

自由电子激光放大器的小信号理论

尹 元 昭

(中国科学院电子所)

提 要

本文根据单粒子模型阐述了自由电子激光放大器的工作原理, 通过将电子运动方程线性化导出了小信号增益。结果表明, 当电子束有合适的初速分布, 周期静磁场和入射电磁波有确定的相位关系, 并且满足电子与波的同步条件和电子回旋谐振条件时, 电子能持续地和最有效地将能量交给入射电磁波, 从而实现激光放大。

一、引 言

1976年美国斯坦福大学 Elias 等人第一次公布了自由电子激光放大器的实验结果, 成功地证实了通过周期静磁场的相对论电子束能放大与电子束同向传播的 CO_2 激光^[1]。在此前后, 一些作者曾相继发表了许多理论工作来阐明自由电子激光放大的原理^[2~6]。

本文试图从经典理论出发, 给自由电子激光放大器的工作原理提供一个清晰的物理图象。由于自由电子激光放大器所用的电子束的电流密度相当低, 所以可略去电子之间的相互作用, 而不用单粒子模型来描述它。又因为入射电磁波的截面比电子束截面大得多, 实验器件中横向变化的特征尺度也比电子束直径大得多, 所以可近似地将周期静磁场与入射电磁波看作平面波, 而与横向坐标无关, 即作一维问题来处理。同时还假设入射电磁波对在静磁场中运动的电子仅起一种扰动作用, 从而可将电子的运动方程进行线性化, 简化求解过程并能得到解析解, 以便清楚地说明这类自由电子激光器实现放大的必要条件和增大小信号增益的途径。结果表明, 如果周期静磁场与入射的电磁波有确定的相位关系, 入射电子束有合适的初始速度, 并且满足同步与谐振条件, 则电子能最有效地将能量交给入射电磁波, 从而实现激光放大。

二、电子运动方程的求解

首先考虑电子在轴向均匀静磁场和横向周期静磁场中的运动(如图1所示)。这里仅讨论一维问题。横向静磁场是右旋圆极化的。整个静磁场可表示如下:

$$\mathbf{B}_0 = B_{\perp} [\cos(k_0 z + \phi_0) \mathbf{i} + \sin(k_0 z + \phi_0) \mathbf{j}] + B_{\parallel} \mathbf{k}, \quad (1)$$

相应的电子运动方程为

$$m r_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = -\frac{e}{c} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0, \quad (2)$$

其中 m 是电子静止质量, e 是电子电荷值, c 是真空中光速, k_0 是横向周期静磁场的波数, ϕ_0 是它的初位相, B_{\perp} 和 B_{\parallel} 分别是横向和轴向磁场强度, v_0 是电子在静磁场中运动的速度, 因为磁场不对电子做功, 所以电子的归一化能量 $r_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$ 是常量, \mathbf{i} , \mathbf{j} 和 \mathbf{k} 是直角坐标的三个单位矢量。

将(1)式代入(2)式解得

$$\left. \begin{aligned} v_{0x} &= F \cos(k_0 z + \phi_0), \\ v_{0y} &= F \sin(k_0 z + \phi_0), \\ v_{0z} &= v_{\parallel}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中

$$F = \frac{v_{\parallel} \Omega_{\perp}}{\Omega_{\perp} - r_0 k_0 v_{\parallel}}, \quad \Omega_{\perp} = \frac{e B_{\perp}}{m c}, \quad \Omega_{\parallel} = \frac{e B_{\parallel}}{m c}, \quad (4)$$

(3)和(4)式分别是电子在横向和轴向静磁场中的非相对论回旋频率, v_{\parallel} 是电子的初始轴向速度。进一步解(3)式, 得到电子运动轨迹的方程

$$x = \frac{F}{k_0 v_{\parallel}} \sin(k_0 v_{\parallel} t + \phi_0), \quad y = -\frac{F}{k_0 v_{\parallel}} \cos(k_0 v_{\parallel} t + \phi_0), \quad z = v_{\parallel} t, \quad (5)$$

可见电子在静磁场中作右手螺旋运动, 并且满足回旋谐振条件

$$\Omega_{\perp} - r_0 k_0 v_{\parallel} = 0,$$

即在电子静止坐标中, 电子在轴向静磁场中的回旋频率 Ω_{\perp} 等于从横向周期静磁场按劳伦兹变换而来的入射电磁波的频率 $r_0 k_0 v_{\parallel}$ 时, 发生回旋谐振。

现在没有一个右旋圆极化平面电磁波

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \cos(\omega t - k z + \phi) \mathbf{i} + E_0 \sin(\omega t - k z + \phi) \mathbf{j} \\ \mathbf{B} &= -E_0 \sin(\omega t - k z + \phi) \mathbf{i} + E_0 \cos(\omega t - k z + \phi) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (7)$$

与电子束同向入射到静磁场区域(如图1), 其极化旋转方向与电子在静磁场中回旋的方向相同。其中 E_0 , k , ω 和 ϕ 分别是入射波的振幅, 波数, 频率及初位相。

