

# 双光子激光器的速率方程理论

林福成

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

## 摘 要

用速率方程的方法研究了双光子激光器和双光子激光放大器,得到了双光子激光器的基本方程,同时研究了稳态解的稳定性问题。用计算机模拟计算了大范围偏离稳态值时的时间演化。双光子激光器必须有高于阈值的集居数反转和起动的触发脉冲。讨论了产生巨脉冲的方法。根据已知的数值指出建立双光子激光器的可能性,无多普勒加宽的双光子激光器要求低得多的阈值和苛刻得多的频率匹配,但可望在激光光谱学和基准测量中得到应用。双光子激光放大器对波形有严重的畸变,并对输入脉冲的强度存在着强烈的非线性依赖关系。

## 一、引 言

双光子激光器是由 Prokhorov<sup>[1]</sup>和 Sorokin<sup>[2]</sup>等人最早提出的。正如文献[1]所指出的那样,双光子激光器由于需要起动的触发输入,因此有很高的储能。此外,两个光子的能量之和只要等于有关的两个能级能量之差,即双光子共振,对单独一个光子的能量没有限制,所以有希望建立频率大幅度可调的激光器。

此后, Carman 从理论上考虑了双光子激光放大器的特性<sup>[3]</sup>,他认为这是一种利用非线性效应的器件,可以改变输入光脉冲的形状和频率,因此可用于激光核聚变的向心压缩,或者用以产生极短波长的激光。Narducci 考虑了输入光脉冲远小于原子系统的弛豫时间,得到双光子激光放大器的近似分析解和计算机模拟解<sup>[4]</sup>。Hoshimiya 等人<sup>[5]</sup>用半经典的处理方法,求出了简并的双光子激光器的反转集居数和初始光强的阈值。

最近,在实验方面也取得了进展。Welling 所领导的小组实现了中间态近共振的非简并双光子激光器<sup>[6]</sup>。Toschek 的小组则声称观察到简并和非简并的双光子激光放大效应<sup>[7]</sup>。

本文用计算机对速率方程模拟求解,得到解的稳定性(小幅度偏离平衡值)判断。对于大幅度偏离平衡值,则有可能得到类似于单光子激光器的调Q性能。对于激光放大器,也容易求出对放大波形的畸变,其非线性畸变的程度比单光子激光放大器更为严重。

## 二、基本方程和简化模型

考虑一个二能级系统,低能态  $g$  和高能态  $e$ 。泵浦源对它们的泵浦率分别为  $\lambda_g$  和  $\lambda_e$ , 它们的衰减率分别为  $1/\tau_g$  和  $1/\tau_e$ 。辐射场的频率为  $\nu_1$  和  $\nu_2$ , 满足共振条件:  $h\nu_1 + h\nu_2 = E_e - E_g$ 。当  $\nu_1 = \nu_2$  时称为简并,否则为非简并,见图1。令能级  $g$  和  $e$  上的集居数分别为

$n_g$  和  $n_e$ , 在辐射场作用下, 跃迁几率为  $W$ 。这时, 集居数的速率方程为

$$\begin{aligned} \partial n_e / \partial t &= \lambda_e - n_e / \tau_e - (n_e - n_g) W, \\ \partial n_g / \partial t &= \lambda_g - n_g / \tau_g + (n_e - n_g) W. \end{aligned}$$

当  $\nu_1 = \nu_2$  时, 迎面入射的两束光可以消除一级 Doppler 效应<sup>[8,9]</sup>。令  $D = (n_e - n_g)$  为反转的集居数, 集居数速率方程可化为

$$\frac{\partial D}{\partial t} = (\lambda_e - \lambda_g) - \frac{n_e}{\tau_e} + \frac{n_g}{\tau_g} - 2DW. \quad (1)$$

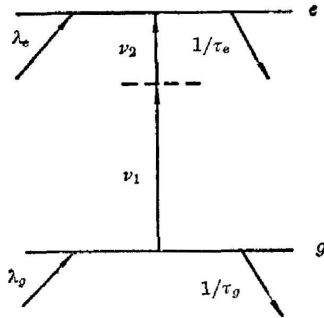


图 1 二能级模型

Fig. 1 A two-level model

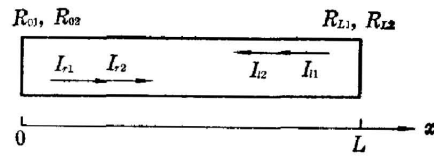


图 2 双光子激光器

Fig. 2 A two-photon laser

图 2 是激光器的示意图, 激光器的长度为  $L$ ,  $I$  表示光子数, 脚标 1 和 2 分别代表  $\nu_1$  和  $\nu_2$ ,  $r$  和  $l$  分别代表向右和向左的传播方向,  $R$  为反射镜的反射率,  $O$  和  $L$  代表激光器两端。由于我们对电磁场只用光子数  $I$  来描写, 所以可以不考虑相干效应。(1) 式中的  $W$  可表示为

