\omega x/2(1 - \sin^2\theta/2 + \cos\theta)]. \end{aligned} \quad (5)$$

设有一组正交函数系 $l^{in\bar{\omega}x}$, 其中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\bar{\omega} = 2\pi/l$, l 是周期。将(5)式二边乘上正交函数系的共轭函数,并对整个周期积分

$$\begin{aligned} \int_0^l \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m \exp[i(m\omega x - \lambda\Theta \sin\theta/l \cdot m \sin\omega x/2)] \exp(-in\bar{\omega}x) dx \\ = - \int_0^l \exp[-i\Theta \sin\omega x/2(1 - \sin^2\theta/2 + \cos\theta)] \exp(-in\bar{\omega}x) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式的左边指数部分为 $im\omega x(1 - \lambda\pi \sin\theta/l \cdot \sin\omega x/\omega x)$, 由于 $\sin\omega x = \sin\omega x/\omega x \leq 1$, $\sin\theta \leq 1$, 并且对于正弦形反射光栅的近似解只有在条件 $hl \leq 0.1$ 时,才能得到与电磁场理论精确解一致的结果^[9]。因此,第二项指数部分相对于第一项指数部分是一个小量,我们取近似 $\sin\omega x \approx \omega x$ 。并令 $\bar{\omega} = \omega(1 - \lambda\Theta \sin\theta/2l)$ 。将它们代入(6)式的积分方程中,使用函数系的正交性,立即可以得到在平面波场倾斜入射时的各级衍射场的模

$$R_n = -\frac{1}{l} \int_0^l \exp[-i\Theta \sin\omega x/2(1 - \sin^2\theta/2 + \cos\theta) - in\bar{\omega}x] dx. \quad (7)$$

由于入射场已经是归一化了,故可以得到正弦形反射光栅的衍射效率与入射角之间的关系式

$$\eta_{-1} = \left| \frac{1}{l} \int_0^l \exp\left\{i\left[\bar{\omega}x - \frac{\Theta \sin\omega x}{2} \left(1 - \frac{\sin^2\theta}{2} + \cos\theta\right)\right]\right\} dx \right|^2. \quad (8)$$

下面是入射场的波长分别为 0.1μ , 0.2μ 和 0.3μ 时,计算三种理想导体正弦形反射光栅的衍射效率与入射角之间的关系所得的曲线图:

(1) $h = 0.02\mu$, $l = 1.25\mu$ 的光栅。

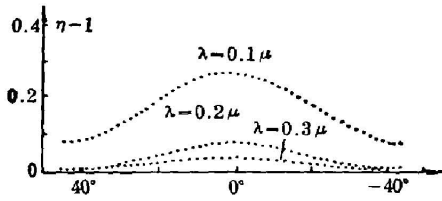


图2 $h=0.02\mu, l=1.25\mu$ 正弦形光栅的衍射效率与入射角的关系

Fig. 2 Efficiency curves for a sinusoidal grating ($h=0.02\mu, l=1.25\mu$) at various incident angles

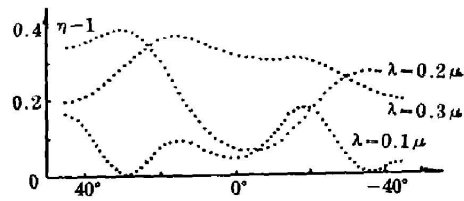


图3 $h=0.02\mu, l=3.33\mu$ 正弦形光栅的衍射效率与入射角的关系

Fig. 3 Efficiency curves for a sinusoidal grating ($h=0.02\mu, l=3.33\mu$) at various incident angles

从图2可以看出, 曲线呈 Gauss 型分布, 波长短衍射效率高, 入射角愈大衍射效率就愈低, 最大衍射效率处在正向入射处。

(2) $h=0.05\mu, l=3.33\mu$ 的光栅。

从图3可以看到光栅的衍射效率随着入射角变化较大, 最大效率不处在正向入射处。

(3) $h=0.1\mu, l=3.33\mu$ 的光栅。

图4所对应的各条曲线告诉我们, 在短波长入射时, 衍射效率的极大值位于较大的入射角, 在较长波长入射时, 衍射效率的极大值处在正向入射的附近。

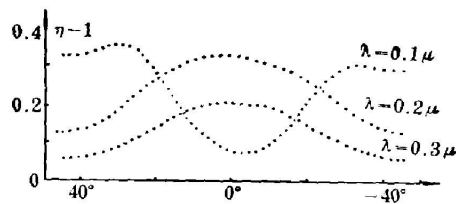


图4 $h=0.1\mu, l=3.33\mu$ 正弦形光栅的衍射效率与入射角的关系

Fig. 4 Efficiency curves for a sinusoidal grating ($h=0.1\mu, l=3.33\mu$) at various incident angles

四、矩形反射光栅

设矩形反射光栅由理想导体所构成, 轮廓深度为 h , 槽宽是 a , 光栅常数为 l , 如图5所示。归一化矩形轮廓曲线函数可以写为

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{Rect}\left(\frac{x - ml + a/2}{a}\right), \tag{9}$$

将(9)式代入(5)式中就得到矩形反射光栅的边界条件方程式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp\left\{i\left[n\alpha x - \frac{n\lambda\theta \sin\theta}{l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{Rect}\left(\frac{x - ml + a/2}{a}\right)\right]\right\} = -\exp\left[-i\theta(1 - \sin^2\theta/2 + \cos\theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{Rect}\left(\frac{x - ml + a/2}{a}\right)\right]. \tag{10}$$

这个方程式满足光栅边界面上任何一点, 因此可以在矩形光栅上取一个周期考察一下, 于是有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp(in\omega x) = 1, \quad \text{当 } 0 \leq x \leq a \text{ 时}, \quad (11a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp\left[i\left(n\omega x - \frac{n\lambda\theta \sin\theta}{l}\right)\right] = -\exp\left[-i\theta\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{2} + \cos\theta\right)\right],$$

