

# 共下能级双跃迁激光的量子理论

朱 诗 尧

(山西大学物理系)

## 提 要

本文将 Sargent, Scully 和 Lamb 的二能级单模激光全量子理论推广到共下能级三能级双模激光系统中, 获得了三个能级都有泵浦情况下的共下能级三能级原子系统双模激光运转的主方程。考虑到细致平衡与宏观平衡之间的对应性, 合理地应用细致平衡原理得到定态运动方程。通过引入一个参数  $H$ , 从而获得了形式解。利用运动方程和形式解, 讨论了不同条件下的一些运转特性和光子统计分布的变化。

## 一、引 言

Scully 和 Lamb 提出了激光运转的全量子理论<sup>[1]</sup>, 他们及其它一些研究者<sup>[2~6]</sup>成功地解释了激光固有 linewidth、激光场的建立以及光子统计分布等问题。这些理论都是基于二能级原子系统。近二、三年来, 二能级单模激光运转情况已被推广到多能级多模激光运转情况<sup>[7~10]</sup>。

本文的目的是采用量子理论讨论在各个能级都有泵浦的条件下, 共下能级三能级原子为激活介质中的双模激光运转情况。在第二节中将 Sargent, Scully 和 Lamb 的二能级单模激光全量子理论的处理方法<sup>[11]</sup>推广到三能级双模情况, 从而获得三能级原子系统中双模运转的主方程。从光子统计的观点画出了光子数目能扩展到无穷的二维几率流图。通过分别对双模光子数目  $n_1$  或  $n_2$  求和, 从而获得每个模的运动方程。同时画出了对应的一维几率流图。第三节中根据与文献[7]不同, 而与文献[10]相同的关于细致平衡的考虑, 获得了稳态解。(从本文的二维几率流图也更清楚地说明文献[7]中对细致平衡考虑的局限性。)第三节中引入一个参数  $H$ , 简化了方程, 从而获得了方程的形式解。并对不同情况下的运转特性作了讨论。

## 二、运 动 方 程

考虑如图 1 所示的三能级原子系统。 $R_a$ 、 $R_b$  和  $R_c$  分别表示对  $|a\rangle$ 、 $|b\rangle$  和  $|c\rangle$  能级的泵浦率, 假定 Wigner-Weisskopf 定理适用。能级的衰退常数为  $\gamma^{[*]}$ 。从  $|a\rangle$  跃迁到  $|c\rangle$  发出一个频率为  $\Omega_2$  的光子, 从  $|b\rangle$  到  $|c\rangle$  发出一个频率为  $\Omega_1$  的光子。 $|c\rangle$  能级是共下能级。并假定  $|a\rangle$  与  $|b\rangle$  之间的跃迁是禁戒的。

包括原子和场的总系统的哈密顿量为  $\mathcal{H} = \hbar H$ 。

收稿日期: 1981年7月15日

<sup>[\*]</sup> 本文假定三个能级具有相同的衰退常数。这并不影响我们的结果, 因为它们之间的不同完全可以归入  $A_i$  和  $B_i/A_i$  的不同之中。

$$H = H_A + H_F + V \quad (1)$$

其中  $H_A = \sum \omega_i A_i^\dagger A_i$ ,  $H_F = \Omega_1 (a_1^\dagger a_1 + 1/2) + \Omega_2 (a_2^\dagger a_2 + 1/2)$ ,  $V = -e\mathbf{r}(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)/\hbar$ ;  $\omega_i$  是

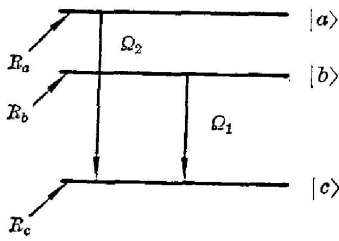


图1 三能级原子系统

Fig. 1 The three level atomic system

原子能级的对应频率,  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  分别是模 1 和模 2 的频率。  $a_1^\dagger a_1$  和  $a_2^\dagger a_2$  分别是模 1 和模 2 相应的产生和湮灭算符。  $A_i^\dagger$ ,  $A_i$  是原子能级的产生和湮灭算符。在转动波近似下, 认为模 1 只引起  $|b\rangle$  和  $|c\rangle$  之间的跃迁, 模 2 只引起  $|a\rangle$  和  $|b\rangle$  之间的跃迁, 而相互作用能可表示为

$$V = g_1 a_1 A_b^\dagger A_c + g_2 a_2 A_a^\dagger A_b + \text{H. C.}, \quad (2)$$