$$W = \sigma (I_{r1} + I_{l1}) (I_{r2} + I_{l2}), \quad (2)$$

其中  $\sigma$  是双光子跃迁截面, 但对于图 2 中的每一束光子流, 例如  $I_{r1}$ , 感应跃迁引起的增量仅为  $\sigma D (I_{r2} + I_{l2}) I_{r1}$ , 这是因为  $I_{r1}$  只感应和它本身方向相同的跃迁。假设传播的衰减系数分别为  $\beta'_1$  和  $\beta'_2$ , 介质中的光速为  $v$ , 则光子数的方程为

$$\left. \begin{aligned} \partial I_{r1} / \partial x + (1/v) (\partial I_{r1} / \partial t) &= [\sigma D (I_{r2} + I_{l2}) - \beta'_1] I_{r1}, \\ \partial I_{r2} / \partial x + (1/v) (\partial I_{r2} / \partial t) &= [\sigma D (I_{r1} + I_{l1}) - \beta'_2] I_{r2}, \\ -\partial I_{l1} / \partial x + (1/v) (\partial I_{l1} / \partial t) &= [\sigma D (I_{r2} + I_{l2}) - \beta'_1] I_{l1}, \\ -\partial I_{l2} / \partial x + (1/v) (\partial I_{l2} / \partial t) &= [\sigma D (I_{r1} + I_{l1}) - \beta'_2] I_{l2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

对方程 (1)、(2) 和 (3) 的求解, 可模仿 Микаэлян 等人<sup>[10]</sup>的方法来进行(见附录 1)。最后得到光子方程为:

$$(1/v) (\partial \bar{I}_{+1} / \partial t) = \sigma \bar{D} \bar{I}_{+1} \bar{I}_{+2} - \beta_1 \bar{I}_{+1}; \quad (1/v) (\partial \bar{I}_{+2} / \partial t) = \sigma \bar{D} \bar{I}_{+1} \bar{I}_{+2} - \beta_2 \bar{I}_{+2}, \quad (4)$$

其中  $\beta_{1,2} = \beta'_{1,2} + \beta_{s1,s2}$ 。集居数方程为

$$(\partial \bar{D} / \partial t) = (\lambda_e - \lambda_g) - \bar{n}_e / \tau_e + \bar{n}_g / \tau_g - 2\sigma \bar{D} \bar{I}_{+1} \bar{I}_{+2}. \quad (5)$$

(4) 和 (5) 式, 就是激光振荡器的基本方程。

### 三、双光子激光器的稳态解和非稳解

双光子激光器的稳态解可令 (4) 和 (5) 式分别等于零而得到。这时有

$$\bar{D} = D_0 / (1 + 2\sigma\tau\bar{I}_{+1}I_{+2}), \tag{6}$$

$$\bar{I}_{+1} = (D_0/4\tau\beta_1) \pm [(D_0/4\tau\beta_1)^2 - (\beta_2/2\sigma\tau\beta_1)]^{1/2}, 0, \tag{7a}$$

$$\bar{I}_{+2} = (\beta_1/\beta_2)\bar{I}_{+1}, \tag{7b}$$

其中  $D_0 = \lambda_e\tau_e - \lambda_g\tau_g$  为无激光时的集居数之差(初始反转数);  $\tau = \tau_e + \tau_g$ 。图 3 为  $\bar{I}_{+1}$  与  $D_0$  的关系曲线, 其中  $\bar{I}_{+1}$  的单位为  $(\beta_2/2\sigma\tau\beta_1)^{1/2}$ ,  $D_0$  的单位为  $2(2\tau\beta_1\beta_2/\sigma)^{1/2}$ 。由图可见,  $D_0$  有一个阈值, 这时  $\bar{I}_{+1}$  有三个解: 若  $D_0$  低于此阈值  $(2(2\tau\beta_1\beta_2/\sigma)^{1/2})$ , 则  $\bar{I}_{+1}$  只有零解。用计算机模拟计算表明, (7a) 中取负号的一支是不稳定解, 其他两支为稳定解。(7b) 指出, 光子数和衰减系数成反比。考虑到  $\bar{I}_{+1}\beta_1$  和  $\bar{I}_{+2}\beta_2$  分别为  $\nu_1$  和  $\nu_2$  的光子流经单位长度的损失量, (7b) 说明它们的数值是相同的, 其物理意义是每一个跃迁产生相同数目的  $\nu_1$  光子和  $\nu_2$  光子。所以如果光路上的损耗很小, 主要损耗是由透过镜片时引起的, 因而 (7b) 说明稳态工作的双光子激光器输出的  $\nu_1$  光子数和  $\nu_2$  光子数相等, 换句话说, 波长短的激光比波长长的激光有更大的输出功率, 而不管镜片对此两波长的反射率如何。

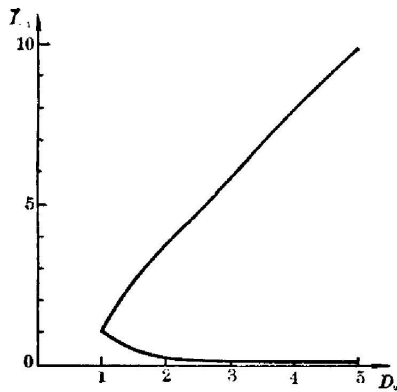


图 3 稳态光子流  $\bar{I}_{+1}$  和初始反转  $D_0$  的关系  
上面的一支和  $\bar{I}_{+1}=0$  是稳定解, 中间的一支  
是非稳定解

Fig. 3 The steady photon flux  $\bar{I}_{+1}$  versus the initial inversion  $D_0$ .

