

用矩阵方法讨论稳定平凹法布里-珀罗 共振腔的失调对光程差影响

朱 若 谷

(中国计量科学研究院)

提 要

本文用矩阵方法讨论了实践中广泛应用的稳定平凹法布里-珀罗共振腔(以下简称平凹腔),失调对光程差的影响。原理上,本方法适用一般球面腔。然而,为分析方便起见,仅讨论了微小失调范围内平凹腔,并且经过理论与实验结果比较,得出三个结论:

(1) 平凹腔准确地调直时,光程差受失调影响最灵敏。

(2) 平凹腔在微小失调角范围内有“自准直”效应,以及实验得出光程差随失调角增加而涨落。

(3) 如失调角小于 $1''$,失调对光程差的影响小于 3×10^{-9} ,若进一步使失调角小于 $0.2''$,则影响将降到 10^{-10} 以下。

一、引 言

已经知道用矩阵方法可以求解光学系统失调对程差的影响^[1],但对一般球面共振腔,计算还是繁琐的。本文为了分析方便起见,仅讨论了实践中广泛应用的平凹法布里-珀罗腔,同时,因为实际应用中,失调角尽可能小,以及费涅耳数足够而忽略衍射损耗的影响*,这就使结果能简化,而且通过新设计的实验表明理论计算值与实验结果差不超过 $n \times 10^{-9}$, n 小于5。

二、基本原理

造成光学系统失调的原因:

1. 两镜面因制造公差产生的球面不均匀性和不共轴。
2. 两镜面装配成腔时,虽经调试,但残留不共轴,和镜面倾斜。
3. 入射光束的不共轴。

以上1和2两项失调由镜面倾斜角 α 表征,而3项由入射光线的侧位移 y_0 和方向角

收稿日期: 1981年6月11日,收到修改稿日期: 1982年2月22日

* 由衍射引起的相移按下式估计^[5], $\phi = (m+n+1) \tan^{-1}(kw_0^2/2s)$, 其中 k 为波矢, w_0 为腰斑半径, s 为离腰斑距离, m 和 n 为高阶横模序号。由于失调微小, $m=n=0$, 且 $s=d$, 设 k 和 w_0 近似不变求 ϕ 对 d 的导数, 整理后得

$$\Delta\phi/\phi = \frac{-N_0}{(HN_0) \operatorname{tg}^{-1} N_0} \cdot \frac{\Delta d}{d}, \quad N_0 = kw_0^2/2s = \frac{\pi w_0^2}{\lambda d} = \frac{-1}{N_0} \cdot \frac{\Delta d}{d} \quad (\text{当 } N_0 \text{ 很大时}).$$

在秒量级的失调范围内 $\Delta d/d$ 与 α^2 有关,按本文数据代入在 10^{-9} 左右, $\Delta\phi/\phi$ 就降到 $10^{-9} \sim 10^{-10}$ 之间了。这与就高阶横高斯光束情况近似。

V_0 表征, 在实验中, 用 θ 表征它的影响, α, θ 统为失调角^[4]。为着重讨论前两项影响, 设 $y_0 = V_0 = 0$ 。考虑失调后, 系统光学变换矩阵为^[1]

$$\begin{bmatrix} \Delta y_{01} \\ \Delta V_{01} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & \Delta y_1 \\ C_1 & D_1 & \Delta V_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_0 \\ \Delta V_0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 Δy_0 和 ΔV_0 分别为系统变换矩阵作用前, 光线的离轴偏差和方向角偏差, 而 Δy_{01} 和 ΔV_{01} 为系统变换矩阵作用一次后, 光线的离轴偏差和方向角偏差, 以此类推, n 次后为 Δy_{0n} 和 ΔV_{0n} , 那末, 明显有

$$\Delta y_0 = y_0 + TV_0, \quad \Delta V_0 = V_0,$$

而 Δy_1 和 ΔV_1 是系统本身失调影响, 表示为

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & \Delta y_1 \\ C_1 & D_1 & \Delta V_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M'_2 M'_3 M'_4 M'_5.$$

