

双光子激光的半经典理论

汪志诚 曹 玲
(兰州大学物理系)

提 要

本文将 Lamb 的半经典方法应用于单模双光子激光问题。得到了模振幅方程的定态解,并分析了定态解的稳定性。结果表明,双光子激光对抽运和光场强度均有阈值要求。频率方程预示牵引效应。

一、引 言

自从多光子激光的设想^[1,2]提出以来,对多光子过程的研究已取得了很大的进展。实验早已观察到双光子的吸收^[3]和自发射现象^[4]。最近,成功地观察到双光子的受激发射和放大^[5]。Hoshimiya 等^[6]用 Lamb 的半经典理论, Bulsara 等^[7]用随机过程理论, McNeil 等^[8], Zubairy^[9]分别用 Lamb 的量子理论对多光子激光问题进行了研究。Hoshimiya 等考虑三能态的原子模型,用 Takatsuji 等^[10]所引入的正则变换化为二能态问题,然后用 Lamb 的方法在弱场近似下进行了分析(三阶理论)。本文考虑的原子模型是多能态的,用 Narducci 等^[11]的方法消去中间能态,化为二能态问题,然后运用 Lamb 的半经典方法^[12],对任意场强下的单模双光子激光问题进行探讨。

二、布居数矩阵的运动方程

仿照 Lamb 的作法,可以得到下述振幅方程和频率方程:

$$\dot{E}_0(t) + \frac{\nu}{2Q} E_0(t) = -\frac{\nu}{2\varepsilon_0} P_s(t), \quad (1)$$

$$\nu + \dot{\varphi} = \Omega - \frac{\nu}{2\varepsilon_0} E_0^{-1}(t) P_c(t), \quad (2)$$

其中 $\nu + \dot{\varphi}$ 为模频率, Ω 为无源腔模频率, Q 为光腔的品质因素。

引入激活介质的原子模型, 设光场 $E(z, t) = E_0(z, t) \cos[\nu t - kz + \varphi(t)]$ 及感生极化强度 $P(z, t) = P_c(t) \cos(\nu t - kz + \varphi) + P_s(t) \sin(\nu t - kz + \varphi)$, 代入(1)和(2)式以确定光场的振幅和频率。

定义单个原子密度矩阵为

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca ca^* & ca cb^* \\ cb ca^* & cb cb^* \end{pmatrix}。$$

容易求得矩阵元的运动方程:

收稿日期: 1981年9月11日, 收到修改稿日期: 1982年3月1日

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{aa} &= -\gamma_a \rho_{aa} - (ik_{ab}E_0^2(t)/4\hbar)(\rho_{ab}e^{i\alpha} - \rho_{ba}e^{-i\alpha}), \\ \dot{\rho}_{bb} &= -\gamma_b \rho_{bb} + (ik_{ab}E_0^2(t)/4\hbar)(\rho_{ab}e^{i\alpha} - \rho_{ba}e^{-i\alpha}), \\ \dot{\rho}_{ab} &= -(i\omega(t) + \gamma)\rho_{ab} - (ik_{ab}E_0^2(t)/4\hbar)(\rho_{aa} - \rho_{bb})e^{-i\alpha},\end{aligned}\quad (3)$$

其中 $\alpha = (2\nu - \omega_{ab})t - 2kz + 2\varphi(t)$, $\omega(t) = E_0^2(t)(k_{bb} - k_{aa})/4\hbar$, $\gamma = (\gamma_a + \gamma_b)/2 + \gamma_1$. γ_1 是由于失相碰撞所引起的非对角元 ρ_{ab} 的衰变率。

