第3卷　第1期　　光　学　学　报　　Vol. 3, No. 1
1983年1月　　ACTA OPTICA SINICA　　January, 1983

相位共轭光腔的基本物理性质*

王绍民　洪熙春　于　军
(杭州大学物理系)

提　　要

把相位共轭镜看作一面曲率随入射光束而变的球面镜，可以很方便地得出相位共轭光腔中的高斯模，它是无条件稳定的。

相位共轭光腔的主要特点是能够补偿腔内因折射率不均匀所引起的波前畸变，但激光光束必须从真镜一端输出。

一、两种矩阵形式

相位共轭光腔(PCR)存在着补偿腔内波前畸变的可能性，因而引起了人们的注意[1~5]。首要任务是给出腔内的基模，这就需要定义一个合适的变换矩阵来描写相位共轭镜(PCM)的运转。

当高斯光束入射至相位共轭镜，根据四波混频非线性相互作用的内在性质，入射和反射光束的复曲率存在下列基本关系[1]:

$$\frac{1}{q_r}=-\frac{1}{\rho}-\frac{i\lambda}{\pi w^2}=-\frac{1}{q_i^*}。\tag{1}$$

1. 变换矩阵的第一形式

为了描写相位共轭镜的运转特性，Yariv 等[1]引入了光线变换矩阵

$$M_{\mathrm{PCM}I}=\begin{pmatrix} a_I & b_I \\ c_I & d_I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}。\tag{2}$$

由(1)式，ABCD 定律不得不写成

$$q_r=\frac{a_I q_i^*+b_I}{c_I q_i^*+d_I};\tag{3}$$

并有 $a_I d_I-b_I c_I=-1$。

这是正确的，由此已得出相位共轭光腔的若干有用性质[1~5]。但它是十分不便的，特别是处理光腔的自洽问题。

2. 变换矩阵的第二形式

注意到相位共轭镜只改变光束波前曲率半径的符号，并不改变光斑尺寸，也就是对于发散波来说，相位共轭镜的作用象一个会聚镜；对于会聚波来说，相位共轭镜的作用则象一个发散镜。这样，我们可以定义一个新的变换矩阵来更确切地描写相位共轭镜的运转：

收稿日期：1982年1月7日，收到修改稿日期：1982年8月6日

* 本文曾在第六届全国激光学术报告会上宣读

$$M_{PCMII}=\begin{pmatrix} a_{II} & b_{II} \\ c_{II} & d_{II} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/\rho & 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

式中，ρ 是入射波前的曲率半径，它是变量。

按新的定义，通常的 ABCD 定律仍然适用，并有 $a_{II}d_{II}-b_{II}c_{II}=1$。这是合理的，所有的变换，包括共轭运算，均包含在矩阵元中；不必人为地再加置共轭符号。因此，它能十分方便地处理相位共轭光腔中的自洽关系。

但，M_{PCMII} 只适用于光束，而不是光线。因此，某些问题还是采用 M_{PCMI} 为宜[5]。

二、高斯光束基模

采用 M_{PCMI}，已经得到相位共轭光腔中基模的部分结果[1,2]。本文将完全采用相位共轭镜变换矩阵的第二形式，更简洁地导出基模完整的性质。

1. 由实元件组成的相位共轭光腔

相位共轭光腔通常由一面相位共轭镜和另一面真镜(RM)组成。真镜的曲率半径为 R，并设 a, b, c, d 是从真镜到相位共轭镜但不包括它们本身的变换矩阵元。

考察相位共轭镜面上的基模。往返一周的矩阵为

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/P & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/\rho & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}。 \tag{5}$$

并有

$$A_rD_r-B_rC_r=1, \qquad A_r=D_r。 \tag{6}$$

自洽条件是

$$\frac{1}{q}=\frac{C+D/q}{A+B/q}。 \tag{7}$$

将(5)代入(7)式，并应用(6)式有

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{\rho}-\frac{i\lambda}{\pi w^2}=\frac{C_r-2D_r/\rho+D_r/q}{A_r-2B_r/\rho+B_r/q}。 \tag{8}$$

比较(8)式两边的虚部，是 $0\equiv0$ 恒等式。比较它们的实部，得

$$\left(\frac{B_r\lambda}{\pi w^2}\right)^2+\left(\frac{B_r}{\rho}-A_r\right)=1。 \tag{9}$$

