

# 三 维 应 力 分 析

王 润 文

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

## 提 要

三维内应力分析目前常用冻结切片法和散光法进行测量。1970年H. K. Aben提出改变入射光偏振状态或波长来求解各片层的平面应力。迄今,三维主应力 $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ 及 $\sigma_3$ 的测量与分析还未见有完满的光学切片法。本文对板形受力构件推广了H. K. Aben的方法,改变入射光的波长,在三个方向进行偏光特性测量,而在厚度方向与干涉光弹或全息光弹结合,这样,通过文中的分析就能提供各应力单元的三个主应力的空间方向与大小的信息。

## 一、引 言

光弹作为平面应力分析是一门很有效的技术,推广到三维应力分析可以用冻结应力切片,对每一切片进行平面应力分析,过程累赘,技术复杂而要求高,但已是多年来采用的方法<sup>[1]</sup>。替代冻结切片法去获得三维应力状态的分析一直是实验固体力学中一个有待完满解决的问题。1971年M. E. Fourney<sup>[2]</sup>提出了企图利用相干微微秒激光的光学切片来解决这一问题,其实是散光法的一种推广。由于切片本身的取向及形状与记录面位置有关,同时还存在着更为复杂的技术问题,致使这一建议从未实现。三维光弹中最困难的问题在于要显示各个层次的主应力大小与方向,而它们是由一个片层向另一片层连续变化的,平面光弹只能获得它们的平均效果。H. K. Aben<sup>[3,4]</sup>提出利用Faraday或Kerr效应改变入射光的偏振状况而求解各片层的平面应力状态,这显然是一个很吸引人的方法,然而要产生精确定量变化的Faraday与Kerr效应是不容易的。文献[4]还提出了改变入射光波长的办法来求解各片层的平面应力,如今在可调谐激光已经出现的情况下,是有可能实现的。这给三维应力的分析提供了方便。然而要真正获得三维主应力的大小与取向仍是一个尚未彻底解决的问题。作者曾于1975年提出在模型中形成人为的散光片层<sup>[5]</sup>,应用三维位移全息照相的记录方法<sup>[6,7]</sup>可以对这一片层三维应力大小与取向得到完全的分析。当然这也只能局限于少数的1~2个片层的测量。本文推广了Aben的方法,采用冻结应力后对一个板状构件三维应力模型在两个方向进行多波长透射,于厚度方向进行干涉光弹的测量,对测量数据的分析计算可以完全获得三维应力的大小与取向的知识。

## 二、简单三维应力单元的分析

为了分析上的简便,我们首先研究一个立方体透明模型在经受三维应力后处于应力冻结状态,如果这一应力单元与晶胞类似只有一组三维主应力 $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ 与 $\sigma_3$ ,除了表面这一薄

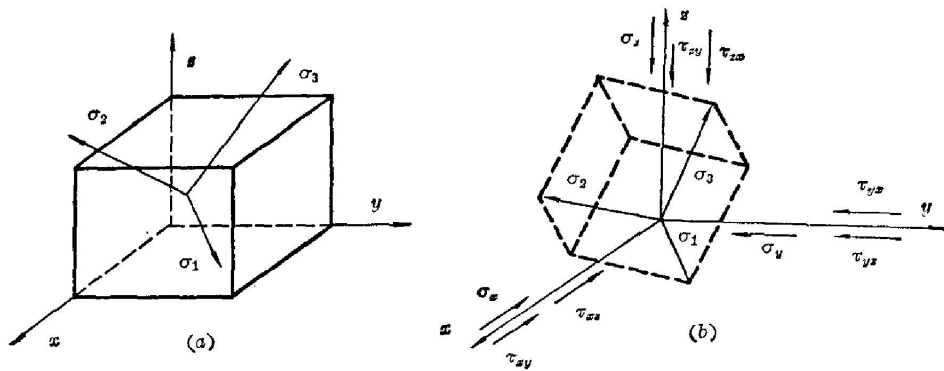


图 1

层外, 单元内每一微元在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个方向的应力分量有三个正应力  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  及六个切应力<sup>[8]</sup>, 而其中又有三对切应力的大小是相同的, 如图 1(a), (b) 所示。则主应力与应力分量有如下关系: [注]

