

# 部分相干光场结构信息经有象差 光学系统传递的机理

陶 纯 堪

(西安应用光学研究所)

## 提 要

本文讨论了部分相干光场经光学系统成象之后在象面上的自由度; 利用成象系统积分方程和照明系统积分方程两步积分方程的共同作用, 解释了部分相干光场自由度经光学系统传递的机理; 同时得到光学系统象差不影响自由度的结论。

关于光学成象自由度(*dof*)或结构信息, 已有不少经典的论述<sup>[1~3]</sup>, 人们重视它是由于物面和象面的信息量与它有密切联系。可以说自由度就是信息的携带元。

Gamo<sup>[2]</sup>成功地用强度矩阵描述一个部分相干光场, 解决了泛指的一个光场的自由度问题。然而他是用抽样函数系 $\{u_m(\xi)\}$ 作为展开 $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$ 的基矢。虽然用抽样函数去逼近一个具有上限频率的信号是方便的, 然而它不便和光学系统的传输特性发生关系。为此, 我们用回转椭球波函数(PSWF)系 $\{\varphi_m(c, \xi)\}$ 作为基矢去展开部分相干光场。

## 一、部分相干光场 *dof* 经理想光学系统的传播

设  $h(x, \xi)$  为理想光学系统点振幅反应函数,  $\Gamma(x_1, x_2)$  为象平面上任意两点  $x_1$  与  $x_2$  之间的相互强度, 则成象方程

$$\Gamma(x_1, x_2) = \iint_S \Gamma(\xi_1, \xi_2) h(x_1, \xi_1) h^*(x_2, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (1)$$

其中  $S$  为物面成象区域。讨论  $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$  经成象系统的传播情况, 把  $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$  用以成象系统回转椭球参数  $c_1 = k\alpha \cdot \frac{S}{2} = \Omega_1 \frac{S}{2}$  为参量的回转椭球波函数  $\varphi_m(c_1, \xi)$  来展开。设

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^N A_{lm}^0 \varphi_l(c_1, \xi_1) \varphi_m^*(c_1, \xi_2), \quad (2)$$

利用  $\varphi_m(c_1, \xi)$  的积分方程

$$\begin{cases} \lambda_l \varphi_l(c_1, x_1) = \int_S h(x_1, \xi_1) \varphi_l(c_1, \xi_1) d\xi_1, \\ \lambda_m^* \varphi_m^*(c_1, x_2) = \int_S h^*(x_2, \xi_2) \varphi_m^*(c_1, \xi_2) d\xi_2, \end{cases} \quad (3)$$

得 
$$\Gamma(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^N A_{lm}^I \varphi_l(c_1, x_1) \varphi_m^*(c_1, x_2), \quad A_{lm}^I = A_{lm}^0 \lambda_l \lambda_m^*. \quad (4)$$

设  $\mathbf{A}^0$  为物方强度矩阵,  $\mathbf{A}^I$  为象方强度矩阵, 则

$$\mathbf{A}^I = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{A}^0 \boldsymbol{\lambda}, \quad (5)$$

式中  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$  是  $\boldsymbol{\lambda}$  的转置矩阵,  $\boldsymbol{\lambda}$  是(3)式的本征值作为对角元素的对角矩阵。考虑到当  $m$  和  $l > N'$  时, 本征值为零, 当  $m$  和  $l \leq N'$  时, 本征值为 1, 其中  $N' = 2c_1/\pi$  (如图 1 所示)。即

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

经成象之后,  $\mathbf{A}^0$  变成  $\mathbf{A}^I$ , 为研究此时的独立信号数目, 必须对  $\mathbf{A}^I$  对角化。因  $\mathbf{A}^I$  与  $\mathbf{A}^0$  一样也是 Hermitian 矩阵, 满足对角化条件。

$$\mathbf{A}^I = \mathbf{D}^+ \mathbf{K} \mathbf{D}, \quad A_{im}^I = \sum_j k_j d_{ij} d_{mj}^*, \quad (7)$$

式中  $\mathbf{K}$  是以  $\mathbf{A}^I$  的本征值  $k_j$  为对角元素的对角矩阵,  $\mathbf{D}$  是一个变换矩阵。