(9) 式与 Siegman 等[2]按 M_{PCMI} 推得的结果是一致的。它说明腔内仅存在实元件时，相位共轭光腔中模的不确定性。事实上，按照 M_{PCMII}，当我们把相位共轭镜看成曲率半径可变的反射镜时，这种不确定性是很自然的。

2. 存在高斯反射率的情况

考虑到四波混频的激励 $A_1(w)$、$A_2(w)$ 通常是高斯光束，相位共轭镜具有非均匀的反射率 $R(r)=R(0)\exp(-r^2/\sigma^2)$，$M_{PCMII}$ 应增写为：

$$M'_{PMCII}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\frac{2}{\rho}+\frac{i\lambda}{\pi\sigma^2}\right) & 1 \end{pmatrix}。 \tag{10}$$

则(5)式和(8)式分别增写为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\dfrac{2}{\rho}+\dfrac{i\lambda}{\pi\sigma^2}\right) & 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

和

$$\frac{1}{\rho}-\frac{i\lambda}{\pi w^2}=\frac{C_r-D_r\left(\dfrac{2}{\rho}+\dfrac{i\lambda}{\pi\sigma^2}\right)+D_r\left(\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{i\lambda}{\pi w^2}\right)}{A_r-B_r\left(\dfrac{2}{\rho}+\dfrac{i\lambda}{\pi\sigma^2}\right)+B_r\left(\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{i\lambda}{\pi w^2}\right)}。 \tag{12}$$

比较(12)式两边的虚部，可得：

$$\rho=B_r/A_r。 \tag{13}$$

由实部则有：

$$\left(\frac{\lambda B_r}{\pi w^2}\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\lambda B_r}{\pi\sigma^2}\right)\pm\left[\left(\frac{\lambda B_r}{\pi\sigma^2}\right)+4\right]^{1/2}\right\}。 \tag{14}$$

高斯型反射起了定位作用，固定了相位共轭镜面上的光束参数。由(13)式相位共轭光腔内的相位共轭镜的变换矩阵可具体化为：

$$M''_{PCMII}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\dfrac{2A_r}{B_r}+\dfrac{i\lambda}{\pi\sigma^2}\right) & 1 \end{pmatrix}。 \tag{15}$$

至此，相位共轭光腔和普通球面光腔的唯一区别，只是用 A_r/B_r 代替球面的曲率，而它完全由腔内其它光学元件所确定。

3. $2\pi\sigma^2 \gg \lambda B_r$ 的近似

当 $2\pi\sigma^2 \gg \lambda B_r$，即高斯反射率趋于均匀时，腔模具有简单的形式。所求出的光斑尺寸既代表反射均匀时不确定值中可能的最小值，也存在高斯反射率时确定值中可能的最大值，它是一种临界状态，因而具有典型的意义。于是(13)和(14)式可写为

$$\rho=B_r/A_r, \qquad w^2 \simeq \lambda B_r/\pi。 \tag{16}$$

采用 G 因子表述 $G=a-b/R$, $G'=d-b/\rho$。于是得

$$\rho=2bG/(2dG-1) \qquad w^2=\lambda(2bG)/\pi。 \tag{17}$$

类似地，在真镜面上，则有

$$\rho_{RM}=2bG'/(2aG-1)=R, \qquad w_{RM}^2=(\lambda/\pi)(2bG')=(\lambda/\pi)(b/G)。 \tag{18}$$

对于空腔，$a=d=1$, $c=0$, $b=L$; $g=1-L/R$, $g'=1-L/\rho$。相位共轭镜和真镜面上的光束参数分别为

$$\rho=2Lg/(2g-1), \qquad w^2=\frac{\lambda}{\pi}(2Lg); \tag{19}$$

$$\rho_{RM}=R, \qquad w_{RM}^2=\frac{\lambda}{\pi}(L/g)。 \tag{20}$$

束腰光斑尺寸 w_0 和束腰离真镜的距离 l_1 为：

$$w_0^2=\frac{\lambda}{\pi}[Lg/(2g^2-2g+1)], \qquad l_1=L^2/R(2g^2-2g+1)。 \tag{21}$$