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \frac{1}{4}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x, \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \frac{1}{4}(\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2) - \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \frac{1}{4}\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}. \end{cases} \quad (1)$$

如果主应力  $\sigma_i$  的方向余弦为  $l_i, m_i, n_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), 则主应力、应力分量与方向余弦之间要满足如下方程:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{zx}n_i = 0, \\ \tau_{xy}l_i + (\sigma_y - \sigma_i)m_i + \tau_{yz}n_i = 0, \\ \tau_{zx}l_i + \tau_{yz}m_i + (\sigma_z - \sigma_i)n_i = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$l_i, m_i, n_i$  的非零解要满足如下正交关系:

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1. \quad (3)$$

事实上(1)式是(2)式的非零解存在的必要条件, (1)~(3)式表明, 如果已知全部应力分量(包括正应力与切应力), 那么主应力大小和方向将完全确定, 物体的应力状态也被确定了。

一束偏振的相干光通过这一应力单元后, 光的性质变化无非是偏振面取向与偏振状态的改变。由于单元中主应力的取向使偏振面发生了旋转, 再由于在光程传播过程中, 光沿垂直分量与水平分量的折射率不同, 出现了附加光程差, 光会从平面偏振状态变成椭圆或圆偏振光, 偏振主轴产生附加转动, 转旋方向也会发生变化, 这些量都是可以测量的, 由这些参量的测量可以获得应力分量的知识。今设沿  $z$  方向一束平行光, 其偏振状态为:

注: 实际上(1)式与(2)式是互为因果的, 从(2)式得出  $l_i, m_i, n_i$  非另解的条件是联立方程的系数行列式为零, 由此导出三个特征根  $\sigma_i$  所满足之三次代数方程式是:

$$\begin{aligned} \sigma_i^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma_i^2 + \frac{1}{4}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - 4\sigma_x\sigma_y - 4\sigma_y\sigma_z - 4\sigma_z\sigma_x)\sigma_i \\ - \frac{1}{4}(\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2 - 4\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}) = 0 \end{aligned}$$

由根与系数关系即可求得(1)式。

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix} \quad (4)$$

而穿过应力单元后光的偏振状态为:

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_x e^{i\delta'_x} \\ A'_y e^{i\delta'_y} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

(5)与(4)式可通过 Jones 变换矩阵连系起来,即:

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}. \quad (6)$$

若应力单元引起的效应为偏振主轴转过  $\theta$  角, 引入位相差  $\delta$ , 则相应的 Jones 变换矩阵为:

$$J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (7)$$

现在我们用一束沿  $y$  方向的平面偏振光, 则可记  $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 代入(6)式右面, 再应用(7)式可以求得:

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \theta e^{i\delta} - \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta e^{i\delta} + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \quad (8)$$

沿  $x$  及  $y$  方向的光能量为  $E_x = |a'_x|^2$ ,  $E_y = |a'_y|^2$ 。由(8)式计算得:

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta (1 - \cos \delta) \\ 1 - 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta (1 - \cos \delta) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

由(9)式显见  $E'_x + E'_y = E_x + E_y = 1$ ; 若再用另外一次测量, 在入射线偏振光的通道上插入一块  $\frac{1}{4}$  波片就使入射光变成圆偏振光, 设入射平行光变为右旋圆偏振光, 则可记  $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ , 以同样过程代入(6)式再应用(7)式可求得穿过应力单元后  $x, y$  方向的振动是:

$$\begin{pmatrix} a''_x \\ a''_y \end{pmatrix} = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -ie^{i\delta} \cos \theta - \sin \theta \\ -ie^{i\delta} \sin \theta + \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (10)$$

相应的光强矩阵是:

$$\begin{pmatrix} E''_x \\ E''_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \sin 2\theta \sin \delta) \\ \frac{1}{2}(1 + \sin 2\theta \sin \delta) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