介质含有大量的激活原子。以 $\rho(\xi, z, t, t_0)$ 表示在 t_0 时刻 z 处抽运到状态 ξ ($\xi = a, b$) 的原子在 t 时刻的密度矩阵。以 $\lambda_f(z, t_0)$ 表示在 t_0 附近的单位时间和 z 附近的单位体积内抽运到状态 ξ 的原子数。对 t_0 和 ξ 求和给出在 t 时刻 z 处附近的单位体积内的原子的布居数矩阵 $\tilde{\rho}(z, t) = \sum_{\xi} \int_{-\infty}^t dt_0 \lambda_f(z, t_0) \rho(\xi, z, t, t_0)$, 将上式对 t 求导数, 注意到被积函数和积分上限都与 t 有关, 得

$$d\tilde{\rho}(z, t)/dt = \sum_{\xi} \lambda_f(z, t) \rho(\xi, z, t, t_0) + \sum_{\xi} \int_{-\infty}^t dt_0 \lambda_f(z, t_0) \dot{\rho}(\xi, z, t, t_0). \quad (4)$$

由定义知 $\rho_{ij}(\xi, z, t, t_0) = \delta_{if} \delta_{jt}$, 因此(4)式右方第一项可以用矩阵表示为: $\begin{pmatrix} \lambda_a & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{pmatrix}$, 单个原子的密度矩阵 $\rho(\xi, z, t, t_0)$ 所满足的方程由(3)式给出, 代入(4)式右方, 即得布居数矩阵的运动方程

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\rho}}_{aa} &= \lambda_a - \gamma_a \tilde{\rho}_{aa} - (ik_{ab}E_0^2(t)/4\hbar)(\tilde{\rho}_{ab}e^{i\alpha} - \tilde{\rho}_{ba}e^{-i\alpha}), \\ \dot{\tilde{\rho}}_{bb} &= \lambda_b - \gamma_b \tilde{\rho}_{bb} + (ik_{ab}E_0^2(t)/4\hbar)(\tilde{\rho}_{ab}e^{i\alpha} - \tilde{\rho}_{ba}e^{-i\alpha}), \\ \dot{\tilde{\rho}}_{ab} &= -(i\omega(t) + \gamma)\tilde{\rho}_{ab} - (ik_{ab}E_0^2(t)/4\hbar)e^{-i\alpha}(\tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb}).\end{aligned}\quad (5)$$

三、布居数矩阵运动方程的解

(5)式的形式解为:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{ab} &= (-ik_{ab}/4\hbar) \int_{-\infty}^t dt' \exp\{-[i\omega(t') + \gamma](t-t')\} E_0^2(t') \exp\{-i[(2\nu - \omega_{ab})t' \\ &\quad - 2kz + 2\varphi(t')]\} (\tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb}).\end{aligned}$$

由于 $E_0(t')$, $\tilde{\rho}_{aa}(z, t') - \tilde{\rho}_{bb}(z, t')$, $\varphi(t')$, $\omega(t')$ 是时间的慢变函数, 应用慢变近似可得:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{ab} &= (-ik_{ab}E_0^2(t)/4\hbar)e^{-i\alpha} [(\tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb})/(\gamma - i(2\nu - \tilde{\omega}_{ab}))], \\ \tilde{\rho}_{ba} &= (-ik_{ab}E_0^2(t)/4\hbar)e^{i\alpha} [(\tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb})/(\gamma + i(2\nu - \tilde{\omega}_{ab}))],\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\omega}_{ab} = \omega_{ab} + \omega(t)$. 将 $\tilde{\rho}_{ab}$, $\tilde{\rho}_{ba}$ 代入(5)式有:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\rho}}_{aa} &= \lambda_a - \gamma_a \tilde{\rho}_{aa} - R(\tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb}), \\ \dot{\tilde{\rho}}_{bb} &= \lambda_b - \gamma_b \tilde{\rho}_{bb} + R(\tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb}),\end{aligned}\quad (6)$$

