

阶跃单模光纤的色散

周文俊
(武汉邮电科学研究院)

提 要

本文推导出圆对称折射率剖面单模光纤的完整色散公式。精确计算了阶跃单模光纤在不同参数下的总色散,并与国外有关测量结果^[1]进行了比较。特别研究了阶跃单模光纤在 $1.3\mu\text{m}$ 和 $1.55\mu\text{m}$ 两个低损耗窗口处的色散行为。整个计算工作是在DJS-8计算机上完成的。

一、前 言

众所周知,单模光纤具有两个重要的特征参数:一是损耗系数,一是色散系数。前者表示该波导对通过其中传播的信号能量的损耗大小,后者则表示波导对通过其中的信号的畸变程度。当然,要使信号通过波导完全没有损耗和畸变是不可能的。但是,要使通过单模光纤的光信号损耗和畸变最小,则是可能的。这也是我们感兴趣的问题。

制造单模光纤的材料多用掺锗熔融石英。对这种材料损耗特性的研究表明,由于材料的瑞利散射、红外和紫外吸收,还有OH离子等的共振吸收,使其呈现若干低损耗窗口,例如在 $1.3\mu\text{m}$ 波长处和 $1.55\mu\text{m}$ 处的低损耗窗口。这样就可以利用选择工作波长来使得通过单模光纤的光信号损耗最小。1979年日本NTT通信研究所已制出在 $1.55\mu\text{m}$ 波长处损耗低达 0.2db/km 的单模光纤^[2],接近其理论损耗极限值 0.18db/km 。至于单模光纤的色散问题则比较复杂,既涉及到纤维材料的色散特性,又与光纤的径向归一化传播常数 w 及其导数 dw/dv 和 d^2w/dv^2 有关。

本文推导了单模光纤的完整色散公式。这个公式普遍适用于满足弱传导条件的任意圆对称折射率剖面单模光纤。此公式在不同的近似情况下还可以分别得到Gambling等人^[3]和井元信之等人^[3]给出的结果。同时,利用所推得的公式对阶跃单模光纤的色散行为进行研究。 w 与 v 的关系由解超越方程得到;与波长有关的各光纤参数由Sellmeier公式计算。根据Miya等人^[4]给出的参数计算了 0.2db/km 的极低损耗单模光纤在 $1.55\mu\text{m}$ 波长处的色散,结果与该光纤的实验测量值很相一致。我们特别研究了阶跃单模光纤在 $1.3\mu\text{m}$ 和 $1.55\mu\text{m}$ 这两个低损耗窗口处的色散行为,为阶跃单模光纤的最佳设计提供了有用资料。

二、色散公式的推导

首先写出群时延 τ 的表达式

收稿日期:1981年10月30日

$$\tau = d\beta / cdk, \quad (1)$$

式中 c 是真空中光速, β 是传播常数, k 是真空中波数。

由 Gloge 定义的无量纲参数 $b^{[4]}$ 有

$$b = w^2 / \nu^2 = (\beta^2 - k^2 n_c^2) / (k^2 n_m^2 - k^2 n_c^2), \quad (2)$$

式中 n_m 是光纤芯中的最大折射率, n_c 是包层折射率。由 (2) 式可以得到 β 的如下表达式

$$\beta = [k^2 n_c^2 + k^2 (n_m^2 - n_c^2) b]^{1/2}. \quad (3)$$

再将 (3) 式代入 (1) 式即可得到

$$\tau = [n_c N_c + (n_m N_m - n_c N_c) H] [n_c^2 + (n_m^2 - n_c^2) b]^{-1/2} c^{-1}, \quad (4)$$

在 (4) 式中有

$$H = d(w^2) / d(\nu^2), \quad N_m = d(kn_m) / dk, \quad N_c = d(kn_c) / dk. \quad (5)$$