这里  $g_i$  表示原子场耦合常数, H. C. 表示厄米共轭。

设  $\rho_f$  表示场的密度矩阵,  $\rho_{n_1, n_2; m_1, m_2}$  表示场密度矩阵元。我们假设每个能级都有泵浦, 且场还有损耗, 因此有

$$\dot{\rho}_f^{(\alpha)} = \dot{\rho}_f^{(a)} + \dot{\rho}_f^{(b)} + \dot{\rho}_f^{(c)} + \dot{\rho}_f^{(l)}, \quad (3)$$

其中  $\dot{\rho}_f^{(\alpha)}$  表示由于向  $\alpha$  能级的泵浦而引起的场密度算子的变化。  $\dot{\rho}_f^{(l)}$  表示由场的损耗(包括输出)而引起的。下面采用类似于文献[10]的方法求出它们。

设  $\rho_{\alpha, n_1; \beta, m_1, m_2}$  表示总系统的密度矩阵元, 在一个很短的时间  $\tau$  内, 一个处于  $|a\rangle$  态的原子使  $\rho_{n_1, n_2; m_1, m_2}$  的变化为  $\delta^\tau \rho_{n_1, n_2; m_1, m_2}^{(\alpha)}(t)$ 。

$$\delta^\tau \rho_{n_1, n_2; m_1, m_2}^{(\alpha)}(t) = \sum_{\beta} \rho_{\beta, n_1, n_2; \beta, m_1, m_2}^{(\alpha)}(t+\tau) - \rho_{n_1, n_2; m_1, m_2}(t). \quad (4)$$

考虑原子的衰退, 认为  $W-W$  定理适用, 用一分布函数  $P(\tau) = \gamma e^{-\gamma\tau}$  描写原子的衰退。这里  $\gamma = \gamma_a = \gamma_b = \gamma_c$ , 因此在一个小的  $\Delta t$  ( $\Delta t \gg 1/\gamma$ ) 时间间隔内, 一个初始处于  $|a\rangle$  的原子对场的贡献为  $\delta \rho_{n_1, n_2; m_1, m_2}^{(\alpha)}(t)$

$$\delta \rho_{n_1, n_2; m_1, m_2}^{(\alpha)}(t) = \int_0^\infty P(\tau) \delta^\tau \rho_{n_1, n_2; m_1, m_2}(t) d\tau. \quad (5)$$

考虑到场是缓变的, 利用绝热近似把积分扩大到  $\infty$ 。在  $\Delta t$  时间内注入处于  $|a\rangle$  态的原子数为  $R_a \Delta t$ , 因此场的密度矩阵元的变化为

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{n_1, n_2; m_1, m_2}^{(\alpha)}(t) &= \Delta \rho_{n_1, n_2; m_1, m_2}^{(\alpha)}(t) / \Delta t = R_a \delta \rho_{n_1, n_2; m_1, m_2}^{(\alpha)}(t) \\ &= R_a \int_0^\infty d\tau \gamma e^{-\gamma\tau} [\sum_{\beta} \rho_{\beta, n_1, n_2; \beta, m_1, m_2}^{(\alpha)}(t+\tau) - \rho_{n_1, n_2; m_1, m_2}(t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

### 1. $\rho_f^{(a)}$ 的计算

初始原子处于  $|a\rangle$  态, 以  $|\psi_{Af}\rangle$  表示总系统的态矢量,  $|\psi\rangle$  表示场的态矢量。

$$|\psi_{Af}(t)\rangle = |\psi_f\rangle |a\rangle = \left\{ \sum_{n_1, n_2} F_{n_1, n_2}(t) |n_1, n_2\rangle \right\} |a\rangle, \quad (7)$$

令经过  $\tau$  时间的态矢量为

$$\begin{aligned} |\psi_{Af}(t+\tau)\rangle &= \sum_{n_1, n_2} \{ a_{n_1, n_2}(t+\tau) |a\rangle |n_1, n_2\rangle + b_{n_1-1, n_2+1}(t+\tau) |b\rangle |n_1-1, n_2+1\rangle \\ &\quad + c_{n_1, n_2+1}(t+\tau) |c\rangle |n_1, n_2-1\rangle \}. \end{aligned} \quad (8)$$