其中: $R = [(k_{ab}E_0^2(t)/\hbar)^2/8\gamma] \mathcal{L}(2\nu - \tilde{\omega}_{ab})$, $\mathcal{L}(2\nu - \tilde{\omega}_{ab}) = \gamma^2/[(2\nu - \tilde{\omega}_{ab})^2 + \gamma^2]$. 求(6)式的解。考虑到原子的弛豫时间远小于光场的弛豫时间, 原子极化可以瞬时地跟随光场的变化, 因而可以采用“绝热近似”。令 $\dot{\tilde{\rho}}_{aa} = \dot{\tilde{\rho}}_{bb} = 0$, 即有 $\lambda_a - \gamma_a \tilde{\rho}_{aa} - R(\tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb}) = 0$, $\lambda_b - \gamma_b \tilde{\rho}_{bb} + R(\tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb}) = 0$. 由此可得

$$\tilde{\rho}_{aa} = M_a(z)/[1 + (R/R_S)], \quad \tilde{\rho}_{bb} = M_b(z)/[1 + (R/R_S)], \quad \tilde{\rho}_{aa} - \tilde{\rho}_{bb} = N(z)/[1 + (R/R_S)],$$

其中

$$\begin{aligned} M_a(z) &= [R(\lambda_a + \lambda_b)/\gamma_a\gamma_b + (\lambda_a/\gamma_a)], \\ M_b(z) &= [R(\lambda_a + \lambda_b)/\gamma_a\gamma_b + (\lambda_b/\gamma_b)], \\ N(z) &= (\lambda_a/\gamma_a) - (\lambda_b/\gamma_b), \quad R_s = \gamma_a\gamma_b/(\gamma_a + \gamma_b). \end{aligned}$$

式中 R_s , $N(z)$, $M_a(z)$, $M_b(z)$ 是 z 和 t 的慢变函数, R 是 t 的慢变函数。

四、激活介质的极化强度

单个原子的平均偶极矩为 $\langle p \rangle = \langle \psi(t) | p | \psi(t) \rangle$, 将偶极矩算符和原子态矢量代入上式经运算可得:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= [k_{aa}\rho_{aa} + k_{bb}\rho_{bb} + k_{ab}(\rho_{ab}e^{i\alpha} + \rho_{ba}e^{-i\alpha})] \cdot E_0(t) \cos(\nu t - kz + \varphi) \\ &\quad - ik_{ab}(\rho_{ab}e^{i\alpha} - \rho_{ba}e^{-i\alpha}) E_0(t) \sin(\nu t - kz + \varphi). \end{aligned}$$

激活介质的宏观极化强度 $P(z, t)$ 为:

$$\begin{aligned} P(z, t) &= \sum_f \int_{-\infty}^t dt_0 \lambda_f(z, t_0) \langle p \rangle = [k_{aa}\tilde{\rho}_{aa} + k_{bb}\tilde{\rho}_{bb} + k_{ab}(\rho_{ab}e^{i\alpha} + \tilde{\rho}_{ba}e^{-i\alpha})] E_0(t) \cos(\nu t \\ &\quad - kz + \varphi) - ik_{ab}(\tilde{\rho}_{ab}e^{i\alpha} - \rho_{ba}e^{-i\alpha}) \cdot E_0(t) \sin(\nu t - kz + \varphi). \end{aligned}$$

将此式中所含 z 的慢变量 $N(z)$, $M_a(z)$, $M_b(z)$ 取平均值, 可求得感生极化强度的两个分量:

$$\begin{aligned} P_s(t) &= -k_{ab}^2 E_0^2(t) \mathcal{L}(2\nu - \tilde{\omega}_{ab}) \bar{N} / 2\hbar\gamma [1 + (R/R_s)], \\ P_c(t) &= k_{aa}\bar{M}_a + k_{bb}\bar{M}_b + [k_{ab}^2 E_0^2(t) (2\nu - \tilde{\omega}_{ab}) \mathcal{L}(2\nu - \tilde{\omega}_{ab}) \bar{N} / 2\hbar\gamma^2], \end{aligned} \quad (7)$$

其中 \bar{N} , \bar{M}_a , \bar{M}_b 是慢变量 $N(z)$, $M_a(z)$, $M_b(z)$ 对 z 的平均值。

五、结果分析

为了讨论双光子激光的定态运转, 引入无量纲的场强 $I(t) = k_{ab}^2 E_0^2(t) / \varepsilon_0 \hbar R_s$, 将(7)式代入(1)式得

$$\dot{I} + \frac{\nu}{Q} I = \nu A I^2 (1 + B I^2)^{-1}, \quad (8)$$

其中

$$A = R_s \bar{N} \mathcal{L}(2\nu - \tilde{\omega}_{ab}) / 2\gamma, \quad B = R_s \mathcal{L}(2\nu - \tilde{\omega}_{ab}) (\varepsilon_0 / k_{ab})^2 / 8\gamma, \quad (9)$$