当 $a \leq x \leq l$ 时, (11b)

引入符号:

$$\psi = \lambda\theta \sin\theta/l, \quad \Delta = \theta\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{2} + \cos\theta\right).$$

将(11a)二边乘上 $\exp(-in'\psi)$, 其中 n' 表示其值与 n 相等, 但是不属于累加符号。于是(11a)式变成

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp[i(n\omega x - n'\psi)] = -\exp(-in'\psi) \quad (0 \leq x \leq a), \quad (12)$$

我们再来考察一下(11b)式, 左边的指数部分, 第一项是 $n\omega x = 2\pi n x/l$, 第二项是 $n\psi = 2\pi n h \sin\theta/l$ 。对于矩形反射光栅, 其近似解只有在条件 $h/l \leq 0.05$ 下才能得到与电磁场理论的精确解相一致^[9]。因此在 $h/l \leq 0.05$ 以及 $x/l \geq 0.5$ (矩形光栅的槽宽度为光栅常数之一半时, 衍射效率才能达到极大值^[6]) 场合下, 显然有 $x/l \gg h \sin\theta/l$ 。于是我们可以再作出近似变换令 $n\omega x - n\psi \approx n\omega x - n'\psi$, 于是(11b)式就可写成

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp[i(n\omega x - n'\psi)] = -\exp(-i\Delta), \quad (13)$$

解(12)、(13)联立方程组, 就可以得到衍射场的模*

$$R_n = \frac{2}{in\pi} \exp\left[-i\frac{n\omega a + \Delta - n\psi}{2}\right] \cdot \sin \frac{n\omega a}{2} \sin \frac{\Delta - n\psi}{2}, \quad (14)$$

矩形反射光栅的衍射效率

$$\eta_{-1} = \frac{4}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi a}{l} \sin^2 \left\{ \pi h \left[\frac{1 - \sin^2\theta/2 + \cos\theta}{\lambda} + \frac{\sin\theta}{l} \right] \right\}, \quad (15)$$

(15) 式描述了凡满足条件 $h/l \leq 0.05$ 的, 矩形反射光栅的衍射效率与入射角之间的近似关系。

下面举一个例子, 并与 Loewen 所举的完全一样的例子进行比较。光栅常数 $l = 0.83 \mu$, 入射场的波长 $\lambda = 0.1216 \mu$, 槽深 $h = 0.015 \mu$, 槽宽 $a = 0.405 \mu$ 。

从表 1 可以看到, 用(15)式计算所得到的结果, 在 $\theta \leq 50^\circ$ 内的精确度是令人满意的。

表 1

θ (度)	η_{-1}	Loewen's η_{-1}	θ (度)	η_{-1}	Loewen's η_{-1}
0	0.1981	0.1966	50	0.1165	0.1103
10	0.1974	0.1961	60	0.0880	0.0778
20	0.1874	0.1854	70	0.0620	0.0467
30	0.1692	0.1670	80	0.0407	0.0214
40	0.1446	0.1404	85	0.0321	0.0104

* 推导过程中利用关系式 $1 - \exp(-ix) = 2 \sin x/2 \exp[i(\pi/2 - x/2)]$

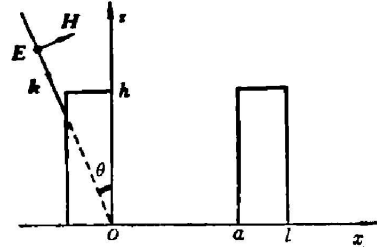


图 5 矩形反射光栅示意图

Fig. 5 Schematic diagram of lamellar reflection grating

五、结 束 语

对理想导体正弦形和矩形反射光栅的 P 偏振光的衍射场和衍射效率与入射角之间的关系作出了理论上的讨论。由于在解边界条件方程式时取了一些近似, 因此所得到的结果必须满足一定的条件: 正弦形光栅应当在 $h/l \leq 0.1$, 矩形光栅应当满足 $h/l \leq 0.05$, 以及入射场必须是紫外谱线; 显然, 近似一定会带来误差。当入射角不太大时, 精度还是可以的; 一旦入射角很大时, 偏差就比较大, 但是衍射效率与入射角之间的关系曲线的弯曲倾向还是具有参考意义的。

参 考 文 献

- [1] B. Petit; *«Electromagnetic Theory of Gratings»* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980), 15~19.
- [2] E. G. Loemen, M. Neviere *et al.*; *J. O. S. A.*, 1978, **68**, No. 4 (Apr), 496.
- [3] L. Rayleigh; *«Theory of Sound»* (Dover Publications, New York, 1945), Sec. 272a.
- [4] B. A. Lippman; *J. O. S. A.*, 1953, **43**, No. 5 (May), 408.
- [5] M. Neviere, M. Cadilhac *et al.*; *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, 1973, **AP-21**, No. 1 (Jan), 37.
- [6] E. G. Loewen, M. Neviere *et al.*; *«Efficiency Optimization of Rectangular Groove Grating in Visible and IR Regions»* (Unpublished).

Diffraction efficiency of sinusoidal grating and lamellar one with shallow groove

CHEN NANDIAN

(Shanghai Institute of Process Automation Instrumentation)

(Received 26 October 1981, revised 31 May 1982)

Abstract

The article describes the approximate relation between incident angle and diffraction efficiency of the perfectly conducting sinusoidal grating and the lamellar one. The analysis in the article starts with electromagnetic theory. Solving the boundary condition equation of electromagnetic field, we give some approximation in order to make the equation solved easily; as a result, their complicated relation can be obtained under certain circumstances.