由(7)式得  $a_{n_1, n_2}(t) = F_{n_1, n_2}(t)$ ,  $b_{n_1-1, n_2+1}(t) = c_{n_1, n_2+1}(t) = 0$ 。

由附录(A5)~(A7)可得

$$a_{n_1, n_2}(t+\tau) = F_{n_1, n_2}(t) \left\{ \frac{|g_2|^2(n_2+1)}{|g_2|^2 n_1 + |g_2|^2(n_2+1)} \cos \sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2(n_2+1)} \tau + \frac{|g_1|^2 n_1}{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2(n_2+1)} \right\}, \quad (9)$$

$$b_{n_1-1, n_2+1}(t+\tau) = F_{n_1, n_2}(t) \frac{g_1 g_2^* \sqrt{n_1(n_2+1)}}{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2(n_2+1)} \{ \cos \sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2(n_2+1)} \tau + 1 \}, \quad (10)$$

$$c_{n_1, n_2+1}(t+\tau) = F_{n_1, n_2}(t) \frac{-i g_2^* \sqrt{n_2+1}}{\sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2(n_2+1)}} \sin \sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2(n_2+1)} \tau. \quad (11)$$

只考虑对角元素, 由(9)~(11)式可得

$$\begin{aligned} \rho_{a, n_1, n_2; a, n_1, n_2}^{(a)}(t+\tau) &= \sum_{\psi} P_{\psi} a_{n_1, n_2}(t+\tau) a_{n_1, n_2}^*(t+\tau) \\ &= \rho_{n_1, n_2; n_1, n_2}(t) \{ 1 / [ |g_1|^2 n_1 + |g_2|^2(n_2+1) ] \}^2 \\ &\quad \times \{ |g_2|^2(n_2+1) \cos \sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2(n_2+1)} \tau + |g_1|^2 n_1 \}. \end{aligned} \quad (12)$$

这里考虑场是混合态,  $P_{\psi}$  表示处于某一态的几率。同理可得

$$\begin{aligned} \rho_{b, n_1, n_2; b, n_1, n_2}^{(a)}(t+\tau) &= \rho_{n_1+1, n_2-1; n_1+1, n_2-1}(t) \left[ \frac{|g_1| |g_2| \sqrt{n_2(n_1+1)}}{|g_1|^2(n_1+1) + |g_2|^2 n_2} \right]^2 \\ &\quad \times [ \cos \sqrt{|g_1|^2(n_1+1) + |g_2|^2 n_2} \tau - 1 ]^2, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\rho_{c, n_1, n_2; c, n_1, n_2}^{(a)}(t+\tau) = \rho_{n_1, n_2-1; n_1, n_2-1}(t) \left[ \frac{|g_2|^2 n_2}{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2 n_2} \sin^2 \sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2 n_2} \tau \right]. \quad (14)$$

将(12)~(14)式代入(6)式, 并令  $\rho_{n_1, n_2; n_1, n_2}(t) = p(n_1, n_2)$ ,  $p(n_1, n_2)$  是在模 1 中发现  $n_1$  个光子, 同时在模 2 中发现  $n_2$  个光子的几率。采用 Scully, Lamb 的记号

$$A_2 = 2R_a |g_2/\gamma|^2, \quad A_1 = 2R_b |g_1/\gamma|^2, \quad (15)$$

$$B_2/A_2 = 4 |g_2/\gamma|^2, \quad B_1/A_1 = 4 |g_1/\gamma|^2, \quad (16)$$

$A_1$  和  $A_2$  是由于对上能级泵浦引起的线性增益函数,  $B_1, B_2$  是自饱和系数。得

$$\begin{aligned} \dot{p}(n_1, n_2) &= \frac{-A_2(n_2+1)p(n_1, n_2)}{1+B_1 n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2} + \frac{A_2 n_2 p(n_1, n_2-1)}{1+B_1 n_1/A_1+B_2 n_2/A_2} \\ &\quad - \frac{A_2 B_1 n_1(n_2+1)p(n_1, n_2)/4 A_1}{[1+B_1 n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2] \{1+[B_1 n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2]/4\}} \\ &\quad + \frac{A_2 B_1(n_1+1)n_2 p(n_1+1, n_2-1)/4 A_2}{[1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2 n_2/A_2] \{1+[B_1(n_1+1)/A_1+B_2 n_2/A_2]/4\}}. \end{aligned} \quad (17)$$