如图 1(a) 按几何光学方法寻迹, 微小角近似, 略去 α 的二次和二次以上项, 则容易推出

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & \Delta y_1 \\ C_1 & D_1 & \Delta V_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 4\alpha d \\ C & D & 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{其中} \quad M'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -P_2 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M'_4 = M'_2 = \begin{bmatrix} 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M'_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -P_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

α 为球面镜倾斜角, P_1, P_2 分别为镜 1 和镜 2 的屈光度, T 为腔的名义间隔, 而且对应平凹

腔 $T=d, P_1=0$, 以及 $P_2=\frac{2}{r}$, r 是球面镜曲率半径。同时 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4\frac{d}{r} & 2d \\ -\frac{2}{r} & 1 \end{bmatrix} = Mq$

是不考虑失调时, 腔的单次绕程变换矩阵^[1, 3~5]。从上述讨论中得出

$$\Delta y_1 = 4\alpha d, \quad \Delta V_1 = 2\alpha.$$

N 次作用以后, 一般形式的失调影响为

$$\begin{bmatrix} \Delta y_{0N} \\ \Delta V_{0N} \end{bmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{N-1} M_i \right) \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta V_1 \end{bmatrix} + \left(\prod_{i=1}^{N-2} M_i \right) \begin{bmatrix} \Delta y_2 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix} + \dots + M_1 \begin{bmatrix} \Delta y_{(N-1)} \\ \Delta V_{(N-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta y_N \\ \Delta V_N \end{bmatrix} \quad (1)$$

按稳定腔条件, 进一步有^[1, 3~5], $\theta = \cos^{-1} \frac{A+D}{2}$ 。这时若 $N\theta = 2\pi$, 那末不考虑失调, $M_q^N = 1$ 成立, 它表征出射光线与入射光线经 N 次绕程后重合, 此时的 N 称为自洽绕程数。当失调角为秒量级时, 设

$$M_1 = M_2 = \dots = M_{(N-1)} = M_N = M_q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4\frac{d}{r} & 2d \\ -\frac{2}{r} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta y_2 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \Delta y_N \\ \Delta V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\alpha d \\ 2\alpha \end{bmatrix}, \quad (3)$$

则

$$\begin{bmatrix} \Delta y_{0N} \\ \Delta V_{0N} \end{bmatrix} = \left(\sum_{i=0}^{N-1} M^i \right) \cdot \begin{bmatrix} 4\alpha d \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(N)} & a_{12}^{(N)} \\ a_{21}^{(N)} & a_{22}^{(N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\alpha d \\ 2\alpha \end{bmatrix}. \quad (4)$$

利用 Sylvester 定理得出

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^{(N)} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sin(i+1)\theta - D \sin i\theta}{\sin \theta}; & a_{12}^{(N)} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{B \sin i\theta}{\sin \theta}; \\ a_{21}^{(N)} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{C \sin i\theta}{\sin \theta}; & a_{22}^{(N)} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{D \sin i\theta - \sin(i-1)\theta}{\sin \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

对应一般稳定平凹腔, $\sum_{i=0}^{N-1} M^i = \varepsilon$, $\sum_{i=0}^N M^i = 1 + \varepsilon$, 其中 ε 为元素都接近零的微变换矩阵且 $1 \gg \|\varepsilon\| \geq 0$, 按微扰方法, 当矩阵范数满足 $\|\varepsilon\| \gg \|\varepsilon\|^2$, 下式近似成立。

$$\left(\sum_{i=0}^N M^i \right)^m = \left(\sum_{i=0}^N M^i \right)^k = (1 + \varepsilon)^k \approx 1 + k\varepsilon. \quad (6)$$