由(9)及(11)可算出位相差  $\delta$  与转角  $\theta$

$$\cos \delta = \frac{A}{2} \pm \sqrt{4 - 3A^2}, \quad A = \frac{1 - 2E''_x}{\sqrt{2E'_x}}. \quad (12)$$

因为  $E'_x$  及  $E''_x$  恒为正实数, 可知当  $A$  为正,  $\delta$  取正值; 当  $A$  为负时  $\delta$  取负值。由于  $\cos \delta$  已知, 由(9)式便可求出:

$$\sin^2 2\theta = \frac{2E'_x}{1 - \cos \delta} \quad (13)$$

若应力单元沿  $z$  方向的厚度为  $\Delta z$ , 单元材料的光弹常数为  $C_\sigma$ , 则正应力  $\sigma_x, \sigma_y$  及切应力

$\tau_{xy}$  与  $\delta$  及  $\theta$  值的关系为<sup>[4]</sup>:

$$\delta_z = C_\sigma \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \cdot \Delta z, \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (15)$$

若  $\delta_z$  与  $2\theta$  已经测量得到, 则正应力差  $\sigma_x - \sigma_y$  及  $\tau_{xy}$  便可确定。若再使光线沿  $y$  方向入射在应力单元上, 线偏振光振动面沿  $x$  方向出射, 光的偏振面与  $z$  轴夹角为  $\theta_y$ , 位相差为  $\delta_y$ , 应力单元沿  $y$  方向厚度为  $\Delta y$ , 则:

$$\cos \delta_y = \frac{A'}{2} \pm \sqrt{4 - 3A'^2}, \quad (16)$$

$$\sin^2 2\theta_y = \frac{2E'_z}{1 - \cos \delta_y}, \quad (17)$$

$$A' = \frac{1 - 2E'_z}{\sqrt{2E'_z}}.$$

并且与应力之关系式为:

$$\delta_y = C_\sigma \sqrt{(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xz}^2} \Delta y, \quad (18)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_y = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_z - \sigma_x}. \quad (19)$$

再在  $y$  方向出射后正反射, 并旋光  $90^\circ$  将出射光按原路通过应力单元, 如干涉光弹或全息光弹那样<sup>[4]</sup>, 则可从干涉图的如下分布

$$I' = 1 + \cos \left[ \frac{4\pi}{\lambda} C'_\sigma (\sigma_z + \sigma_x) \Delta y \right] \quad (20)$$

求出  $\sigma_z + \sigma_x$ 。既然  $\sigma_x - \sigma_y$ ,  $\sigma_z - \sigma_x$ ,  $\sigma_z + \sigma_x$  已测得, 正应力  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  也可获得。最后为确定  $\tau_{yz}$  可仿照前述沿  $x$  方向将沿  $z$  方向偏振的偏振光穿过应力单元, 测出出射光的主轴振动面与  $y$  轴夹角  $\theta_x$  及位相差  $\delta_x$ , 应力单元沿  $x$  方向厚度为  $\Delta x$ , 同理可得如下方程式:

$$\cos \delta_x = \frac{A''}{2} \pm \sqrt{4 - 3A''^2}, \quad (21)$$

$$\sin^2 2\theta = \frac{2E'_y}{1 - \cos \delta_x}, \quad (22)$$

$$A'' = \frac{1 - 2E'_y}{\sqrt{2E'_y}},$$

$$\delta_x = C_\sigma \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yz}^2} \Delta x, \quad (23)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_x = \frac{2\tau_{yz}}{\sigma_y - \sigma_z}. \quad (24)$$

这样正应力及切应力皆求得, 从而由(1)式解出主应力  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  及  $\sigma_3$  来。再由(2)式其中两个方程与(3)式联立求解出主应力的方向余弦  $l_i$ ,  $m_i$ ,  $n_i$  来。