## 2. $\rho^{(b)}$ 的计算

原子初始处于  $|b\rangle$  态, 采用与上相仿的计算, 利用附录 (A10)~(A12) 可得

$$\begin{aligned} \dot{p}_{(n_1, n_2)}^{(b)} &= - \frac{A_1(n_1+1)p(n_1, n_2)}{1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2 n_2/A_2} + \frac{A_1 n_1 p(n_1-1, n_2)}{1+B_1 n_1/A_1+B_2 n_2/A_2} \\ &\quad - \frac{3 A_1 B_2(n_1+1)n_2 p(n_1, n_2)/4 A_2}{[1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2 n_2/A_2] \{1+[B_1(n_1+1)/A_1+B_2 n_2/A_2]/4\}} \\ &\quad + \frac{3 A_1 B_2(n_2+1)n_1 p(n_1-1, n_2+1)/4 A_2}{[1+B_1 n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2] \{1+[B_1 n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2]/4\}}. \end{aligned} \quad (18)$$

### 3. $\rho_f^{(c)}$ 的计算

原子开始处于下能级利用附录(A13)~(A15), 并令

$$A'_1 = 2R_c |g_1/\gamma|^2, \quad A'_2 = 2R_c |g_2/\gamma|^2, \quad (19)$$

$A'_1$  和  $A'_2$  是由于对下能级泵浦引起的线性损耗函数。可得

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{(n_1, n_2)}^{(c)} = & \frac{A'_1(n_1+1)p(n_1+1, n_2)}{1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2n_2/A_2} + \frac{A'_2(n_2+1)p(n_1, n_2+1)}{1+B_1n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2} \\ & - \frac{A'_1n_1p(n_1, n_2)}{1+B_1n_1/A_1+B_2n_2/A_2} - \frac{A'_2n_2p(n_1, n_2)}{1+B_1n_1/A_1+B_2n_2/A_2}, \end{aligned} \quad (20)$$

场的损耗引起的场密度算符对角元素的变化为

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{n_1, n_2}^{(c)}; n_1, n_2 = \dot{\rho}_{(n_1, n_2)}^{(c)} = & -C_1n_1p(n_1, n_2) - C_2n_2p(n_1, n_2) \\ & + C_1(n_1+1)p(n_1+1, n_2) + C_2(n_2+1)p(n_1, n_2+1). \end{aligned} \quad (21)$$

组合(17)、(18)、(20)和(21)式得

$$\begin{aligned} \dot{p}(n_1, n_2) = & -\frac{A_2(n_2+1)p(n_1, n_2)}{1+B_1n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2} + \frac{A_2n_2p(n_1, n_2-1)}{1+B_1n_1/A_1+B_2n_2/A_2} \\ & -\frac{A_1(n_1+1)p(n_1, n_2)}{1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2n_2/A_2} + \frac{A_1n_1p(n_1-1, n_2)}{1+B_1n_1/A_1+B_2n_2/A_2} \\ & -\frac{3A_2B_1n_1(n_2+1)p(n_1, n_2)/4A_1}{[1+B_1n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2]\{1+[B_1n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2]/4\}} \\ & +\frac{3A_2B_1(n_1+1)n_2p(n_1, n_2)/4A_1}{[1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2n_2/A_2]\{1+[B_1(n_1+1)/A_1+B_2n_2/A_2]/4\}} \\ & -\frac{3A_1B_2(n_1+1)n_2p(n_1, n_2)/4A_2}{[1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2n_2/A_2]\{1+[B_1(n_1+1)/A_1+B_2n_2/A_2]/4\}} \\ & +\frac{3A_1B_2(n_2+1)n_1p(n_1-1, n_2+1)/4A_2}{[1+B_1n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2]\{1+[B_1n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2]/4\}} \\ & -\frac{A'_1n_1p(n_1, n_2)}{1+B_1n_1/A_1+B_2n_2/A_2} - \frac{A'_2n_2p(n_1, n_2)}{1+B_1n_1/A_1+B_2n_2/A_2} \\ & +\frac{A'_1(n_1+1)p(n_1+1, n_2)}{1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2n_2/A_2} + \frac{A'_2(n_2+1)p(n_1, n_2+1)}{1+B_1n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2} \\ & -C_1n_1p(n_1, n_2) - C_2n_2p(n_1, n_2) + C_1(n_1+1)p(n_1+1, n_2) \\ & +C_2(n_2+1)p(n_1, n_2+1). \end{aligned} \quad (22)$$