顺便指出, 在 (4) 式的推导中, 用了下面两个关系 $(n_m^2 - n_c^2) b = \nu^2 b / k^2 r^2$ 和 $d(\nu^2) / dk = 2r^2 k (n_m N_m - n_c N_c)$ 。以上各式中, ν 是光纤的归一化频率, 定义为 $\nu = kr n_c \sqrt{2\Delta}$, 其中 r 是纤芯半径, Δ 是相对折射率差, 并在本文中定义为 $\Delta = (n_m^2 - n_c^2) / 2n_c^2$ 。

将 (4) 式对波长求导数, 经过一系列的运算并整理就可以得到下面的色散公式

$$S = d\tau / d\lambda = S_m + S_w + S_d, \quad (6)$$

式中 S_m 是材料色散, S_w 是波导色散, S_d 是剖面色散, 分别表示如下

$$\left. \begin{aligned} S_m &= -\frac{\lambda}{c} \left[\frac{n_m}{n_c} \frac{d^2 n_m}{d\lambda^2} H + \frac{d^2 n_c}{d\lambda^2} (1-H) \right] (1+2\Delta b)^{-1/2}, \\ S_w &= -\frac{n_c \Delta}{c\lambda} A (G+4\Delta E) (1+2\Delta b)^{-3/2}, \\ S_d &= \frac{n_c}{c} \frac{d\Delta}{d\lambda} \left[4\nu^2 K B + 4\Delta \left(BE - \frac{\lambda}{4\Delta} \frac{d\Delta}{d\lambda} \frac{1-b}{1+2\Delta} H \right) \right] (1+2\Delta b)^{-3/2}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 H 、 G 、 E 、 K 都是 ν 的函数, A 、 B 则为 n_c 、 Δ 和 λ 的函数, 它们分别定义如下:

$$\left. \begin{aligned} G &= 4\nu^2 K - 2(H-b), \quad K = \frac{d^2(w^2)}{d(\nu^2)^2}, \quad E = 2\nu^2 K b - H(H-b), \\ A &= (1 - \lambda dn_c / n_c d\lambda)^2, \quad B = (1 - \lambda dn_c / n_c d\lambda - \lambda d\Delta / 4\Delta d\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

此外, 由 (5) 和 (8) 式不难得到

$$4\nu^2 K = \nu d^2(b\nu) / d\nu^2 + d(b\nu) / d\nu - b, \quad H = \frac{1}{2} [d(\nu b) / d\nu + b], \quad G = \nu d^2(b\nu) / d\nu^2, \quad (9)$$

注意到, 在 (7) 式中, 如果忽略括号中 Δ 项的影响, 恰好就简化成 Gambling 等人^[5] 给出的色散公式

$$\left. \begin{aligned} S_m &= -\frac{\lambda}{c} \left[\frac{d^2 n_m}{d\lambda^2} H + \frac{d^2 n_c}{d\lambda^2} (1-H) \right], \\ S_w &= -\frac{n_c \Delta}{c\lambda} G \left(1 - \frac{\lambda}{n_c} \frac{dn_c}{d\lambda} \right)^2, \\ S_d &= \frac{n_c}{c} \frac{d\Delta}{d\lambda} (G+2H-2b) \left(1 - \frac{\lambda}{n_c} \frac{dn_c}{d\lambda} - \frac{\lambda}{4\Delta} \frac{d\Delta}{d\lambda} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

如果再作进一步的近似, 认为 $A \approx B \approx 1$, 就可以得到井元信之等人^[6] 所用的色散公式

$$\left. \begin{aligned} S_m &= -\frac{\lambda}{c} \left[\frac{d^2 n_m}{d\lambda^2} H + \frac{d^2 n_c}{d\lambda^2} (1-H) \right], \\ S_w &= -\frac{n_c \Delta}{c\lambda} G, \quad S_d = \frac{n_c}{c} \frac{d\Delta}{d\lambda} (G+2H-b). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

一般情况下,上面二组近似公式都有一定精度,但要精确计算单模光纤的色散,特别是在确定零色散条件时,必须应用本文给出的完整色散公式。在此公式的推导过程中未作任何近似,故可适用于具有任意圆对称折射率剖面的弱传导单模光纤。