The upper branch and  $\bar{I}_{+1}=0$  are stable solutions, the middle branch is unstable solution

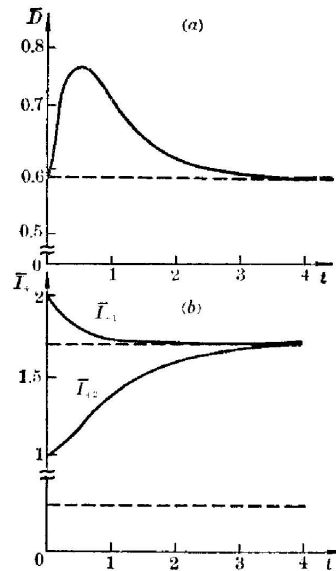


图 4 大范围偏离稳定的稳态解  
(a) 虚线为稳态解。(b) 上虚线为稳定的稳态解, 下虚线为不稳定的稳态解

Fig. 4 Large deviation from the stable steady solution

(a) Dash line is the stable value. (b) The upper and lower dash lines are the stable and unstable values respectively

现在讨论稳态解(6)和(7)的稳定性, 把方程(4)和(5)在稳态解(6)和(7)附近展开并且线性化, 利用 Lyapunov 定理, 容易证明(7a)中取负号的解(与之相应的还有(6)和(7b)的解)是不稳定的, 而取正号的解和零解是稳定的。现在用计算机的模拟解来研究大范围偏离平衡值时双光子激光器的行为, 为了计算方便, 取  $\nu = \tau_g = \tau_e = \tau = \beta_1 = \beta_2 = \sigma = 1$ ,  $D_0 = 4$ 。这时对应的稳定稳态值(6)和(7)为:  $\bar{D} = 0.5855793$ ,  $\bar{I}_{+1} = \bar{I}_{+2} = 1.7071067$  和  $\bar{D} = 4$ ,  $\bar{I}_{+1} = \bar{I}_{+2} = 0$ 。不稳定的稳态值为:  $\bar{D} = 3.4142126$ ,  $\bar{I}_{+1} = \bar{I}_{+2} = 0.2928933$ 。图 4 表示  $t=0$  时,  $\bar{I}_{+1}=2$  和  $\bar{I}_{+2}=1$  的情况。由图可见, 只要  $\bar{I}_{+1}$  和  $\bar{I}_{+2}$  都大于 0.2929, 其渐近行为还是趋向

于稳定的稳态解。类似的计算机模拟表明, 当  $\bar{I}_{+1}=2, \bar{I}_{+2}=0.1$  (小于  $0.2929$ ), 则渐近行为也趋向于稳态解。但是, 当  $\bar{I}_{+1}=1$  (小于稳定的  $1.707$ , 大于不稳定的  $0.2929$ ) 和  $\bar{I}_{+2}=0.1$  时, 其渐近行为则趋向于零解:  $\bar{I}_{+1}(t \rightarrow \infty) = \bar{I}_{+2}(t \rightarrow \infty) = 0$ 。研究  $\bar{D}$  大范围偏离稳定的稳态值也是很有意义的。模拟计算表明, 当  $t=0$  时取  $\bar{D}=0, \bar{I}_{+1}=\bar{I}_{+2}=1.7071$ , 其渐近行为仍是趋向于稳定的非零解:  $\bar{D}=0.5856, \bar{I}_{+1}=\bar{I}_{+2}=1.7071$ 。

对于不稳定的非零解, 需要知道扰动后的稳定值是否为零解。计算表明, 当  $t=0$  时  $\bar{I}_{+1}$  和  $\bar{I}_{+2}$  都大于非稳定的稳态值, 则渐近行为趋向于非零的稳定稳态值; 若初始的  $\bar{I}_{+1}$  和  $\bar{I}_{+2}$  都小于非稳定的稳态值, 则趋向于零解, 如果  $\bar{I}_{+1}$  和  $\bar{I}_{+2}$  分别大于和小于非稳的稳态值, 则要具体计算。图 5 给出了趋向于非零解的例子; 图 6 给出了趋向于零解的例子。

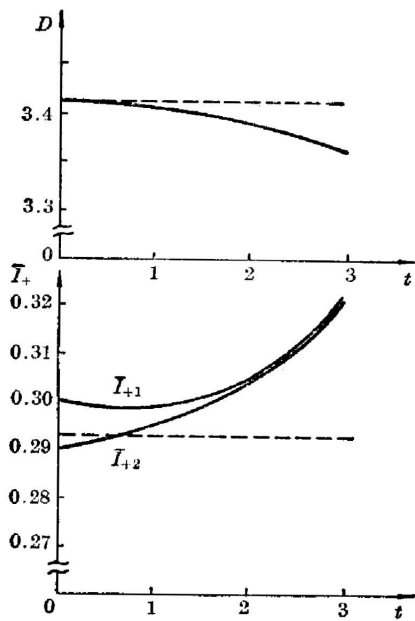


图 5 初始值  $\bar{I}_{+1}=0.30$  和  $\bar{I}_{+2}=0.29$  的情况  
Fig. 5 The time evolution for initial values:  
 $\bar{I}_{+1}=0.3$  and  $\bar{I}_{+2}=0.29$