4. 相位共轭光腔的稳定性

由(17)、(19)和(20)式可推得：

$$GG'=gg'=1/2。 \tag{22}$$

根据光腔的稳定性条件(更确切地说,应称约束条件),任何结构的相位共轭光腔都是无条件稳定的。

关于利用(22)式处理带硬边光阑的相位共轭光腔已由另文报道[6]。

三、补偿腔内畸变的能力

为了便于分析，我们把腔内非均匀折射率等效于在相位共轭光腔中任意位置加上一个复函数光阑 $IR(x, y)$。并设 a_1, b_1, c_1, d_1 是从真镜到光阑但不包括真镜和光阑的变换矩阵元, a_2, b_2, c_2, d_2 是从光阑到相位共轭镜也不包括光阑和相位共轭镜的变换矩阵元; 以及真镜到光阑和光阑到相位共轭镜的光程分别是 l_1 和 l_2。

1. 相位共轭镜上的场

运用 Collins 衍射积分公式[7], 可得当腔内存在折射率不均匀时在相位共轭镜上输出场所满足的积分方程:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y)\propto & \frac{ie^{i2kl_1}}{(\lambda b_2)^2\lambda B_1}\int\varphi^*(x, y)IR(x_1, y_1)IR(x_2, y_2)\\ & \cdot\exp\left\{\frac{ik}{2b_2}[d_2(x^2+y^2)-2(xx_1+yy_1)+a_2(x_1^2, y_1^2)]\right\}\\ & \cdot\exp\left\{\frac{ik}{2B_1}[A_1(x_1^2+y_1^2)-2(x_1x_2+y_1y_2)+D_1(x_2^2+y_2^2)]\right\}\\ & \cdot\exp\left\{\frac{ik}{2b_2}[a_2(x_2^2+y_2^2)-2(x_2x_3+y_2y_3)+d_2(x_3^2+y_3^2)]\right\}\\ & \cdot dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2\,dx_3\,dy_3。\end{aligned} \tag{23}$$

式中,

$$\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ C_1 & D_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2/R & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1 & b_1\\ c_1 & a_1\end{pmatrix}。 \tag{24}$$

显然,存在光阑的影响。

2. 真镜上的场

运用 Collins 公式和文献[8]中(9)式, 并注意 $IR^*IR=1$, 得到在真镜上输出场所满足的函数方程为:

$$\psi(x, y)\propto\psi^*(x, y)\exp\left[\frac{ik}{R}(x^2+y^2)\right]。 \tag{25}$$

由于相位共轭的作用,输出与光阑无关。

3. 结论

上面的计算表明: 为了补偿腔内因折射率不均匀所引起的波前畸变,激光光束应从真镜一端输出。以前的实验[1]并没有利用相位共轭光腔这一突出的优点。

作者对 H. Weber 教授就上述问题的讨论谨表谢意。

参 考 文 献

[1] J. An Yeung, D. Fekete *et al.*; *IEEE, J. Q. E.*, 1979, **QE-15**, No. 10 (Oct), 1180.

[2] P. A. Belanger, A. Hardy *et al.*; *Appl. Opt.*, 1980, **19**, No, 4 (Feb), 602.
[3] I. M. Bel'dyugin, M. G. Galushkin *et al.*; *Sov. J. Quant. Electron.* 1979, **9**, No. 1 (Jan), 20.
[4] J. F. Lam, W. P. Brown; *Opt. Lett.*, 1980, **5**, No. 2 (Feb), 61.
[5] 王绍民;《科学通报》, 1982. **27**, No. 5 (May), 270.
[6] Wang Shaomin (王绍民), H. Weber; *Opt. Comm.*, 1982, **41**, No. 5 (May), 360.
[7] S. A. Collins; *J. O. S. A.*, 1970, **60**, No. 9 (Sep), 1168.
[8] 范滇元;《光学学报》, 1981, **1**, No. 5 (May), 395.

Elementary physical properties of phase-conjugate resonators*

WANG SHAOMIN　HONG XICHUN AND YU JUN

(Department of Physics, Hangzhou University)

(Received 7 January 1982, revised 6 August 1982)

Abstract

The Gaussian modes in phase-conjugate resonators (PCR) have been derived by means of the second form of transform matrix if the phase-conjugate mirror (PCM) regarded as spherical mirror of variable cuvature with incidence beam.

The major characteristics of PCR is the ability for compensating distortions. However, the laser output must be extracted from the real mirror.

* The paper has been presented to the 6th National Symposium on Lasers