三、数值计算及结果

由色散公式(7)可以看到,等式右端诸量可以分成两大类:一类仅与光纤的归一化频率 ν 有关,如 b 、 H 、 G 、 E 、 K 等;另一类则直接与 λ 有关,如 n_c 、 m_m 、 Δ 及它们的导数。下面我们将分别加以处理。

1. 与 ν 有关的量

对一般单模光纤, w 与 ν 之间的对应关系必须通过求解标量波动方程得到;但对阶跃单模光纤, w 与 ν 之间的关系可由基模(LP_{01} 模)的色散方程确定,

$$wK_1(w)/K_0(w) = uJ_1(u)/J_0(u) \quad (12)$$

式中 J_0 、 J_1 分别是零阶和一阶的第一类 Bessel 函数, K_0 、 K_1 则为零阶和一阶的第二类修正 Bessel 函数,再利用光纤径向归一化传播常数 u 、 w 和归一化频率之间的关系 $u^2 + w^2 = \nu^2$, 则从(12)式就可得到下面的超越方程

$$\frac{wK_1(w)}{K_0(w)} - \frac{\sqrt{\nu^2 - w^2} J_1(\sqrt{\nu^2 - w^2})}{J_0(\sqrt{\nu^2 - w^2})} = 0. \quad (13)$$

对于给定的 ν 值,我们用二分法求解上面的超越方程,其中的 Bessel 函数用相应的多项式表示^[5]。 w 值的计算精度约为 10^{-7} 。在求得 w^2 与 ν^2 之间的关系后,进一步用等距节点数值微分公式^[6]计算相应的 H 、 K 等的数值

$$H(\nu_i) = [w^2(\nu_{i+1}) - w^2(\nu_{i-1})][2(\nu_{i+1}^2 - \nu_i^2)]^{-1}, \quad (14)$$

$$K(\nu_i) = [w^2(\nu_{i+1}) - 2w^2(\nu_i) + w^2(\nu_{i-1})][\nu_{i+1}^2 - \nu_i^2]^{-2}. \quad (15)$$

这样所求得的一阶和二阶导数的精度约为步长 $(\nu_{i+1}^2 - \nu_i^2)$ 的平方。若取步长 $\nu_{i+1}^2 - \nu_i^2 = \nu_i^2 - \nu_{i-1}^2 = 0.02405$, 则 H 和 K 的计算误差约为 6×10^{-4} 。要能达到这样的精度,对 w^2 的计算必须更为精确,这正是我们设法精确计算 w 的原因。通常计算单模光纤的总色散时,总是出现较大误差,除了所用色散公式的近似外, w 值(或 b 值)的计算精度不够也是一个重要的原因。

2. 与 λ 有关的量

色散公式中与 λ 有关的各量可以通过 Sellmeier 公式来计算

$$n_o = \left(1 + \sum_{i=1}^3 \frac{a_i \lambda^2}{\lambda^2 - b_i} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n_m = \left(1 + \sum_{i=1}^3 \frac{a_i^* \lambda^2}{\lambda^2 - b_i^*} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

式中的 a_i 、 b_i 和 a_i^* 、 b_i^* 分别为没有掺杂和有掺杂的熔融石英的 Sellmeier 系数, λ 是工作波长。Kobayash 等人^[7]对掺锗和掺硼熔融石英的 Sellmeier 系数进行了精确测量。知道了