此处 m 为总绕程数, 由下式表示^[3], $k = m/N$ 为自治绕程级次, $m = [\ln(1-R) + \ln(1/200 \cdot 1/1+R)] / \ln R$, 其中 R 为两反射镜的平均光强反射率, 若两镜的光强反射率分别为 R_1, R_2 时, R 可表示为 $R = \sqrt{R_1 \cdot R_2}$ 。进一步求出失调影响下变换矩阵的本征矢^[4], 它表明腔的“自准直”效应

$$\bar{y}_0 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta y_{0N} & -a_{12}^{(N)} \\ \Delta V_{0N} & (1-a_{22}^{(N)}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-a_{11}^{(N)}) & -a_{12}^{(N)} \\ -a_{21}^{(N)} & (1-a_{22}^{(N)}) \end{vmatrix}}, \quad \bar{V}_0 = \frac{\begin{vmatrix} (1-a_{11}^{(N)}) & \Delta y_{0N} \\ -a_{21}^{(N)} & \Delta V_{0N} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1-a_{11}^{(N)}) & -a_{21}^{(N)} \\ -a_{21}^{(N)} & (1-a_{22}^{(N)}) \end{vmatrix}}.$$

由于 $k^2 \gg k > 1$, 这时可以得到在微失调影响范围内, 简单的失调影响表示 $\Delta \bar{\delta}_0 = k^2 \bar{y}_0 \bar{V}_0 / 2$ 。单次行程光程差相对变化 $\eta = \Delta \bar{\delta}_0 / d$ 。

三、数值计算和测定平凹腔的失调影响实验

作为数值计算例子, 取 $d = 0.2\text{m}$, $r = 1.2\text{m}$ 和 $R = 0.99$, 求对应失调角分别为 $\alpha = 0.5''$, $1''$, $1.5''$ 和 $2''$ 时的 η , 按本文讨论的方法求出 Δy_1 和 ΔV_1 , 并列在表 1 中, 这时求出

$$\theta = 48.1897^\circ, \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad m = 1054, \quad N \approx 7.5 \text{ 取作 } 15, \text{ 则}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0.043169 & 0.014059 \\ -0.05858 & 0.066603 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Delta y_{0N} \\ \Delta V_{0N} \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 0.062654 \\ 0.086342 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0667784\alpha \\ 0.088312\alpha \end{bmatrix},$$

而 $\Delta \bar{\delta}_0 = 3.6397\alpha^2$, 对应 $\alpha = 0.5'', 1'', 1.5''$ 和 $2''$ 的失调角影响为 $\eta = 4.2772 \times 10^{-10}, 1.7109 \times 10^{-9}, 3.8495 \times 10^{-9}$ 和 6.8435×10^{-9} 。测定失调角对光程差影响的实验布置如图 1(b)

表 1 对应不同 α , 单次行程失调影响Table 1 The effect of mis-alignment on single path difference for different value of α

$\alpha(\text{sec})$	0.5	1	1.5	2
$\Delta y_1(\text{m})$	1.93921×10^{-6}	3.87844×10^{-6}	5.81769×10^{-6}	7.75696×10^{-6}
$\Delta V_1(\text{rad})$	4.848×10^{-6}	9.696×10^{-6}	1.4544×10^{-5}	1.9392×10^{-5}