在定态下, $\dot{I} = 0$, 则得 $\nu I (B I^2 - A Q I + 1) / Q = 0$ 。此式有一个解 $I = 0$, 其它的解由二次方程

$$B I^2 - A Q I + 1 = 0 \quad (10)$$

确定。其解取决于判别式: $\Delta = A^2 Q^2 - 4B$ 。分别讨论 $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ 和 $\Delta > 0$ 三种情况。令 $g = A^2 Q^2 / 4B$, 则相应三种情况为 $g < 1$, $g = 1$ 和 $g > 1$ 。由(9)式可知 $g \propto \bar{N}^2$, 与泵浦水平有关。(i) 当 $\Delta < 0 (g < 1)$ 时, (10) 式为复数根, 不合物理要求。(ii) $\Delta = 0 (g = 1)$ 时, (10) 式有两个相等的正实根 $a = 1/\sqrt{B}$ 。(iii) $\Delta > 0 (g > 1)$ 时, (10) 式有不等的实根 $b = (\sqrt{g} + \sqrt{g-1})/\sqrt{B}$ 和 $c = (\sqrt{g} - \sqrt{g-1})/\sqrt{B}$ 。因此 $I = 0$, a , b , c 是场强的可能的定态解。

下面讨论定态解的稳定性问题。令 $I = I_s + \varepsilon$, 其中 I_s 表示定态解的值, 即 0, a , b , c ; ε 是对 I_s 的偏离。若 $t \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon \rightarrow 0$, 则解 I_s 是稳定的, 否则是不稳定的。将上式代入(8)

式化简可得

$$\dot{\varepsilon} = -[\nu(D_1\varepsilon + D_2\varepsilon^2 + D_3\varepsilon^3)/Q]/[1+B(I_S+\varepsilon)^2](1+BI_S^2), \quad (11)$$

其中 $D_1 = B^2I_S^4 + 2BI_S^2 - 2AQI_S + 1$, $D_2 = 2B^2I_S^3 + 2BI_S - AQ$, $D_3 = B^2I_S^2$ 。只考虑含 ε 的一次项, 如果 $D_1 > 0$, 由(11)式易见, $t \rightarrow \infty$ 时 $\varepsilon \rightarrow 0$, 这时解是稳定的。(i) 对于 $I_S = 0$ ($0 \leq g < \infty$), $D_1 = 1 > 0$, 故解 $I_S = 0$ 是稳定的。(ii) 对于 $I_S = b$ ($g > 1$), $D_1 = 4[g + \sqrt{g(g-1)}][(g-1) + \sqrt{g(g-1)}] > 0$, 故解 $I_S = b$ 也是稳定的。(iii) 对于 $I_S = c$ ($g > 1$), $D_1 = 4[g - \sqrt{g(g-1)}][(g-1) - \sqrt{g(g-1)}] < 0$, 故解 $I_S = c$ 是不稳定的。(iv) 对于 $I_S = a = 1/\sqrt{B}$ ($g = 1$), $D_1 = 0$, 只取 ε 的一次项不能确定 $I_S = a$ 是否稳定, 而要考虑含 ε 的二次项。由于 $D_2 = 2\sqrt{B} > 0$, 由(11)式易见, 如果场强对 a 的偏离 ε 为正, 偏离将随时间而减少; 如果 ε 为负, 偏离将继续增大, 故 $I_S = a$ 是不稳定的。