某个掺杂浓度下的 Sellmeier 系数, 则相应的与 λ 有关的诸量都不难通过(16)式推导出来

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn_c}{d\lambda} &= -\frac{\lambda}{n_c} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i b_i}{(\lambda^2 - b_i)^2}, \\ \frac{dn_m}{d\lambda} &= -\frac{\lambda}{n_m} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i^* b_i^*}{(\lambda^2 - b_i^*)^2}, \\ \frac{d^2 n_c}{d\lambda^2} &= \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{n_c} \frac{dn_c}{d\lambda} \right) \frac{dn_c}{d\lambda} + 4 \frac{\lambda^3}{n_c} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i b_i}{(\lambda^2 - b_i)^3}, \\ \frac{d^2 n_m}{d\lambda^2} &= \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{n_m} \frac{dn_m}{d\lambda} \right) \frac{dn_m}{d\lambda} + 4 \frac{\lambda^3}{n_m} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i^* b_i^*}{(\lambda^2 - b_i^*)^3}, \\ \Delta &= (n_m^2 - n_c^2) / 2n_c^2, \\ \frac{d\Delta}{d\lambda} &= \frac{n_m}{n_c^2} \frac{dn_m}{d\lambda} - \frac{n_m^2}{n_c^2} \frac{dn_c}{d\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由于 Kobayashi 等人仅给出了掺锗浓度为 3.1 mol%、3.5 mol%、5.8 mol%、7.9 mol% 熔融石英的 Sellmeier 系数, 对于在这中间任意浓度的 Sellmeier 系数, 采用三次样条函数插值法^[8,9] 求出。

3. 计算结果

根据 Miya 等人^[4] 给出的在 $1.55 \mu\text{m}$ 处极低损耗单模光纤的参数 ($n_m - n_c = 0.0028$, $r = 4.7 \mu\text{m}$, $\lambda_c = 1.10 \mu\text{m}$), 用上述公式计算得到该光纤的总色散为 $1.613 \text{ ps}/\text{\AA} \cdot \text{km}$, 而 Miya 等人实验测量的结果为 $1.7 \text{ ps}/\text{\AA} \cdot \text{km}$, 两者符合较好。对于尚存的细小差别, 我们将在讨论中试作解释。

我们特别研究了阶跃单模光纤在 $1.3 \mu\text{m}$ 和 $1.55 \mu\text{m}$ 两个低损耗窗口处的色散行为, 见图 1 和图 2。

图中虚线表示非单模工作区, 因该处 ν 值已超过次低阶的 LP_{11} 模的归一化截止频率 2.40483。图 2 中的符号“ Δ ”表示 Miya 等人对其极低损耗单模光纤色散的测量值, 符号“ \circ ”表示根据该光纤参数计算的色散值。

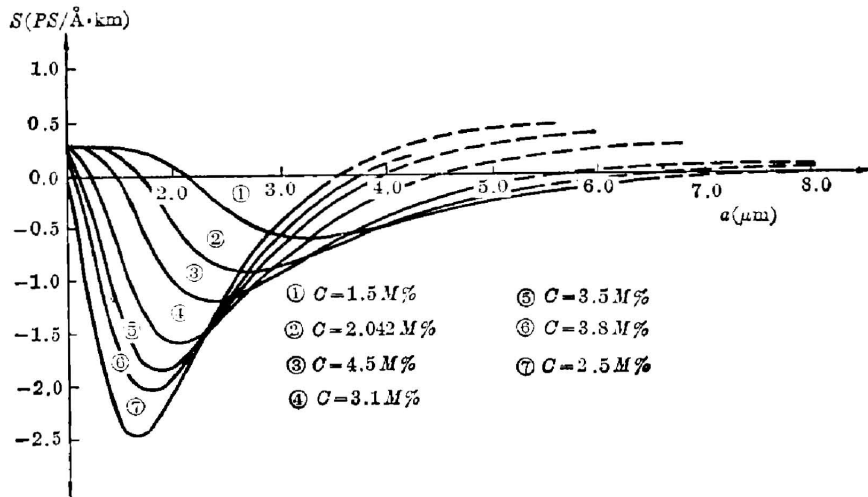


图 1 $\lambda = 1.30 \mu\text{m}$ 处阶跃单模光纤色散随纤芯半径的变化 (C 表示芯部掺锗浓度)

Fig. 1 Dependence of dispersion in step-index single-mode fiber on radius of the fiber at $\lambda = 1.30 \mu\text{m}$ ($C = \text{Ge-doped concentration in fiber center}$)