于是, 电子运动的方程为

$$r \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m} \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \right], \quad (8)$$

这是电子运动速度 \mathbf{v} 的非线性方程, 一般不能得到解析解。但是在小信号近似下, 可以将它线性化以得到解析解。令

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}, \quad (9)$$

其中 \mathbf{v}_0 是电子在静磁场中的运动速度, \mathbf{u} 是因入射电磁波引起的速度扰动, $v_0 \gg u_0$ 。将(9)式代入(8)式, 利用(2)式并仅保留一级小量, 得到

$$r_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{e}{m} \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0 + \frac{1}{c} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{E}) \right], \quad (10)$$

这里我们还用了近似关系 $r \simeq r_0$ 。将(10)式写成分量形式并代入(1)式, (3)式和(7)式, 得到

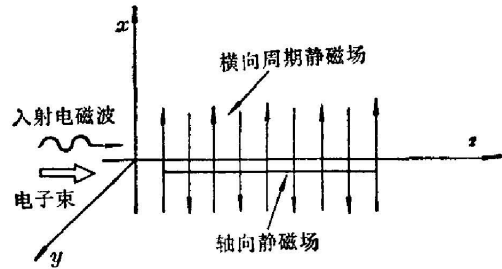


图1 自由电子激光放大器示意图
Fig. 1 Schematic diagram of free electron laser amplifier

$$\begin{cases} r_0 \frac{du_x}{dt} = -\Omega_{\perp} u_y + \Omega_{\perp} u_z \sin(k_0 z + \phi_0) + \frac{e}{mc^2} F^2 E_0 \cos(k_0 z + \phi_0) \cos(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi), \\ r_0 \frac{du_y}{dt} = \Omega_{\perp} u_x - \Omega_{\perp} u_z \cos(k_0 z + \phi_0) + \frac{e}{mc^2} F^2 E_0 \sin(k_0 z + \phi_0) \cos(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi), \\ r_0 \frac{du_z}{dt} = -\Omega_{\perp} u_x \sin(k_0 z + \phi_0) + \Omega_{\perp} u_y \cos(k_0 z + \phi_0). \end{cases} \quad (11)$$

引入新变量

$$\xi = u_x \cos(k_0 z + \phi_0) + u_y \sin(k_0 z + \phi_0), \quad \eta = u_x \sin(k_0 z + \phi_0) - u_y \cos(k_0 z + \phi_0). \quad (12)$$

经过运算后, 从(11)式得到

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\Omega_{\perp} v_{\perp}}{r_0 F} \eta + \frac{e F^2 E_0}{mc^2 r_0} \cos(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi), \\ \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\Omega_{\perp} v_{\perp}}{r_0 F} \xi + \frac{\Omega_{\perp}}{r_0} u_z, \\ \frac{du_z}{dt} = -\frac{\Omega_{\perp}}{r_0} \eta. \end{cases} \quad (13)$$

将(13)式的第二式对 t 微商, 然后将(13)式的第一和第三式代入, 得到

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \left(\frac{\Omega_{\perp}^2 v_{\perp}^2}{r_0^2 F^2} + \frac{\Omega_{\perp}^2}{r_0^2} \right) \eta + \frac{\Omega_{\perp} v_{\perp}}{r_0^2} \frac{e F E_0}{mc^2} \cos(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi) = 0, \quad (14)$$

从而解得

$$\eta = G \cos(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi), \quad (15)$$

其中

$$G = \frac{\Omega_{\perp} v_{\perp} e F E_0 / r_0^2 mc^2}{[\omega - v_{\perp} (k + k_0)]^2 - (\Omega_{\perp}^2 v_{\perp}^2 / r_0^2 F^2 + \Omega_{\perp}^2 / r_0^2)}. \quad (16)$$

于是从(13)式求得

$$\xi = \left(\frac{\Omega_{\perp} v_{\perp}}{r_0 F} G + \frac{e F^2 E_0}{m c r_0} \right) \frac{\sin(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi)}{\omega - v_{\perp} (k + k_0)}, \quad (17)$$

最后回到原来的变量, 我们得到电子运动速度扰动的分量表达式

$$\begin{cases} u_x = \left(\frac{\Omega_{\perp} v_{\perp}}{r_0 F} G + \frac{e F^2 E_0}{m c^2 r_0} \right) \frac{\cos(k_0 z + \phi_0) \sin(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi)}{\omega - v_{\perp} (k + k_0)} \\ \quad + G \sin(k_0 z + \phi_0) \cos(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi), \\ u_y = \left(\frac{\Omega_{\perp} v_{\perp}}{r_0 F} G + \frac{e F^2 E_0}{m c^2 r_0} \right) \frac{\sin(k_0 z + \phi_0) \sin(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi)}{\omega - v_{\perp} (k + k_0)} \\ \quad + G \sin(k_0 z + \phi_0) \cos(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi), \\ u_z = -\frac{\Omega_{\perp} G \sin(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi)}{r_0 [\omega - v_{\perp} (k + k_0)]}. \end{cases} \quad (18)$$