### 三、板形构件的三维应力分析

一般物体承受外力后, 应力的分布是各式各样的, 是空间坐标的函数, 我们采取和简单三维应力单元分析相同的方法, 先把受载荷的物体进行应力冻结, 并将它沿宽度的  $x$ ,  $z$  两个

方向划分成一系列小方块,若方块面积不大,且板沿  $y$  方向的厚度也不大,可以近似地认为每一小块中应力是均匀分布的,因此可以把每一块看成一个单独的应力单元,如图 2 所示。这时平面偏振的平行光束每通过一个应力单元就会产生转角  $\theta_n$  与位相差  $\delta_n$ ,若沿  $z$  轴通过一系列应力单元,于是总的 Jones 变换矩阵是:

$$J = \begin{pmatrix} \cos \theta_{mn1}, & -\sin \theta_{mn1} \\ \sin \theta_{mn1}, & \cos \theta_{mn1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta_{mn1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{mn1} & \sin \theta_{mn1} \\ -\sin \theta_{mn1} & \cos \theta_{mn1} \end{pmatrix} \cdots \\ \begin{pmatrix} \cos \theta_{mni}, & -\sin \theta_{mni} \\ \sin \theta_{mni}, & \cos \theta_{mni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta_{mni}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{mni} & \sin \theta_{mni} \\ -\sin \theta_{mni} & \cos \theta_{mni} \end{pmatrix} \cdots \\ \begin{pmatrix} \cos \theta_{mnp}, & -\sin \theta_{mnp} \\ \sin \theta_{mnp}, & \cos \theta_{mnp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta_{mnp}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{mnp} & \sin \theta_{mnp} \\ -\sin \theta_{mnp} & \cos \theta_{mnp} \end{pmatrix} \circ \quad (25)$$

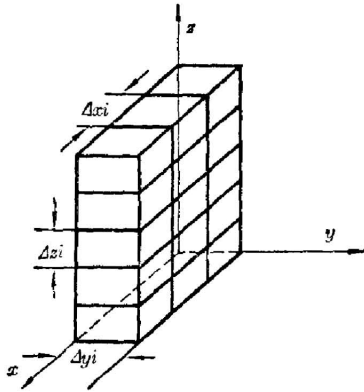


图 2

若以  $(m, n, p)$  代表应力单元的位置,  $m, n, p$  分别代表沿  $x, y, z$  三个方向的应力单元序号, 是正整数。假定分割  $m, n, p$  的最大值为  $M, I, P$ ; 诚然各层的转角  $\theta_{mnp}$  只与各层的主应力方向有关, 而与波长无关, 当然实际的转角由于位相差  $\delta_{mnp}$  的引入, 引起附加偏振面的转动并不包括在  $\theta_{mnp}$  之内。  $\delta_{mnp}$  是与波长有关的。

$$\delta_{mnp} = 2\pi(n_0 - n_e) \Delta l / \lambda \quad (26)$$

对于大多数双折射物体, 在可见光波长范围内,  $n_0 - n_e \approx$  常数,  $\Delta l$  为光学切片的厚度, 若沿  $z$  方向切片  $\Delta l = \Delta z_i$ , 因此用  $\lambda_j$  的波长观察与  $\lambda_0$  波长观察的光程差之关系为

$$\delta_{mnp}^{\lambda_j} = \delta_{mnp}^{\lambda_0} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_j} \right), \quad (27)$$

式中  $\delta_{mnp}^{\lambda_0} = 2\pi(n_0 - n_e) \Delta l / \lambda_0$ , 是波长为  $\lambda_0$  的光透过  $(mnp)$  单元后的相差, 若沿  $x, y, z$  方向,  $\Delta l$  分别代表单元沿这三个方向的厚度。  $\delta_{mnp}^{\lambda_j}$  是波长为  $\lambda_j$  情况下的相差。另外按照等价原理可以认为 (25) 式的 Jones 矩阵等价于经过单层转角  $\theta_{mnz}$  及位相  $\delta_{mnz}$  的变换即:

$$J \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_{mnz} & -\sin \theta_{mnz} \\ \sin \theta_{mnz} & \cos \theta_{mnz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta_{mnz}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{mnz} & \sin \theta_{mnz} \\ -\sin \theta_{mnz} & \cos \theta_{mnz} \end{pmatrix} \circ \quad (28)$$