(22)式就是共下能级三能级双模激光运动主方程。右边共有16项, 每一项的物理意义是表示流入或流出 $(n_1, n_2)$ 态的几率流。它可用一个二维几率流图来表示, 如图2所示。其中第5到第8项是级联双光子过程项。在讨论二能级单模情况下这些项是不存在的。且在讨论三能级双模情况的文献[7]和文献[10]中也没有出现。它的物理过程是对某一上能级泵浦可以发出一个光子而跃迁到另一上能级。这对前一模起增益作用, 而对后一模起损耗作用。(22)式中的其它各项的意义与单模情况相同。

图2是表示主方程的二维几率流图。图2(a)是 $(n_1, n_2)$ 态的几率流图。它和邻近的6个光子态发生流入和流出的几率流关系。例如第3项表示从 $(n_1, n_2)$ 态流向 $(n_1+1, n_2)$ 态



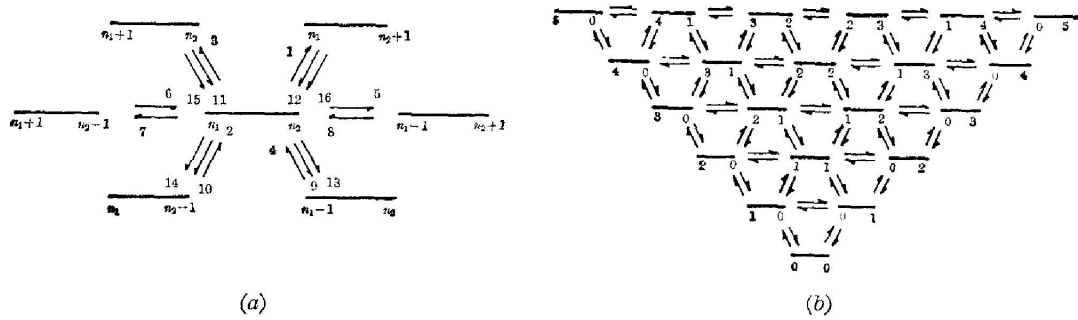


图2 二维几率流图

(a)  $(n_1, n_2)$  态的几率流图; (b) 整体几率流图  
(每一短横下面的数字表示光子数)

Fig. 2 Diagram of probability flow in two dimensions

(a) The probability flow of state  $(n_1, n_2)$ ; (b) The total probability flow scheme  
(the numbers under each bar (state) indicate the photon number  $(n_1, n_2)$ )

的几率流。这是由于对  $|b\rangle$  能级的泵浦而引起, 第 11 项表示从  $(n_1+1, n_2)$  态流向  $(n_1, n_2)$  态的几率流。这是由于对  $|c\rangle$  能级的泵浦引起。图 2(a) 中的每一个箭头代表 (22) 式右边的一项, 箭头边的数字表示 (22) 式中的第几项。第 11 和第 15 项有相似的物理意义, 但由于来源不同, 因仍用二个箭头表示。在图 2(b) 中则只用一个箭头表示。对 (12) 与 (16) 项, (10) 与 (14) 项以及 (9) 与 (13) 项也有类似的情况。图 2(b) 是光子数目能扩展到无穷的整体几率流图。光子总数相同的态之间的箭头(即几率流)反映双光子过程。