现在考虑象方  $\Gamma(x_1, x_2)$  的独立信号数目, 即  $\mathbf{K}$  的对角元素  $k_j$  的数目, 也就是考虑  $\mathbf{A}^I$  的秩  $R(\mathbf{A}^I)$  以及它和物方  $\mathbf{A}^0$  的秩  $R(\mathbf{A}^0)$  的关系。因为(5)式的  $\boldsymbol{\lambda}$  只有  $N'+1$  个对角元素, 即

$$R(\mathbf{A}^I) = \begin{cases} r, & \text{若 } R(\mathbf{A}^0) = r < N'+1, \\ N'+1, & \text{若 } R(\mathbf{A}^0) = r \geq N'+1, \end{cases} \quad (8)$$

可见象方  $R(\mathbf{A}^I)$ , 或  $\mathbf{K}$  的对角元素数目不超过  $N'+1$  个, 而且对于每个对角元素  $k_j$ , 都有一个对应的本征矢  $d_j$  满足

$$(k_j \mathbf{I} - \mathbf{A}^I) d_j = 0. \quad (9)$$

设物方为相干的, 即物方仅有一个相干信号,  $R(\mathbf{A}^0) = 1$ , 从而  $\mathbf{A}^I$  只有一个本征值, 得

$$dof = 2(N'+1) - 1, \quad (10)$$

若物方为部分相干, 有  $r$  个相干信号叠加,  $R(\mathbf{A}^0) = r < N'+1$ , 则  $R(\mathbf{A}^I) = r$ , 有

$$dof = r[2(N'+1) - 1] - r(r-1), \quad (11)$$

若物方  $R(\mathbf{A}^0) = r \geq N'+1$ , 则  $(dof)_{\max} = (N'+1)^2$ , (12)

对物面每个本征矢的元素数截止于  $N+1$ , 在象面却截止于  $N'+1$ , 且  $N' < N$ 。由(10), (11), (12)式得到结论: 一个部分相干光场经过一个光学系统成象之后, 象面上的  $dof$  较之物面上  $dof$  是明显被减少了。

## 二、光源对部分相干成象 $dof$ 的影响

Beran 和 Parrent<sup>[5]</sup> 及其他作者<sup>[6, 7]</sup>的研究表明, 两点的分辨明显地受该两点相干度  $|\gamma_{12}|$  的影响。但  $dof$  是具有比两点的分辨更为深刻的概念<sup>[9]</sup>, 它讨论的不仅是两个点, 而是整个象面上的分辨, 并取决于任何两点间相干程度的分布, 即取决于  $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$  的分布。

### 1. 从物面被照明系统所照明的角度来分析

令照明系统回转椭球波函数参量  $c_2 = \bar{k}aS/2q = \Omega_2 S/2$ , 其中  $a$  为线光源的半宽度,  $q$  为光源与物面的距离,  $S$  为物面大小。设  $\phi_n(c_2, \xi)$  为以  $c_2$  为参量的 PSWF, 与 (2) 式相似, 物方  $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$  又可表示为

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^N B_{lm}^0 \phi_l(c_2, \xi_1) \phi_m^*(c_2, \xi_2), \quad (13)$$

$$B_{lm}^0 = \frac{1}{\theta_l} \frac{1}{\theta_m} \iint_S \Gamma(\xi_1, \xi_2) \phi_l^*(c_2, \xi_1) \phi_m(c_2, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (14)$$

式中  $\theta_l$  和  $\theta_m$  为波函数  $\phi_l$  和  $\phi_m$  对应的本征值。物方强度矩阵  $B^0$  是  $(N+1) \times (N+1)$  个元素的矩阵, 它已足够精确表示  $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$  的分布。 $B^0$  是 Hermitian 矩阵, 它可找到一个变换矩阵  $U$  使它对角化,

$$B^0 = U^+ \Lambda U, \quad (15)$$

$\Lambda$  是用  $B^0$  的本征值  $\mu_n$  构成的对角矩阵。 $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$  可化为标准型

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2) = \sum_n \mu_n \Psi_n(\xi_1) \Psi_n^*(\xi_2), \quad \Psi_n(\xi) = \sum_m U_{mn} \phi_m(c_2, \xi), \quad (16)$$

(16) 式的目的在于分解部分相干光场为互相独立的相干信号的叠加。

由 Van-Cittert 定理知, 一个扩展的非相干准单色光源所产生的  $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$  由下式<sup>[8]</sup>决定

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2) = C \int_{\text{光源 } \sigma} I(\eta) \exp[i\bar{k}(q_1 - q_2)/q_1 q_2] d\eta. \quad (17)$$

对一维缝光源

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2) = \exp(i\bar{k}\theta) \frac{\sin \bar{k}a(\xi_1 - \xi_2)/q}{\bar{k}a(\xi_1 - \xi_2)/q}, \quad \theta = (\xi_1^2 - \xi_2^2)/2q. \quad (18)$$