由简单三维应力单元的分析可知  $\theta_{mnz}$  与  $\delta_{mnz}$  可以通过测量出射偏振光在  $x$  及  $y$  方向强度而确定。如果要对  $2p$  个波长为  $\lambda_j$  的光, 测量出其  $\theta_{mnz}$ ,  $\delta_{mnz}^{\lambda_j}$  可以用如下方程组:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_{mnz} & -\sin \theta_{mnz} \\ \sin \theta_{mnz} & \cos \theta_{mnz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta_{mnz}^{\lambda_j}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{mnz} & \sin \theta_{mnz} \\ -\sin \theta_{mnz} & \cos \theta_{mnz} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \theta_{mn1} & -\sin \theta_{mn1} \\ \sin \theta_{mn1} & \cos \theta_{mn1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta_{mn1}^{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_j}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{mn1} & \sin \theta_{mn1} \\ -\sin \theta_{mn1} & \cos \theta_{mn1} \end{pmatrix} \cdots \\ \begin{pmatrix} \cos \theta_{mni} & -\sin \theta_{mni} \\ \sin \theta_{mni} & \cos \theta_{mni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta_{mni}^{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_j}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{mni} & \sin \theta_{mni} \\ -\sin \theta_{mni} & \cos \theta_{mni} \end{pmatrix} \cdots \\ \begin{pmatrix} \cos \theta_{mnp} & -\sin \theta_{mnp} \\ \sin \theta_{mnp} & \cos \theta_{mnp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta_{mnp}^{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_j}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{mnp} & \sin \theta_{mnp} \\ -\sin \theta_{mnp} & \cos \theta_{mnp} \end{pmatrix} \circ \quad (29)$$

$$(\lambda_j = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2p-1})$$

方程(29)有  $2p$  个方程联立, 可以求出  $\theta_{mn1} \dots \theta_{mnp}$  及  $\delta_{mn1}^{\lambda_0} \dots \delta_{mnp}^{\lambda_0}$  等  $2p$  个未知量。

这样的测量可在沿  $z$  轴每一行进行, 共有  $MN$  行, 每一行除了变换  $m, n$  两个标号外都有和(27)式相同的  $2p$  个联立方程式, 可解出每一个应力单元沿  $z$  方向转角  $\theta_{mnp}$  与  $\delta_{mnp}^{\lambda_0}$ 。对于每一对  $(\theta_{mnp}, \delta_{mnp}^{\lambda_0})$  值可求得对应单元  $(m, n, p)$  的正应力差  $\sigma_x - \sigma_y$  与  $\tau_{xy}$ 。若偏振光再沿  $x$  方向传播并进行同样的测量, 则可列出与(29)式相仿的矩阵方程来, 假设  $x$  方向的转角与位相差为  $\psi_{mnp}$  与  $\zeta_{mnp}^{\lambda_0}$  (各  $M$  个), 则有

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \psi_{xnp} & -\sin \psi_{xnp} \\ \sin \psi_{xnp} & \cos \psi_{xnp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\zeta_{xnp}^{\lambda_0}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_{xnp} & \sin \psi_{xnp} \\ -\sin \psi_{xnp} & \cos \psi_{xnp} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi_{1np} & -\sin \psi_{1np} \\ \sin \psi_{1np} & \cos \psi_{1np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\zeta_{1np}^{\lambda_0} \frac{\lambda_0}{\lambda_j}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_{1np} & \sin \psi_{1np} \\ -\sin \psi_{1np} & \cos \psi_{1np} \end{pmatrix} \dots \\ & \begin{pmatrix} \cos \psi_{inp} & -\sin \psi_{inp} \\ \sin \psi_{inp} & \cos \psi_{inp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\zeta_{inp}^{\lambda_0} \frac{\lambda_0}{\lambda_j}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_{inp} & \sin \psi_{inp} \\ -\sin \psi_{inp} & \cos \psi_{inp} \end{pmatrix} \dots \\ & \begin{pmatrix} \cos \psi_{Mnp} & -\sin \psi_{Mnp} \\ \sin \psi_{Mnp} & \cos \psi_{Mnp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\zeta_{Mnp}^{\lambda_0} \frac{\lambda_0}{\lambda_j}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_{Mnp} & \sin \psi_{Mnp} \\ -\sin \psi_{Mnp} & \cos \psi_{Mnp} \end{pmatrix} \circ \quad (30) \\ & (\lambda_j = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2M-1}) \end{aligned}$$