由 (22) 式可得

$$\begin{aligned}
 \dot{p}(n_1) = \sum_{n_2} \dot{p}(n_1, n_2) = & -A_1(n_1+1) \sum_{n_2} \frac{p(n_1, n_2)}{1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2n_2/A_2} \\
 & + A_1n_1 \sum_{n_2} \frac{p(n_1-1, n_2)}{1+B_1n_1/A_1+B_2n_2/A_2} \\
 & - \frac{3A_2B_1n_1}{4A_1} \sum_{n_2} \frac{(n_2+1)p(n_1, n_2)}{[1+B_1n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2] \{1+[B_1n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2]/4\}} \\
 & + \frac{3A_2B_1(n_1+1)}{4A_1} \\
 & \times \sum_{n_2} \frac{(n_2+1)p(n_1+1, n_2)}{[1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2(n_2+1)/A_2] \{1+[B_1(n_1+1)/A_1+B_2(n_2+1)/A_2]/4\}} \\
 & - \frac{3A_1B_2(n_1+1)}{4A_2} \\
 & \times \sum_{n_2} \frac{n_2p(n_1, n_2)}{[1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2n_2/A_2] \{1+[B_1(n_1+1)/A_1+B_2n_2/A_2]/4\}} \\
 & + \frac{3A_1B_2n_1}{4A_2} \sum_{n_2} \frac{n_2p(n_1+1, n_2)}{[1+B_1n_1/A_1+B_2n_2/A_2] \{1+[B_1n_1/A_1+B_2n_2/A_2]/4\}} \\
 & - C_1n_1p(n_1) + C_1(n_1+1)p(n_1+1) - A'_1n_1 \sum_{n_2} \frac{p(n_1, n_2)}{1+B_1n_1/A_1+B_2n_2/A_2} \\
 & + A'_1(n_1+1) \sum_{n_2} \frac{p(n_1+1, n_2)}{1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2n_2/A_2}, \tag{28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}(n_2) = \sum_{n_1} \dot{p}(n_1, n_2) = & -A_2(n_2+1) \sum_{n_1} \frac{p(n_1, n_2)}{1+B_1n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2} \\
& + A_2n_2 \sum_{n_1} \frac{p(n_1, n_2-1)}{1+B_1n_1/A_1+B_2n_2/A_2} \\
& - \frac{3A_1B_2n_2}{4A_2} \sum_{n_1} \frac{(n_1+1)p(n_1, n_2)}{[1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2n_2/A_2] \{1+[B_1(n_1+1)/A_1+B_2n_2/A_2]/4\}} \\
& + \frac{3A_1B_2(n_2+1)}{4A_2} \\
& \times \sum_{n_1} \frac{(n_1+1)p(n_1, n_2+1)}{[1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2(n_2+1)/A_2] \{1+[B_1(n_1+1)/A_1+B_2(n_2+1)/A_2]/4\}} \\
& - \frac{3A_2B_1(n_2+1)}{4A_1} \\
& \times \sum_{n_1} \frac{n_1p(n_1, n_2)}{[1+B_1n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2] \{1+[B_1n_1/A_1+B_2(n_2+1)/A_2]/4\}} \\
& + \frac{3A_2B_1n_2}{4A_1} \sum_{n_1} \frac{n_1p(n_1, n_2-1)}{[1+B_1n_1/A_1+B_2n_2/A_2] \{1+[B_1n_1/A_1+B_2n_2/A_2]/4\}} \\
& - C_2n_2p(n_2) + C_2(n_2+1)p(n_2+1) - A_2' n_2 \sum_{n_1} \frac{p(n_1, n_2)}{1+B_1n_1/A_1+B_2n_2/A_2} \\
& + A_2'(n_2+1) \sum_{n_1} \frac{p(n_1, n_2+1)}{1+B_1(n_1+1)/A_1+B_2(n_2+1)/A_2}, \tag{24}
\end{aligned}$$

这里  $p(n_i)$  表示在第  $i$  模中存在  $n_i$  个光子的几率。(23) 式可用一个一维几率流图来表示, 如图 3 所示。图中每一箭头边的数字表示(23)式中的右边第几项, 这样的几率流图也可沿一维方向扩展到无穷。同样(24)式也可用一个一维几率流图表示。

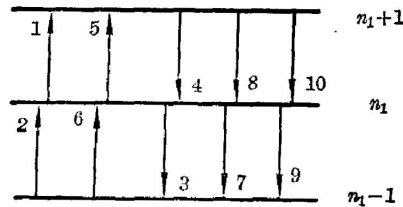


图 3 一维几率流图

Fig. 3 Diagram of probability flow in one dimension

### 三、稳态下的运动方程

系统达到平衡后, 在宏观上反映为每个模的强度保持不变。在微观上反映为  $\dot{p}(n_1) = 0$  和  $\dot{p}(n_2) = 0$ 。细致平衡是宏观平衡的微观反映。一种细致平衡必和一定的宏观平衡相对应。文献[7]提出细致平衡发生在二维几率流图每两个光子态之间。我们认为这是有很大的局限性的。因为这样的细致平衡所对应的宏观平衡条件是不存在的。它除了要求宏观上每个模强度不变外, 还要求其它一些条件, 例如两个模强度相等, 能级之间耦合相等。在文献[10]中我们证明了这种细致平衡考虑的局限性。从本文的二维几率流图也很明白地看出这一点。我们认为对应于宏观上每个模强度不变的细致平衡应发生在两个一维几率流图中