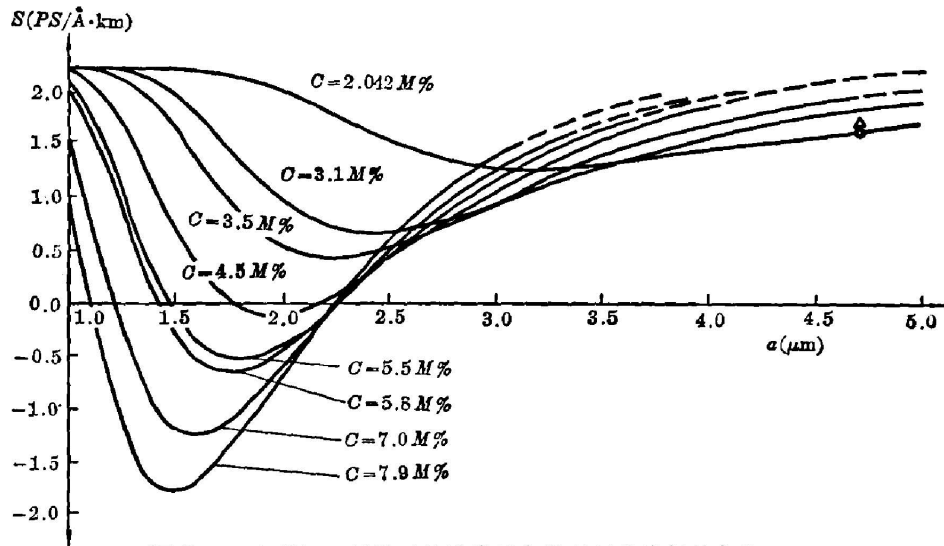


图 2 $\lambda=1.55 \mu\text{m}$ 处阶跃单模光纤色散随纤芯半径的变化

Fig. 2 Dependence of dispersion in step-index single-mode fiber on radius of the fiber at $\lambda=1.55 \mu\text{m}$ (C =Ge-doped concentration in fiber center)

由图 1 和图 2 可以看出:

(1) 掺锗浓度越小, 色散曲线随光纤半径的变化越平缓; 随着掺锗浓度的增高, 色散曲线特别是在零色散点附近变得更为陡峭。当要求色散不超过某个范围时, 曲线变化越陡则对光纤半径控制的要求也越高。

(2) 掺杂浓度低到一定程度时, 无论怎样改变光纤的拉制半径也得不到零色散点, 如上面所说的极低损耗单模光纤就是一例。因此在设计单模光纤时, 必须首先选择合适的纤芯掺杂浓度, 然后再根据色散曲线确定光纤拉制的零色散半径。

(3) 在适当的掺杂浓度下, 一般存在两个零色散半径。应取较大的零色散半径进行拉制, 其理由为一是制造方便, 二是在保证单模传输的前提下, 较大的 ν 值将有利于能量在光纤芯中的传输, 使损耗减小。

从图 2 中还可以看出, 在 $1.55 \mu\text{m}$ 的最低损耗窗口处, 掺杂浓度可选择的范围较大, 但零色散半径的值都在 $2.23 \mu\text{m}$ 附近。若掺杂浓度太小, 则零色散处的 ν 值较小, 能量传输损耗将增大; 反之, 若掺杂浓度太大, 则色散曲线很陡, 光纤的控制半径不好就会使色散大大增加。因此参数选择必须合适。表 1 给出了在两个低损耗窗口处的阶跃单模光纤的二组设计参数

表 1 阶跃单模光纤的两组设计参数

$\lambda=1.30 \mu\text{m}$	$\lambda=1.55 \mu\text{m}$
$C=3.8$	$C=7.9$
$\Delta=0.42\%$	$\Delta=0.74\%$
$r=3.75 \mu\text{m}$	$r=2.23 \mu\text{m}$

四、讨 论

(1) 对色散的理论计算与国外测量结果间的细小差别试作解释。据知, 该极低损耗单

模光纤系用 MCVD 法制造, 一般具有中央凹陷和双肩下滑的特征。用变分-有限元法对这类光纤 LP₁₁ 模的归一化截止频率的计算表明, 其 V_c 值略大于理想阶跃单模光纤的 V_c 值 2.40483。Miya 等人测得该光纤的截止波长 $\lambda_c = 1.10 \mu\text{m}$, 不难算出其归一化截止频率

$$\nu_c = (2\pi r/\lambda) \sqrt{n_m^2 - n_c^2} = 2.4153,$$

这表明该光纤的确存在某些缺陷。我们认为, 这些缺陷是产生上述色散的理论计算与测量之间细小差别的重要原因。

(2) 从图 1 和图 2 可以得到启示, 在某个掺杂浓度下的阶跃单模光纤, 只要其半径在零色散半径附近摆动, 其总色散因各段互补也可以很小。这个结论可能会给单模光纤的制造工艺带来方便。