对于每一对  $(\psi_{mnp}, \zeta_{mnp}^{\lambda_0})$  又可求出  $(m, n, p)$  单元的另一组应力  $\sigma_x - \sigma_y, \tau_{yz}$  来。

若沿平板厚度  $\Delta y$  方向不再分割, 采用偏光与干涉光弹的测量, 用(16)~(20)式所采用的方法, 便可求出各个应力单元的  $\sigma_x - \sigma_y, \sigma_x + \sigma_y$  及切应力  $\tau_{xy}$  来。由此每一晶胞的六个应力分量都可求得, 再应用(1)~(3)式求出这一个  $(m, n, p)$  单元的主应力  $\sigma_1, \sigma_2$  及  $\sigma_3$  与方向余弦  $l_i, m_i$  及  $n_i$ 。

如果选取  $M, P$  数值很大时, 单元便变得更小, 它的三个主应力就更接近于真实情况了。当然  $M, P$  值越大, 计算量也大, 实际上在应力不太大的情况下分割量可以很小, 也能获得足够的精度。在有应力集中的地方, 可以采用不等分的分割法, 分割的间隔  $\Delta x, \Delta z$  可以小一些, 而在其余地方分割间隔可以宽一些, 这对减少工作量, 提高计算速度是有益的。

对于较厚板形的应力模型构件, 无法在第三个方向采用光学切片, 但仍可在厚度最小的方向做冻结切片, 然后采用上述方法测量解出全部三维应力分布来。

同济大学贾循德同志与作者进行有益的讨论并提出宝贵意见, 深表谢意。

### 参 考 文 献

- [1] A. 柯斯克, G. 罗伯逊著;《光弹应力分析》(上海科学技术出版社, 1979)。
- [2] W. G. Gottenberg; 《Application of Holography in Mechanics》(New York, 1971), 17.
- [3] H. K. Aben; *Exp. Mech.*, 1970, 10, No. 3 (Mar), 97.
- [4] P. S. Theocaris, E. E. Gdoutos; 《Matrix Theory of Photoelasticity》(New York, 1979), 147.
- [5] 王润文;《激光》, 1980, 7, No. 7 (Jul), 34.
- [6] 丁祖泉, 鲍乃铿;《同济大学学报》, 1980, No. 1, 49.
- [7] 鲍乃铿, 丁祖泉;《同济大学学报》, 1980, No. 2, 29.
- [8] 徐宏文;《应力分析》第一编, (科学出版社, 1964)。

## Three dimension stress analysis

WANG RUNWEN

(*Shanghai Insititue of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)

(Received 30 July 1981)

### Abstract

3-D internal stress analysis is usually using the method of frozen stress and the method of light scattering. Aben proposed to vary the polarization state or the wavelength of incidence light in 1970. Then he could resolve the plane stress of each slab. But, we haven't got a satisfactory theory to obtain a method of measurement and analysis of 3-D principle stress yet. In this paper we expand the method of Aben and using it to the loaded plate model. Varying the wavelength of the incident light and measure the polarization character along each axis of  $x$ ,  $y$ ,  $z$  in combination with interferometric photoelasticity for a frozen stress medium. Then, using the analysis of this paper, we can provide for the information of the magnitude and direction of three principle stress.