根据以上分析, 我们可以得到以下结论。当 $g < 1$ 时, 稳定解为 $I_S = 0$; 当 $g > 1$ 时, 稳定解有两个分支 $I_S = 0$ 和 $I_S = (\sqrt{g} + \sqrt{g-1})/\sqrt{B}$ 。也就是说, $g = 1$ 是产生稳定双光子振荡的泵浦阈值。在 $g < 1$ 时不可能产生激光振荡, 只有 $g > 1$ 才可能产生稳定的激光振荡。但是, 即使 $g > 1$, $I_S = 0$ 仍然是一个可能的稳态解。要产生稳定的激光振荡, 场强必须超过阈值 $1/\sqrt{B}$, 否则, 无论泵浦水平如何, 稳定的激光振荡都不可能产生。

在单光子激光中, 泵浦在阈值以下时, 场强 $I_S = 0$; 当泵浦超过阈值时, 只有单一的稳定解 I_S 。 I_S 从零随泵浦而增长。所以在单光子激光中, 自发辐射就可以提供原始的诱导光场, 而双光子激光的激发则不可能依靠自发辐射而需要由外界输入足够强的相干光, 使场强超过阈值才可能产生激光。

将(7)式代入(2)式化简可得

$$\nu + \dot{\phi} = \Omega - \nu \{M + \gamma^{-1}AI[\nu - (\tilde{\omega}_{00}/2)]\}(1+BI^2)^{-1}, \quad (12)$$

其中 $M = (k_{aa}\bar{M}_a + k_{bb}\bar{M}_b)/2\varepsilon_0$ 。(12)式给出激光振荡频率 $\nu + \dot{\phi}$ 对无源腔频率 Ω 的偏离, 称为模频率牵引效应。偏离与场强有关。

参 考 文 献

- [1] A. M. Prokhorov; *Science*, 1965, **149**, No. 3686 (Aug), 828.
- [2] P. P. Sorokin, N. Braslau; *IBM J. Res. Dev.*, 1964, **8**, 177.
- [3] S. Yatsiv *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1965, **15**, No. 15 (Oct), 614.
- [4] M. Lipeles *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1965, **15**, No. 16 (Oct), 690.
- [5] B. Nikolaus *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **47**, No. 3 (Jul), 171.
- [6] T. Hoshimiya *et al.*; *J. Appl. Phys. Japan*, 1978, **17**, No. 12 (Dec), 2177.
- [7] A. R. Bulsara *et al.*; *Phys. Rev. A*, 1979, **19**, No. 5 (May), 2046.
- [8] K. J. McNeil, D. F. Walls; *J. Phys. (A)*, 1975, **8**, No. 1 (Jan), 104.
- [9] M. S. Zubairy; *Phys. Lett.*, 1980, **80A**, No. 4 (Jan), 225.
- [10] M. Takatsuji; *Physica*, 1971, **51**, No. 2 (Jan), 265.
- [11] L. M. Narducci, W. W. Eidson; *Phys. Rev.*, 1977, **16A**, No. 4 (Oct), 1665.
- [12] M. Sargent III, *et al.*; *Laser Physics*, (Addison-Wesley Pub. Com. Inc., 1974).

A semiclassical theory of a two-photon laser

WANG ZHICHENG AND CAO LING

(Department of Physics, University of Lanzhou)

(Received 11 September 1981, revised 1 March 1982)

Abstract

The semiclassical Lamb method is applied to the problem of a single mode two-photon laser (TPL). The steady-state solutions of the amplitude equation are obtained, their stability properties are analysed. It is found that, for TPL there exist threshold requirements both for pumping and for the light field intensity. The frequency equation predicts a mode-pulling effect.

表面物理国际会议预告

Announcement—International Conference on Ellipsometry and Other Optical Methods for Surface and Thin Film Analysis

1983年6月7~10日将在法国巴黎召开“表面和薄膜分析的椭圆对称法及其他光学方法”的国际会议。组织委员会主席为F. Abelès教授(Prof. F. Abelès: Laboratoire d'Optique des Solides, Université P. et M. Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05, France.)。

会议将就以下各专题进行交流:

表面和界面的粗糙度,表面提高的喇曼散射等;界面的电化学问题,有机膜和生物学上问题;椭圆对称,反射率,差动反射率,电反射能力,导波和表面等离子体技术、发光中的进展;很薄表面层及其吸收;表面层生长的原位分析。光谱范围从远紫外至红外。

(黎 凤)