如果在平行光照明下, 例如, Köhler 照明<sup>[9]</sup>下, 相位因子  $\exp(i\bar{k}\theta)$  消失, 把光线方向改用角度表示

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2) = \sin \Omega_2 (\xi_1 - \xi_2) / \pi (\xi_1 - \xi_2). \quad (19)$$

对这种光源

$$B_{lm}^0 = \delta_{lm}, \quad B^0 = \Lambda = U = U^+ = I. \quad (20)$$

(16) 式转化为

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2) = \sum_n \phi_n(c_2, \xi_1) \phi_n^*(c_2, \xi_2), \quad \Psi_n(\xi) = \phi_n(c_2, \xi). \quad (21)$$

由文献[4]知波函数  $\phi_n(c_2, \xi)$  满足以 (19) 式为积分核的如下积分方程:

$$\theta_n \phi_n(c_2, \xi_1) = \int_S \frac{\sin \Omega_2 (\xi_1 - \xi_2)}{\pi (\xi_1 - \xi_2)} \phi_n(c_2, \xi_2) d\xi_2, \quad (22)$$

其中  $\theta_n$  为  $\phi_n(c_2, \xi)$  所对应的本征值。由图 3 可知, 在物面存在的  $\phi_n(c_2, \xi)$  数目, 实际上不是无限的, 只有  $N''+1$  个。它也是 (21) 式  $n$  所取的上限值。

### 2. 从物面被成象的角度来分析

这时 (一) 的全部分析都成立。由 (2) 和 (13) 式知, 用两个正交归一的基矢  $\{\phi_m(c_1, \xi)\}$  和  $\{\phi_n(c_2, \xi)\}$  同时表示物面的  $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$ , 它们之间可相互线性地表示为

$$\phi_n(c_2, \xi) = \sum_m V_{nm} \phi_m(c_1, \xi). \quad (23)$$

由文献[4]知波函数  $\phi_m(c_1, \xi)$  满足如下积分方程

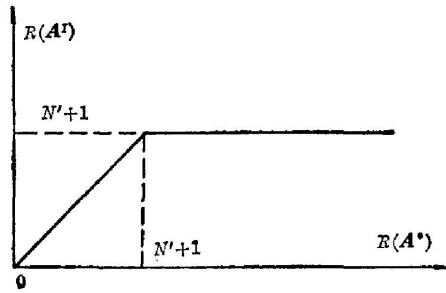


图 2

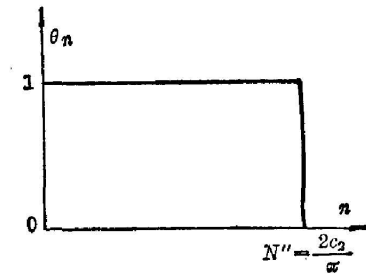


图 3

$$\lambda_m \varphi_m(c_1, x) = \int_s \frac{\sin \Omega_1(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} \varphi_m(c_1, \xi) d\xi, \quad (24)$$

其本征值  $\lambda_m$  和  $\theta_n$  具有相同性质 (如图 2, 图 3 所示)。它们都是在序数分别达到  $2c_1/\pi$  和  $2c_2/\pi$  时陡然下降到零<sup>[3,4]</sup>。能到达象面的  $\varphi_m(c_1, \xi)$  的数目实际上也不是无限的, 而是  $N'+1$  个。这也是 (23) 式  $m$  所取的上限值。任何  $\phi_n(c_2, \xi)$  经成像后到达象面为  $\sum_{m=0}^{N'} V_{mn} \lambda_m \varphi_m(c_1, x)$ 。归结起来, 物面相互强度  $\sin \Omega_2(\xi_1-\xi_2)/\pi(\xi_1-\xi_2)$  受到  $c_2$  的限制只能分别为  $N''+1$  个独立信号  $\phi_n(c_2, \xi)$ , 而组成每个  $\phi_n(c_2, \xi)$  的波函数  $\varphi_m(c_1, \xi)$ , 由于受到  $c_1$  的限制又只有  $N'+1$  个能携带信息达到象面。这就是自由度传递到象方的过程和机理。最后, 用矩阵来表述, 按 (23) 式有

$$\begin{pmatrix} \phi_0(c_2, \xi) \\ \phi_1(c_2, \xi) \\ \vdots \\ \phi_{N''}(c_2, \xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{00} & \cdots & V_{0N'} \\ V_{10} & & V_{1N'} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{N''0} & & V_{N''N'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0(c_1, \xi) \\ \varphi_1(c_1, \xi) \\ \vdots \\ \varphi_{N'}(c_1, \xi) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\text{且} \quad (\phi_n, \phi_{n'}) = \delta_{nn'}, \quad (\varphi_m, \varphi_{m'}) = \delta_{mm'}, \quad (26)$$