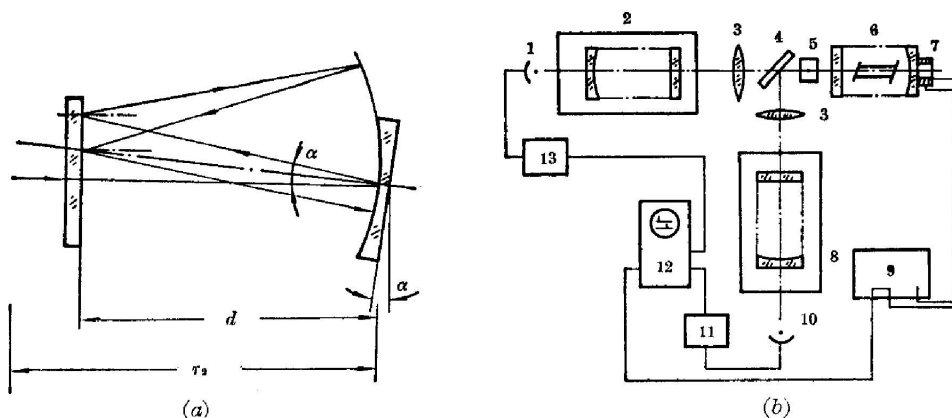


图 1

(a) 凹面镜倾斜角 α 失调时影响的示意图; d —长腔, r_2 —凹面镜的曲率半径;
 (b) 测量失调影响的实验方案; 1—光电接收元件; 2—平凹法布里-珀罗腔 B (固定在可调工作台上); 3—匹配透镜; 4—分光器; 5—退耦器; 6—激光器; 7—压电陶瓷; 8—平凹法布里-珀罗腔 A (固定在可调工作台上); 9—超低频信号发生器; 10—光电接收元件; 11—放大微分; 12—双踪示波器; 13—放大微分

Fig. 1

(a) The effect of mis-alignment when oblique angle of concave mirror is α ; d —length of cavity, r_2 —radius of curvature, concave mirror; (b) The experimental configuration for measurement of the effect of mis-alignment; 1—electro-optical detector; 2—plano-concave F-P resonator B (fixed on an adjustable bench); 3—matching lens; 4—splitter; 5—de-coupler; 6—laser; 7—piezoelectric crystal; 8—plano-concave F-P resonator A (fixed on an adjustable bench); 9—superlowfrequency signal generator; 10—electro-optical detector; 11—amplified differential; 12—doubletracing oscilloscope; 13—amplified differential

所示。用一个腔作标准参考腔,另一个腔为测量腔,失调对光程差的影响,在示波器上,用两透射峰值间隔变化表示。通过测出腔的自由谱范围,可读出对应光程差变化的色散变化,以频率作为标记。装置在温度变化 $0.003^\circ\text{C}/\text{min}$ 以及尽量防止振动干扰和声波干扰的实验室条件下工作,当激光器稳定后,透射峰间隔的稳定性可达 $0.2 \times 10^{-8}/\text{min}$,装置灵敏度在 0.2×10^{-8} 以上。

四、实验结果

表 2 和图 2 分别为实验数据和由它绘制的曲线,从图 2 中看到对应入射光线倾斜角 θ 和模拟镜面倾斜角 α 的色散变化有涨落。我们认为产生涨落的原因除理论计算中忽略的衍射损耗和实验中难于计及的镜面质量、镜面曲率半径的允差以及测量本身引起的涨落以外,公式中没有考虑 θ 、 N 和 m 随 α 的变化也是产生误差原因之一。

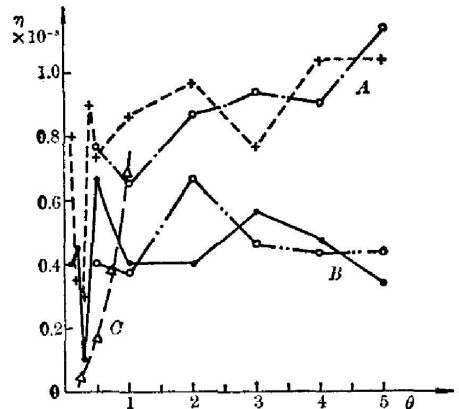


图 2 失准直影响曲线

A—由实验给出的 α 影响; +、o 表示两组数据; B—由实验给出的 θ 影响; ·、o 表示两组数据

Fig. 2 The curves of effect of mis-alignment

A—effect of α given by experiments; +, o responding to two groups of data;

B—effect of θ given by experiments; ·, o responding to two groups of data

表 2 失调对光程差影响的实验数据。其中角标(2)表示第 2 组数据

(单位: θ 的单位为 2.5×10^{-5} rad., α 的单位为 8.34×10^{-6} rad.)