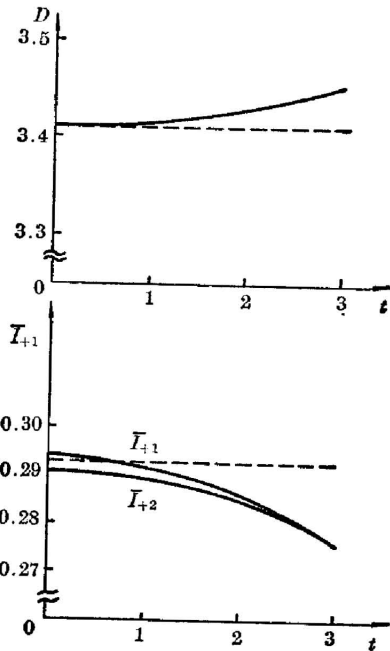


图 6 初始值  $\bar{I}_{+1}=0.2929$  和  $\bar{I}_{+2}=0.29$  的情况  
Fig. 6 The time evolution for initial values:  
 $\bar{I}_{+1}=0.2929$  and  $\bar{I}_{+2}=0.29$

根据上述的讨论, 再参照图 3, 可以得到下述的结论: (1) 若初始反转  $D_0$  小于阈值  $2(2\tau\beta_1\beta_2/\sigma)^{1/2}$ , 则不论初始的光子流强度如何, 都不能振荡; (2) 若初始反转  $D_0$  大于上述的阈值, 振荡的充分条件是:

$$\bar{I}_{+1}(t=0) > (D_0/4\tau\beta_1) - [(D_0/4\tau\beta_1)^2 - (\beta_2/2\sigma\tau\beta_1)]^{1/2}; \quad \bar{I}_{+2}(t=0) > (\beta_1/\beta_2)\bar{I}_{+1}. \quad (8)$$

振荡的稳定值为:

$$I_{+1} = (D_0/4\tau\beta_1) + [(D_0/4\tau\beta_1)^2 - (\beta_2/2\sigma\tau\beta_1)]^{1/2}; \quad \bar{I}_{+2} = (\beta_1/\beta_2)\bar{I}_{+1}. \quad (9)$$

上述的结论也为计算机的模拟解所证实, 这时取  $\bar{D}(t=0) = D_0$ , 而不是取(6)式的稳态值。此外, 计算机的模拟解还表明, 只要某一个频率的初始光强(例如  $\bar{I}_{+1}$ ) 足够强, 则另一个频率的初始光强不一定要满足(9)式, 也能够建立起稳定的振荡, 图 5 就是一个例子。

因此, 双光子激光器必须要有起动的“触发”输入脉冲才能工作, “触发”脉冲的强度随

$D_0$  的增大而减弱。这可以从(8)看出:当根号内的第一项远大于第二项时,需要的“触发”脉冲的强度为  $\bar{I}_{+1}, \bar{I}_{+2} \rightarrow 0$ 。

利用双光子激光器的工作需要触发脉冲这一特点,可以制成高储能的激光器件,类似于单光子激光器的调 Q 器件。这时,代替谐振腔的 Q 值突变,是腔内初始场强的突变。类似于单光子激光器的调 Q 工作,在短的时间间隔内可以忽略(5)式中泵浦和弛豫的效应,即略去等号右边的前三项,只保留最后一项,代表双光子的感应跃迁引起的集居数的变化。为了定性的讨论,可以令  $\beta_1 = \beta_2$ 。如果输出的初始脉冲强度  $\bar{I}_{+1}$  和  $\bar{I}_{+2}$  也相等,则由对称性可以推出,  $\bar{I}_{+1}$  和  $\bar{I}_{+2}$  随时间的演化是完全一样的。我们只用两个方程来描述场和集居数:

$$(1/v)(\partial \bar{I}_+ / \partial t) = \sigma \bar{D} \bar{I}_+^2 - \beta \bar{I}_+; \quad (10a)$$

$$(\partial \bar{D} / \partial t) = -2\sigma \bar{D} \bar{I}_+^2. \quad (10b)$$

在  $t=0$  时,由于  $\bar{D}$  很大,可以略去(10a)中等号右边的第二项,再近似取  $\bar{D} = D_0$ , 得到(10a)的解为:

$$\bar{I}_+ = \bar{I}_+(t=0) / [1 - \bar{I}_+(t=0) \sigma v D_0 t]. \quad (11)$$

取(11)式中分母等于零的时间  $t_1$  为由触发到建立起强脉冲的时间,  $t_1 = 1 / \sigma v D_0 \bar{I}_+(t=0)$ 。在此之后,  $\bar{D}$  被消耗尽。只考虑(10a)中等式右边第二项的作用,即  $\bar{I}_+ \sim \exp(-\beta t)$ 。注意(11)式所描述的过程在  $t_1$  附近的变化是很陡的,所以  $t_1$  不能当成脉冲的前沿宽度,它比  $t_1$  要短得多;而脉冲后沿宽度约为  $t_2 = 1/\beta$ 。要得到(10)式的分析解是很困难的,图 7 是方程(4)和(5)的计算和模拟解,参数取  $v = \tau_p = \tau_o = \beta_1 = \beta_2 = \sigma = 1$ ,  $D_0 = 50$ ,  $\bar{I}_+(t=0) = 0.3$ 。虚线是(11)式,可见在脉冲的建立阶段,(11)式还是较好地描述了这个过程。脉冲的后沿,由于我们选择的参数,时间大约为 1 的量级。用腔倒空的技术,可以把后沿缩短到  $(2L/v)$  的量级。