(3) ν 值的影响。对于阶跃单模光纤, 基模(LP₀₁ 模)在芯中和包层中能量 E_c , E_s 的分配比为

$$\frac{E_c}{E_s} = \frac{\int_0^1 J_0^2(ur) r dr}{[J_0^2(u)/K_0^2(w)] \int_1^\infty K_0^2(wr) r dr} = \frac{\int_0^1 J_0(x) x dx}{[u^2 J_0^2(u)/w^2] \int_w^\infty [K_0^2(x)/K_0^2(w)] x dx} \quad (18)$$

由于 u , w , w/u 都随 ν 值单调下降, 不难看出 E_c/E_s 将随着 ν 值的增大而增加。换言之, 越是远离截止点, ν 值越大则能量越集中于光纤芯部, 对能量的传输也越有利, 耗损也越小。反之, 在近截止处工作则能量分散于包层之中, 我们可以利用后一点, 使阶跃光纤的 ν 值略大于 2.40483 处工作, 如取 $\nu = 2.6$, 这时次低阶的 LP₁₁ 模工作于近截止处, 其能量分散于包层之中, 我们可通过增大包层的材料损耗使 LP₁₁ 模随着传输距离的增大而迅速衰减, 最终仍能得到单模传输。这时, 光纤实际上起着滤模器的作用。

(4) 通常说的零色散点是指一级色散系数为零的情况。实际上, 在一级零色散处还存在二级色散等高级色散。这一点从群时延的展开式可以看到

$$\tau_g = c d\beta/dk = \tau|_{\lambda_0} + (d\tau/d\lambda)|_{\lambda_0} \delta\lambda + ds/2d\lambda (\delta\lambda)^2 + \dots, \quad (19)$$

式中 λ_0 是中心工作波长。由于起主要作用的是一级色散, 高级色散项可以忽略, 故未予考虑。

武汉邮电科学研究院杨恩泽总工程师和武汉大学张延昌教授为本文提供了有关资料, 在此谨致谢意。

参 考 文 献

- [1] T. Miya, Y. Terunuma et al.; *Electron. Lett.*, 1979, **15**, No. 4 (Feb), 106.
- [2] W. A. Gambling et al.; *Electron. Lett.*, 1979, **15**, No. 15 (Jul), 474.
- [3] N. Imoto et al.; *Rev. Electr. Commun. Lab.*, 1979, **27**, (Jul-Aug), 515.
- [4] D. Gloge; *Appl. Opt.*, 1971, **10**, No. 11 (Nov), 2442.
- [5] M. Abramovitz, I. A. Stegun; *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1970).
- [6] 冯康等编;《数值计算方法》, (国防工业出版社, 1978), 20.
- [7] S. Kobayashi et al.; IOOC'77, (Tokyo, July 1977), B8-3.
- [8] 《数学手册》编写组;《数学手册》, (人民教育出版社, 1979), 894.
- [9] 中国科学院沈阳计算技术研究所等编;《电子计算机常用算法》, (科学出版社, 1976), 35, 304.

The dispersion in step-index single-mode fibers

ZHOU WENJUN

(Wuhan Post and Telecommunications Research Institute)

(Received 30 October 1981)

Abstract

The general dispersion formula of the single-mode fiber with symmetric index profile is derived in this paper. Total dispersion of step-index single-mode optical fiber with various parameters is calculated accurately, and compared with related measurement reported in the foreign paper. Especially, dispersion behaviour of step-mode optical fibers at two low-loss windows, $1.3\ \mu\text{m}$ and $1.55\ \mu\text{m}$, is studied. All calculation is accomplished with type DJS-8 computer.