从而有关系

$$\sum_{m=0}^{N'} V_{nm} V_{n'm} = \delta_{nm'}. \quad (27)$$

如果令 (25) 式分别为照明波函数对应矩阵  $\Phi$ , 传递矩阵  $V$  和成像波函数对应矩阵  $\varphi$ 。(25) 式为  $\Phi = V\varphi$ 。(21) 式表明半正定双线性函数  $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$  在基矢  $\{\phi_m(c_2, \xi)\}$  之下表示单位为矩阵  $I$ , 即

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2) = \Phi I \Phi = (\phi_0 \cdots \phi_n) \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}. \quad (28)$$

为了讨论到达象面的  $dof$ , 只能在基矢  $\{\varphi_m(c_1, \xi)\}$  之下来考察, 此时  $\Gamma(\xi_1, \xi_2) = \tilde{\varphi}(VIV)\varphi$ , 所以在基矢  $\{\varphi_m(c_1, \xi)\}$  之下  $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$  被表示为  $\tilde{V}IV$ , 即  $\tilde{V}V$ , 这说明自由度传递到象方的过程和机理由  $V$  完全体现。

传递矩阵  $V$  的矩阵元素的列数, 即成像波函数对应矩阵  $\varphi$  的元素数目, 被  $N'$  所限制。 $V$  的矩阵元素的行数, 即照明波函数对应矩阵  $\Phi$  的元素数目, 亦即数  $r$ , 被  $N''$  所限制。矩阵  $V$  的所有元素考虑了 (27) 式所带来的  $dof$  的减少, 完全确定了在具体照明条件下成像光学系统所具有的  $dof$ , 即

$$dof = (N'' + 1) [2(N' + 1) - 1] - (N'' + 1)N'', \quad (29)$$

其中  $N' = 2c_1/\pi$ ,  $c_1 = \bar{k}\alpha \frac{S}{2}$ ,  $N'' = 2c_2/\pi$ ,  $c_2 = \frac{\bar{k}a}{q} \cdot \frac{S}{2}$ 。

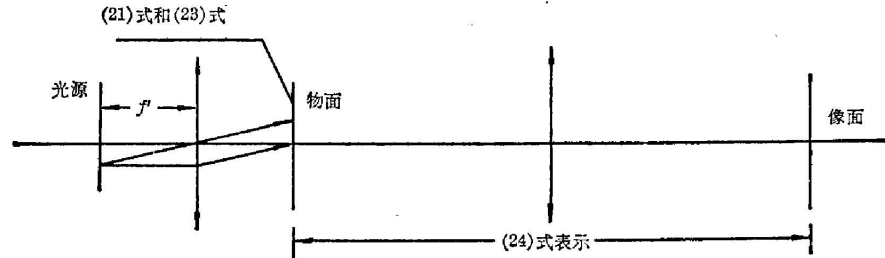


图 4

至此,我们完成了自由度表达式 (29), 它表明: 照明系统参数和成像系统参数共同决定了到达象面的信息量。只有成像系统和光源恰当匹配使  $c_1 = c_2$ , 则  $N' = N''$ , 照明系统孔径角等于成像系统孔径角, 系统可达  $(dof)_{\max} = (N' + 1)^2$ 。它是由成像系统孔径和物面成像区域的大小所决定。达到  $(dof)_{\max}$  后, 再增大光源, 只会增加物面的非相干程度, 而不可能增加到到达象面的自由度数。

### 三、部分相干光场 $dof$ 经有象差光学系统传播

设光学系统有象差时, 点振幅分布函数

$$S(x, \xi) = \int_{-w}^w e^{iA(\nu)} e^{i2\pi\nu(x-\xi)} d\nu, \quad (30)$$

其中  $A(\nu)$  为系统波象差函数。成像方程为

$$\Gamma(x_1, x_2) = \iint_S \Gamma(\xi_1, \xi_2) S(x_1, \xi_1) S^*(x_2, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (31)$$

$$\begin{cases} G'_m(x) = \int_S S(x, \xi) \varphi_m(c_1, \xi) d\xi, \\ G'_m(x) = \lambda_m G_m(x) = \lambda_m \int_{-\infty}^{\infty} S(x, \xi) \varphi_m(c_1, \xi) d\xi. \end{cases} \quad (32)$$