的二光子态之间, 再根据(23)和(24)式中各项的物理意义可得相应方程(23)和(24)式的两个等价方程。

$$\begin{aligned}
 & A_1 \sum_{n_2} \frac{p(n_1, n_2)}{1 + B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2 n_2/A_2} \\
 & + \frac{3A_1 B_2}{4A_2} \sum_{n_2} \frac{n_2 p(n_1, n_2)}{[1 + B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2 n_2/A_2] \{1 + [B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2 n_2/A_2]/4\}} \\
 & = C_1 p(n_1 + 1) + A_1' \sum_{n_2} \frac{p(n_1 + 1, n_2)}{1 + B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2 n_2/A_2} + \frac{3A_2 B_1}{4A_1} \\
 & \times \sum_{n_2} \frac{(n_2 + 1) p(n_1 + 1, n_2)}{[1 + B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2] \{1 + [B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2]/4\}}, \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_2 \sum_{n_1} \frac{p(n_1, n_2)}{1 + B_1 n_1/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2} + \frac{3A_2 B_1}{4A_1} \\
 & \times \sum_{n_1} \frac{n_1 p(n_1, n_2)}{[1 + B_1 n_1/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2] \{1 + [B_1 n_1/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2]/4\}} \\
 & = C_2 p(n_2 + 1) + A_2' \sum_{n_1} \frac{p(n_1, n_2 + 1)}{1 + B_1 n_1/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2} + \frac{3A_1 B_2}{4A_2} \\
 & \times \sum_{n_1} \frac{(n_1 + 1) p(n_1, n_2 + 1)}{[1 + B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2] \{1 + [B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2]/4\}}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

求解(25)和(26)式是很困难的, 但可利用它们求得激光运转的一些基本特性。

#### 四、运转特性的讨论

##### 1. 下能级没有泵浦, 二上能级泵浦率相同, 即 $R_a = R_b$ , $R_c = 0$

在这样条件下,  $A_1 B_2/A_2 = A_2 B_1/A_1$ , 因此(25)和(26)式中左边第2项与右边第3项近似相等。因而(25)和(26)式化为

$$A_1 \sum_{n_2} \frac{p(n_1, n_2)}{1 + B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2 n_2/A_2} = C_1 p(n_1 + 1), \quad (27)$$

$$A_2 \sum_{n_1} \frac{p(n_1, n_2)}{1 + B_1 n_1/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2} = C_2 p(n_2 + 1). \quad (28)$$

当二模都在阈值以上时, (27)和(28)式可写为

$$A_1 p(n_1) = C_1 p(n_1 + 1) [1 + B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2 H_2 \bar{n}_2/A_2], \quad (29)$$

$$A_2 p(n_2) = C_2 p(n_2 + 1) [1 + B_1 H_1 \bar{n}_1/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2]. \quad (30)$$

这里一短横表示光子统计分布的峰值位置。另外还利用了下面的等式

$$\sum_{n_2} \frac{p(n_1, n_2)}{1 + B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2 n_2/A_2} = \frac{p(n_1)}{1 + B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2 H_2 \bar{n}_2/A_2}, \quad (31a)$$

$$\sum_{n_1} \frac{p(n_1, n_2)}{1 + B_1 n_1/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2} = \frac{p(n_2)}{1 + B_1 H_1 \bar{n}_1/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2}, \quad (31b)$$

其中  $H_1$  和  $H_2$  是两个参数, 我们总可选择它们的值使上二等式成立。参数  $H_1$  是与第一模

的光子统计分布有关,  $H_2$  与第二模的光子统计分布有关<sup>[\*]</sup>。在忽略相互之间的关连<sup>[7]</sup>, 即假定  $\bar{n}_i^r = \bar{n}_i$ ,  $\bar{n}_1^r \bar{n}_2^r = \bar{n}_1 \bar{n}_2$  成立, 则  $H = 1$ ; 当考虑到关连时,  $H \neq 1$ , 但可认为  $H$  很接近于 1。