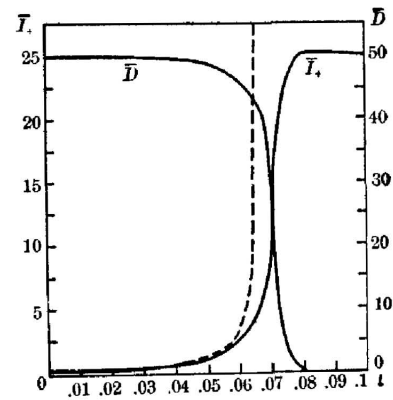


图 7 巨脉冲工作模式。  $D_0 = 50$ ,  $\bar{I}_+(t=0) = 0.3$ 。其他参数见正文。虚线是(11)式

Fig. 7 Giant-pulse mode.  $D_0 = 50$ ,  $\bar{I}_+(t=0) = 0.3$ . Other parameters are in the article. The dash line is eq. (11)

#### 四、无 Doppler 宽度的双光子激光器

现在我们对实验上典型的参量进行估算。假定我们的激光介质是原子气体,气压约为 10 torr,对应的  $N_0$  约为  $3 \times 10^{17}/\text{cm}^{-3}$ 。假定其中有 1/300 能被反转:  $D_0 \sim 10^{15}/\text{cm}^{-3}$ 。双光子共振截面  $\sigma$  可以这样来估算:对于无 Doppler 加宽的双光子跃迁几率, Cagnac 等人<sup>[9]</sup>推导出对于  $\lambda = 600 \text{ nm}$  荧光和功率密度  $1 \text{ W}/\text{mm}^2$ , 跃迁几率为  $1 \text{ s}^{-1}$ , 这相当于  $\sigma \sim 10^{-41} \text{ s} \cdot \text{cm}^4$ 。由于在一般的情况下,我们只能得到 Doppler 加宽的谱线, Doppler 宽度约为自然线宽的  $10^3$  倍。 Vasilenko<sup>[8]</sup>等人从理论上推导出, Doppler 宽度下的谱线面积约为无多普勒线宽下面积的 1/2, 因此有 Doppler 加宽的  $\sigma$  约为  $10^{-44} \text{ s} \cdot \text{cm}^4$ 。假定一米长的管子,端面镜子的反射率为 99%, 则对应的  $\beta \sim 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$ ,  $\tau = 10^{-8} \text{ sec}$ 。利用这些参数,得到阈值的  $D_0$  约为  $3 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , 可见要实现双光子激光器的可能性是存在的。

非简并的双光子激光器的输出谱宽主要受 Doppler 宽度限制,但由于需要起动的触发输入,输入光的频率除了要在 Doppler 宽度之内,还要同时满足谐振腔的谐振条件。这一点可以用宽谱带的输入来满足这一要求。

如果双光子激光器工作于简并状态( $\nu_1 = \nu_2$ ),则无 Doppler 加宽的  $\sigma$  远远大于有 Doppler 加宽的  $\sigma$ , 更容易达到阈值的反转数(附录 2)。虽然简并的双光子激光器的阈值很低,但是只能单模工作,输出谱宽只受自然线宽限制,因此谐振腔事先要调整到自然线宽以内。这样的激光器在激光光谱学和基准测量学上将具有重要的用途。

## 五、双光子激光放大器

如果在图 2 中取走两端的腔片, 只从激光介质之外从左向右输入  $\nu_1$  和  $\nu_2$  的光, 则就成为双光子激光放大器的示意图。由于感应跃迁是非线性的, 所以对输入波形的畸变将比单光子激光放大器严重得多。我们只对短脉冲的放大感兴趣, 所以可以不考虑放大介质的泵浦和弛豫效应。描写光子和集居数的方程为:

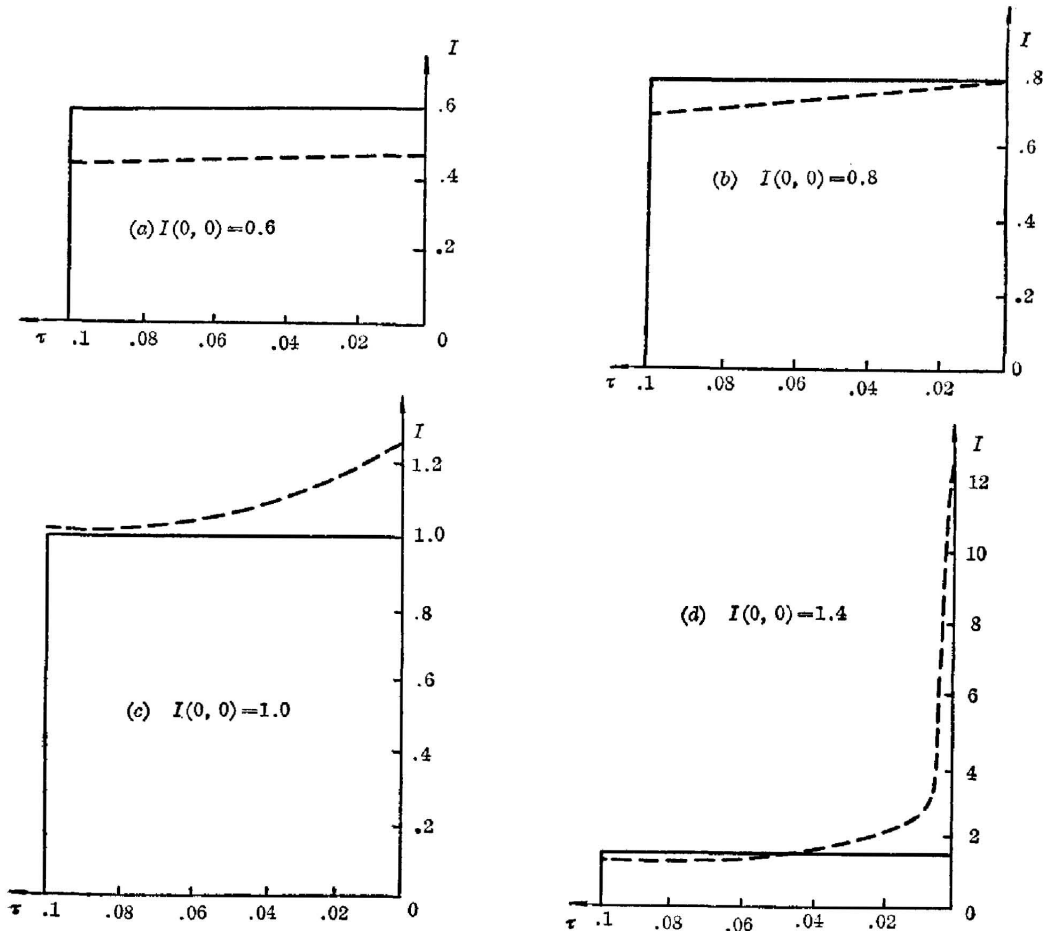


图 8 双光子激光放大器的波形畸变。实线是输入脉冲  $I(0, \tau)$ , 虚线是输出脉冲  $I(1, \tau)$

Fig. 8 The wave-form distortion in a two-photon laser amplifier. The full line is the input  $I(0, \tau)$ , and the dash line is the output  $I(1, \tau)$

$$\begin{aligned} (\partial/\partial x + \partial/v\partial t)I_1 &= \sigma DI_1I_2 - \beta_1 I_1; \\ (\partial/\partial x + \partial/v\partial t)I_2 &= \sigma DI_1I_2 - \beta_2 I_2; \\ \partial D/\partial t &= -2\sigma DI_1I_2. \end{aligned}$$

引入  $\beta_1$  和  $\beta_2$  代表传输损耗, 则此方程组很难得到分析解。为此我们引入变数变换:  $\xi = x/v, \tau = t - x/v$ 。方程组变为:

$$\begin{aligned} \partial I_1/\partial \xi &= (\sigma DI_1I_2 - \beta_1 I_1)v; \\ \partial I_2/\partial \xi &= (\sigma DI_1I_2 - \beta_2 I_2)v; \\ \partial D/\partial \tau &= -2D\sigma I_1I_2. \end{aligned}$$

必须注意的是,  $I(0, \tau)$  代表放大器输入端的波形,  $I(L/v, \tau)$  代表放大器输出端的波形。偏微分方程组的边界值  $D(\xi, 0)$  和  $I(0, \tau)$  是事先知道的, 因此容易用计算机模拟求解。具体的计算例子见附录 3。

图 8 为  $I_1 = I_2$  的计算机计算值, 这时前沿能被放大的  $I$  输入值为 0.8, 脉冲前沿粒子数消耗光的输出值约为 1。图 8(a) 为输出值  $I = 0.6$  的情况, 8(b) 为  $I = 0.8$ , 8(c) 为  $I = 1$ , 8(d) 为  $I = 1.4$  的情况。

图 9 为  $I_1 \neq I_2$  的计算机计算值, 设固定输入  $I_1$  为 4, 则  $I_2$  输入值由 0.1 增加到 0.3 时, 波形发生了严重的变化。