由于  $S(x, \xi)$  是 non-Hermitian<sup>[10]</sup>, 不存在以它为核的本征积分方程, 物象无共同正交本征函数系, 只有  $\{G_m(x)\}$  才构成象方的正交归一函数系

$$\langle G_m(x) | G_l(x) \rangle = \delta_{ml}. \quad (33)$$

与(4)式相似有

$$\Gamma(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^N A_{lm}^I G_l(x_1) G_m^*(x_2), \quad A_{lm}^I = A_{lm}^0 \lambda_l \lambda_m^*, \quad (34)$$

与(7)式相似把  $A^I$  对角化。从而得到结论: 象差并不影响部分相干光场的  $dof$ , (一)的结论在有象差时依然成立。关于(二)的内容, 虽然成像系统有象差但与照明系统无关, 积分方程(22)式依然成立。虽然点振幅分布  $S(x, \xi)$  为 non-Hermitian, 但却可以构成二次叠核

$$U(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} S(z-x) S^*(z-\xi) dz, \quad (35)$$

$U(x, \xi)$  却是 Hermitian, 成像系统必然存在如下本征方程

$$\beta_m \mathcal{T}_m(x) = \int_s U(x, \xi) \mathcal{T}_m(\xi) d\xi. \quad (36)$$

把(30)式代入(35)式得

$$U(x, \xi) = \frac{\sin \Omega_1(x-\xi)}{\pi(x-\xi)}. \quad (37)$$

可见(36)式不是别的,正是积分方程(24)式,说明它在有象差时依然成立。但此时已不代表由物方到象方的实际传递。因为其核  $\sin \Omega_1(x-\xi)/\pi(x-\xi)$  已不是真实的点振幅分布,而是点振幅分布  $S(x, \xi)$  的二次迭核。这时的真实传递是用(32)式来表示,说明在象差条件下,任何  $\phi_n(c_2, \xi)$  经(32)式成象之后为  $\sum_{m=0}^{N'} V_{nm} \lambda_m G_m(x)$ 。其中体现自由度传递过程的传递矩阵  $V$  仍然成立,只不过象方是用  $\{G_m(x)\}$  来描述而已。因此自由度表达式(29)也仍然成立。象差不改变自由度的原因在于  $S(x, \xi)$  的频谱只有相位部分,内积关系  $(G_m, G_n) = (\varphi_m, \varphi_n)$  成立,物方一个波函数与对应的象方一个波函数所占有的能量是不变的。

### 参 考 文 献

- [1] D. Gabor; «*Optical and Acoustical Holography*», (Ed. by E. Camatini; Plenum Press. New York-London, 1972).
- [2] H. Gamo; «*Progress in Optics*», (Amsterdam North-Holland, 1964), Vol. 3.
- [3] G. Toraldo di Francia; *J. O. S. A.*, 1969, **59**, No. 7 (Jul), 799.
- [4] D. Slepian, H. O. Pollak; *Bell Syst. Tech. J.*, 1961, **40**, No. 1 (Jan), 43.
- [5] M. Beran, G. B. Parrent; «*Theory of Partial Coherence*», (Prentice-Hall international Teries in Physics).
- [6] Brian, J. Thompson; «*Progress in Optics*», (Amsterdam North-Holland, 1969), Vol. 7.
- [7] Mehta, B. L.; *Opt. Commun.*, 1973, **9**, No. 4 (Dec), 364.
- [8] H. Lápson; «*Optical Transforms*», (Academic Press. London, New York, 1972).
- [9] M. Born, E. Wolf; «*Principles of Optics*», (Pergamon Press., 1959).
- [10] P. De. Santis, C. Palma; *Opt. Acta*, 1976, **23**, No. 9 (Sep), 743.

## The transfer mechanics of structural information in an optical field under the illumination of partially coherent light through an optical system suffering from aberration

TAO CHUNKAN

(Xian Institute of Applied Optics)

(Received 22 June 1981, revised 20 November 1981)

### Abstract

The paper describes degrees of freedom in an imaged plane when its object plane under the illumination of partially coherent light is imaged through an optical system. It also shows the transfer mechanism of degrees of freedom through an optical system by means of both imaging integral equation and illuminative integral equation. The conclusion is that the aberration of an optical system will not change the degrees of freedom.