Table 2 Experimental data of effect of mis-alignment on path difference where the sign (2) as a mark of second group data

(scaled in $\theta=2.5 \times 10^{-5}$ rad, in $\alpha=8.34 \times 10^{-6}$ rad)

θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1	2	3	4	5	0,5 ⁽²⁾	1 ⁽²⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽²⁾	4 ⁽²⁾	5 ⁽²⁾
α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1	2	3	4	5	0,5 ⁽²⁾	1 ⁽²⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽²⁾	4 ⁽²⁾	5 ⁽²⁾
色散变化 $\nu(\theta)$	2	2.25	0.5	2	3.33	2	2	2.83	2.33	1.67	2.00	1.875	3.33	2.33	2.17	2.17
单位 MHz $\nu(\alpha)$	4	1.75	1.5	4.5	3.67	4.33	4.83	3.83	5.17	5.17	3.83	3.25	4.33	4.67	4.50	5.67

五、结 论

本文用矩阵方法讨论了微小失调角范围内, 失调对光程差的影响并作了实验验证。由于作了两个假设, 得出失调对程差影响的近似计算方法。一般应进一步考虑 $\Delta y_0 \neq \Delta V_0 \neq 0$, 镜面质量和衍射损耗, 因此实验值超过了理论值, 但最大偏差仍不超过 $n \times 10^{-9}$, n 不超过 5。并通过理论和实验数据分析, 结论如下:

(1) 平凹腔正确地调整后, 其光程差受失调影响最灵敏。

(2) 平凹腔在微小失调角范围内有自准直效应, 以及实验得出光程差随失调角增加而涨落。

(3) 如失调角小于 $1''$, 失调对光程差的影响小于 3×10^{-9} , 若进一步失调角小于 $0.2''$, 则影响将降到 10^{-10} 以下。

以上结论可在这类干涉腔应用中作为参考。

在此对论文内容和实验工作给予支持及有益讨论的中国计量科学研究院杨自本老师以及其他同志表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] A. Gerand, *et al.*; «*Introduction to Matrix Methods in Optics*», (Awiley Interscience Publication, 1978).
- [2] M. 玻恩和 E. 沃耳夫; «*光学原理*», (科学出版社, 1978).
- [3] «*激光物理学*», (上海人民出版社, 1975).
- [4] 方洪烈; «*光学谐振腔理论*», (科学出版社, 1981).
- [5] 朱如曾编译; «*激光物理*», (国防工业出版社, 1975).

Matrix discussion of the effect of mis-alignment on path difference in stable plano-concave Fabry-Perot resonators

ZHU RUOGU

(National Institute of Metrology, Beijing)

(Received 11 June 1981, revised 22 February 1982)

Abstract

In this paper, the effect of mis-alignment on path difference in stable plano-concave resonators (simply called plano-concave cavities afterwards), which are widely used in practice, has been discussed by means of matrix methods. The method is suitable to the common spherical cavities in principle. For convenience of analysis, however, the plano-concave resonators are only discussed within miniature mis-alignment.

After comparison with experimental data and theoretical results three conclusions are obtained: (1) When the plano-concave resonators are correctly aligned, the effect of mis-alignment on path difference will be the most sensitive. (2) The plano-concave resonators have the "self-alignment" effect within miniature mis-alignment, and the experiment shows that the path difference will fluctuate with increase of mis-alignment angle. (3) If the angles of mis-alignment are less than $1''$, the effect on path difference for plano-concave resonators drop down to 3×10^{-9} , and if the angles of mis-alignment could be further reduced to $0.2''$, the effect on path difference will drop down to 1×10^{-10} .