双光子放大器的这种非线性特性可望在超短脉冲和光逻辑器件上得到应用。

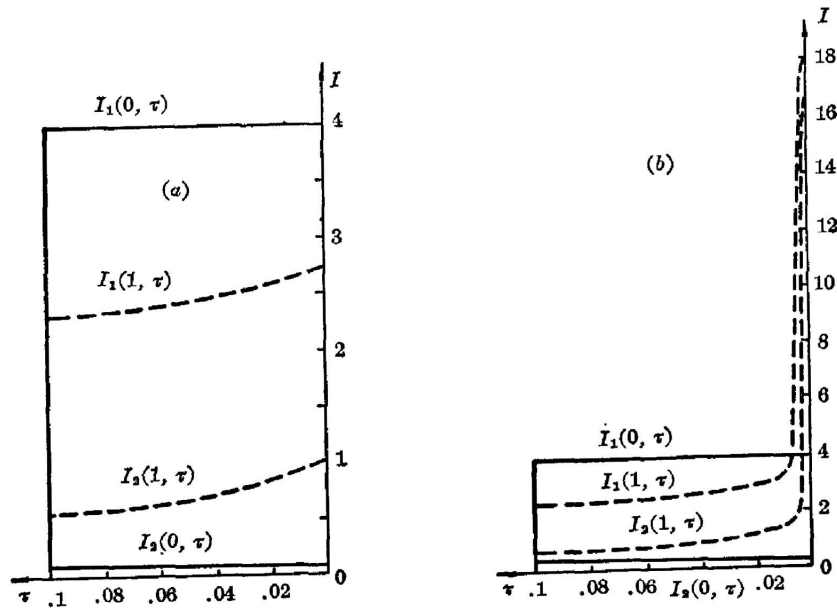


图 9 双光子激光放大器中的波形畸变,  $I_1(0, \tau) \neq I_2(0, \tau)$   
 Fig. 9 The wave-form distortion in a two-photon laser amplifier,  $I_1(0, \tau) \neq I_2(0, \tau)$

### 附录 1

对方程式 (1)、(2) 和 (3) 求解时, 边界条件为:  $x=0, I_{r1} = I_{l1} \cdot R_{01}, I_{r2} = I_{l2} \cdot R_{02}; x=L, I_{l1} = I_{r1} \cdot R_{L1}, I_{l2} = I_{r2} \cdot R_{L2}$ 。定义:  $I_{+1} = I_{r1} + I_{l1}, I_{-1} = I_{r1} - I_{l1}; I_{+2} = I_{r2} + I_{l2}, I_{-2} = I_{r2} - I_{l2}$ 。(3) 式化为:

$$\left. \begin{aligned} \partial I_{-1}/\partial x + (1/v)(\partial I_{+1}/\partial t) &= (\sigma D I_{+2} - \beta'_1) I_{+1}; \\ \partial I_{-2}/\partial t + (1/v)(\partial I_{+2}/\partial t) &= (\sigma D I_{+1} - \beta'_2) I_{+2} \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

令:  $\bar{I}_{+1}(t) = (1/L) \int_0^L I_{+1}(x, t) dx$ ,  $\bar{I}_{+2}(t) = (1/L) \int_0^L I_{+2}(x, t) dx$ 。

把(I)式乘上  $(1/L) \int_0^L dx$ , 得到:

$$(1/L)(I_{-1}(L) - I_{-1}(0)) + \partial \bar{I}_{+1}/v \partial t = (\sigma/L) \int_0^L D I_{+1} I_{+2} dx - \beta'_1 \bar{I}_{+1},$$

$$(1/L)(I_{-2}(L) - I_{-2}(0)) + \partial \bar{I}_{+2}/v \partial t = (\sigma/L) \int_0^L D I_{+1} I_{+2} dx - \beta'_2 \bar{I}_{+2}.$$

认为集居数和光子流与各自平均值之差是一阶小量。

$$D(x, t) = \bar{D}(t) + \delta D(x, t); \quad I_{+1}(x, t) = \bar{I}_{+1}(t) + \delta I_{+1}(x, t); \quad I_{+2}(x, t) = \bar{I}_{+2}(t) + \delta I_{+2}(x, t).$$

忽略二阶小量, 得到:

$$(I_{-1}(L) - I_{-1}(0))/L + (\partial \bar{I}_{+1}/\partial t)/v = \sigma \bar{D} \bar{I}_{+1} \bar{I}_{+2} - \beta'_1 \bar{I}_{+1};$$

$$(I_{-2}(L) - I_{-2}(0))/L + (\partial \bar{I}_{+2}/\partial t)/v = \sigma \bar{D} \bar{I}_{+1} \bar{I}_{+2} - \beta'_2 \bar{I}_{+2}.$$

利用边界条件和前面的定义, 再引入反射镜的等效衰减系数  $\beta_s$ :

$$\beta_{s1} = \ln(1/R_{01}R_{L1})/2L \approx ((1-R_{01})/(1+R_{01}) + (1-R_{L1})/(1+R_{L1}))/L;$$

$$\beta_{s2} = \ln(1/R_{02}R_{L2})/2L \approx ((1-R_{02})/(1+R_{02}) + (1-R_{L2})/(1+R_{L2}))/L.$$