三、小信号增益

在解出电子运动方程求得电子运动速度扰动后, 我们可进一步求得自由电子激光放大器的小信号增益。

在电场作用下, 电子的能量变化率为

$$m c^2 \frac{dr}{dt} = -e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = -e [(v_{0x} + u_x) E_x + (v_{0y} + u_y) E_y], \quad (19)$$

将(3)式和(18)式代入(19)式,得到

$$\begin{aligned}
 mc^2 \frac{dr}{dt} = & -e [FE_0 \cos(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi) + \left(\frac{\Omega_{\perp} v_{\perp}}{r_0 F} G + \frac{eF^2 E_0}{mc^2 r_0} \right) \\
 & \cdot \frac{E_0 \sin(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi)}{\omega - v_{\parallel} (k + k_0)} \cos(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi) \\
 & + GE_0 \sin(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi) \cos(\omega t - kz - k_0 z + \phi_0 + \phi)] \quad (20)
 \end{aligned}$$

一般说来,上式对电磁波的一个周期平均等于零,如 ϕ_0 与 ϕ 无规则变化,则电子的能量变化率对 ϕ_0 和 ϕ 平均也等于零,即电子与入射电磁波之间平均地无能量交换。但是,如果选取 $\phi_0 = \phi = 0$,而且电子与入射电磁波之间满足同步条件,即

$$\omega - v_{\parallel} (k + k_0) = 0, \quad (21)$$

并利用公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$ 和(16)式,则(20)式变为

$$mc^2 \frac{dr}{dt} = -e \left[FE_0 + \frac{1}{1 + v_{\parallel}^2 / F^2} \frac{eF^2 E_0^2 t}{mc^2 r_0} \right], \quad (22)$$

可见电子将能量不断地交给电磁场。

设静磁场区域长 L ,则电子经过这个相互作用的放大区域的时间可近似地等于 L/C ,于是小信号增益 g 为

$$g = \frac{\left| \int_0^{L/C} mc^2 \dot{r} dt / \frac{cE_0^2}{4\pi} \right|}{L} \approx \frac{2\pi e^2 F^2 L}{(1 + v_{\parallel}^2 / F^2) mc^3 r_0}, \quad (23)$$

这里我们已略去另一项较小的值。显然在满足谐振条件(6)时,小信号增益 g 可达到非常大的值。

四、结 论

首先,我们从(23)式看到小信号增益 g 与腔长 L 成正比,这是与普通激光器不同的特点,也是用实验来验证我们理论正确性的简单途径。

其次,从粒子与波同步条件(21)式可得

$$v_p = (1 + k_0/k) v_{\parallel} = (1 + \lambda/\lambda_0) v_{\parallel}, \quad (24)$$

其中 v_p 是电磁波相速, λ 与 λ_0 分别是电磁波和周期静磁场的波长。由此可见,周期静磁场的作用是使电磁波的表现相速减少或使电子的表现轴向速度增加,起到“慢波结构”的作用,以实现波与电子同步的目的,使电子将能量不断地交给入射电磁波,从而使其得到放大。从(24)式还可看到用波长较长的周期静磁场来放大波长较短的电磁波,对于实用器件来说是特别重要的。

第三,为了使电子持续地将能量交给入射波,要求横向周期静磁场与入射波的初始相位有确定的关系,并且电子束应有均匀的初始横向速度与轴向速度。粒子与波的同步条件(21)式是实现自由电子激光放大器的必要条件,而回旋谐振条件(6)式则是提高放大器增益的有效措施。

最后,当电子横向速度足够大和电磁场足够强时,线性理论已不适用,必须从解非线性方程(8)式出发,这是今后应进一步研究的课题。

参 考 文 献

- [1] L. R. Elias, W. M. Fairbank *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1976, **36**, No. 13(29 Mar), 717.
[2] J. M. J. Madey; *J. A. P.*, 1971, **42**, No. 5(May), 1906.
[3] F. A. Hopf, P. Meystre *et al.*; «S. F. Jacobs *et al.*; *Physical of Quantum Electronics*», Vol. 5(Addison-wesley, Reading, Mass., 1978), 41.
[4] P. Sprangle, R. A. Smith *et al.*; in «Button K. J.; *Infrared and Millimeter waves*», Vol. 1 (Academia Pr.; New York, 1979), 279.
[5] L. Friedland, J. L. Hirshfield; *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **44**, No. 22(2 Jun), 1456.
[6] M. B. Colson; «*Free Electron Laser Theory*»(Ph. D. Thesis, Stanford University,1977).

A small-signal theory of free-electron laser amplifier

YIN YUANZHAO

(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing)

(Received 21 September 1981)

Abstract

The single-particle model is used to explain the working principle of free-electron laser amplifier. After linearizing the motion equation of electron, we get the small-signal gain. The results show that the electron beam has suitable initial velocity distribution, the initial phases of the static periodic magnetic field and incident electromagnetic wave have definite relation, the synchronization requirement between electrons and wave and the cyclotron resonance condition are satisfied. The electrons can transfer their energy to the wave efficiently and constantly, so that laser amplification can be achieved.