最后推导出(4)式。

## 附 录 2

首先假定  $\nu_1 \approx \nu_2$  (近简并), 但不完全相等, 这时有剩余的 Doppler 加宽, 但比原来的 Doppler 宽度小得多。所以只有右行的波才能和左行的波共同引起感应跃迁。代替附录 1 中(I)式的式子为:

$$(\partial I_{-1}/\partial x) + (1/v)(\partial I_{+1}/\partial t) = D\sigma(I_{r1}I_{l2} + I_{r2}I_{l1}) - \beta_1 I_{+1};$$

$$(\partial I_{-2}/\partial x) + (1/v)(\partial I_{+2}/\partial t) = D\sigma(I_{r1}I_{l2} + I_{r2}I_{l1}) - \beta_2 I_{+2}.$$

认为  $I_+ \gg I_-$ ,  $I_r \approx I_l = I_+/2$ , 则方程组化为:

$$(1/v)(\partial I_{+1}/\partial t) = (\sigma/2) D I_{+1} \cdot I_{+2} - \beta_1 I_{+1}; \quad (1/v)(\partial I_{+2}/\partial t) = (\sigma/2) D I_{+1} I_{+2} - \beta_2 I_{+2};$$

$$(\partial D/\partial t) = (\lambda_e - \lambda_g) - n_e/\tau_e + n_g/\tau_g - 2(\sigma/2) D I_{+1} I_{+2}.$$

和(4)、(5)式相比, 可见只要把  $\sigma$  换成  $(\sigma/2)$  就成为完全简并的情况,  $I_{+1} = I_{+2} = I_+$ , 并且一次跃迁变化两个光子, 方程组变为:

$$(1/v)(\partial I_{+1}/\partial t) = \sigma D I_+^2 - \beta_1 I_+;$$

$$(\partial D/\partial t) = (\lambda_e - \lambda_g) - n_e/\tau_e + n_g/\tau_g - \sigma D I_+^2.$$

## 附 录 3

在计算时, 参数取  $D(\xi, 0) = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0.8$ 。放大器长度  $L$  取为光速的数值  $v$ , 所以  $\xi_{\max} = 1$ ,  $\sigma$  也取为 1。计算时间宽度  $\tau$  为 0.1 的方波脉冲。这些参数的选取只是为了计算的方便, 没有什么对应的实际例子, 但仍可看出双光子放大器的主要特征。必须指出, 存在着两个特征的输入  $I$  值(设输入的时间为  $t = 0$ ): (1)  $I(0, 0) \sim \beta/\sigma D_0$ 。当输入  $I$  值比  $\beta/\sigma D_0$  大, 脉冲前沿有可能被放大。若输入  $I$  值比  $\beta/\sigma D_0$  小, 整个方波脉冲都被衰减; (2) 对于某个更大的输入  $I$  值, 脉冲的前沿可以把放大器的反转粒子数都消耗掉, 得到极陡的尖峰, 而脉冲的大部分则只能通过衰减器。这个  $I$  值可以用(11)式的分母等于零来估计, 这时  $vt$  取为放大器的长度  $L$ , 即  $\sqrt{I_1 I_2} \sim 1/\sigma D_0 L$ 。

## 参 考 文 献

- [1] A. M. Prokhorov; *Science*, 1965, **149**, No. 3686 (20 Aug.), 828.



- [ 2 ] P. P. Sorokin, N. Braslau; *IBM J. Res. Dev.*, 1964, **8**, 177.
- [ 3 ] R. L. Carman; *Phys. Rev.*, 1975, **A12**, No. 3 (Sept.), 1048.
- [ 4 ] L. M. Narducci *et al.*; *Phys. Rev.*, 1977, **A16**, No. 4 (Oct.), 1665.
- [ 5 ] T. Hoshimiya *et al.*; *J. A. P. (Japan)*, 1978, **17**, No. 12 (Dec.), 2177.
- [ 6 ] H. Schlemmer, D. Frölich, and H. Welling; *Opt. Commun.*, 1980, **32**, No. 1 (Jan.), 141.
- [ 7 ] B. Nikolaus, D. Z. Zhang, and P. E. Toschek; *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **47**, No. 3 (20 July), 171.
- [ 8 ] Л. С. Василенко, В. П. Чеботаяв; *Письма в ЖЭТФ*, 1970, **12**, Вып. 3 (5 августа), 161.
- [ 9 ] В. Сажас, G. Grynberg, F. Biraben; *J. Phys. (Paris)*, 1973, **34**, No. 1 (Jan.), 56.
- [ 10 ] А. Л. Микаэлян, М. Л. Тер-Микаэлян, Ю. Г. Турков; «*Оптические Генераторы на Твердом Теле*», (Советское РАДИО, Москва, 1967).

## Rate equation theory of two-photon lasers

LIN FUCHENG

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)

(Received 13 November 1981)

### Abstract

Two-photon lasers and laser amplifiers are studied by using the rate equations. The steady solution is obtained and its stability is analysed. The time evolution of large deviation from the steady solution is studied by using computer simulation. The population inversion and the trigger input must exceed certain thresholds to operate a two-photon laser. The method for producing giant-pulse is discussed. The possibility of building a practical two-photon laser is analysed basing on the known data. A Doppler-free two-photon laser needs much lower threshold but much more serious frequency matching among the atom system, cavity and the trigger input. Such a Doppler-free two-photon laser could find applications in laser spectroscopy and in the accurate metrology. Two-photon laser amplifiers distort the input waveform seriously. This distortion depends strongly on the input intensity.