由(29)和(30)式可得形式解

$$p(n_1) = \mathcal{N}_1^{-1} \prod_{j=1}^{n_1} \frac{A_1}{C_1} \frac{1}{1 + B_j/A_1 + B_2 H_2 \bar{n}_2/A_2}, \quad (32a)$$

$$p(n_2) = \mathcal{N}_2^{-1} \prod_{j=1}^{n_2} \frac{A_2}{C_2} \frac{1}{1 + B_1 H_1 \bar{n}_1/A_1 + B_j/A_2}, \quad (32b)$$

其中  $\mathcal{N}_1$  和  $\mathcal{N}_2$  是归一化常数。

(1) 阈值条件 因为(32a)和(32b)式右边连乘中的每一个因子都小于 1, 因此可得阈值条件为

$$\frac{A_1}{C_1} = \frac{1}{1 + B_2 H_2 \bar{n}_2/A_2} = 1 \quad (\text{对模 1}), \quad (33)$$

$$\frac{A_2}{C_2} = \frac{1}{1 + B_1 H_1 \bar{n}_1/A_1} = 1 \quad (\text{对模 2}). \quad (34)$$

每个模的阈值不但与对应的  $A$  和  $C$  有关, 还与另一模的强度有关。这是因为另一模的存在相当于对下能级的一个泵浦。从(25)和(26)式中下能级泵浦项的位置(或者从单模二能级情况)可知对下能级的泵浦主要起着损耗的作用。

在  $p(n) = p(n-1)$  条件下, 从(29)和(30)式得光子统计分布的峰值位置

$$1 + B_1 \bar{n}_1/A_1 + B_2 H_2 \bar{n}_2/A_2 = A_1/C_1, \quad (35)$$

$$1 + B_1 H_1 \bar{n}_1/A_1 + B_2 \bar{n}_2/A_2 = A_2/C_2. \quad (36)$$

如令  $H \bar{n} = 0$ , 即不考虑另一模的影响, 则可得最低阈值条件及最大的光子统计分布位置

$$(\bar{n}_1)_{\max} = A_1(A_1/C_1 - 1)/B_1, \quad (\bar{n}_2)_{\max} = A_2(A_2/C_2 - 1)/B_2. \quad (37)$$

(2)  $A_1 > C_1, A_2 < C_2$  在这样的情况下, 模 2 不能起振, 因此近似有  $H_2 \bar{n}_2 = 0$ 。(29)式就化为单模情况下的公式, 而由于  $\bar{n}_1$  的作用, 从(30)式可知, 模 2 的光子统计分布更趋于 0, 如图 4 所示<sup>[10]</sup>。

(3) 单模运转的条件 由(35)式可得

$$\begin{aligned} B_1 \bar{n}_1/A_1 &= A_1/C_1 - 1 - B_2 H_2 \bar{n}_2/A_2 \\ &\geq A_1/C_1 - 1 - B_2 (\bar{n}_2)_{\max}/A_2 = A_1/C_1 - A_2/C_2. \end{aligned} \quad (38)$$

图 4 阈值以下时的光子统计分布  
1—另一模存在时; 2—另一模不存在时

Fig. 4 The photon probability distribution below the threshold value

1—in the existence of the other mode;  
2—in the absence of the other mode

由(34)式可知, 当下式成立时, 第二模不能起振。

$$A_2/C_2 \leq 1 + B_1 H_1 \bar{n}_1/A_1 = 1 + B_1 \bar{n}_1/A_1, \quad (39)$$

以(38)式代入(39)式得

$$A_1/C_1 \geq 2A_2/C_2 - 1, \quad (40)$$

当(40)式成立时, 第二模不能起振, 即单模运转。当  $(A_1/C_1)/(A_2/C_2) \geq 2$  时无论泵浦多高都不能使第二模起振<sup>[5]</sup>。

[\*]  $H_2$  还与  $n_1$  有关( $H_1$  还与  $n_2$  有关), 但随  $n_1$  的变化不大, 特别在峰值附近, 因此可以不计。

(4)  $A_1/C_1 > A_2/C_2 > 1$ ,  $A_1/C_1 = \alpha A_2/C_2$ , ( $2 \geq \alpha \geq 1$ ) 当泵浦达到一定时可使二模同时起振。 $\alpha$  越大使二模起振所需的泵浦率就越高。由(35)和(36)式可形式上解得

$$\frac{B_1 \bar{n}_1}{A_1} = \frac{A_2(H_2 - \alpha)/C_2 - (H_2 - 1)}{H_1 H_2 - 1}, \quad (41)$$

$$\frac{B_2 \bar{n}_2}{A_2} = \frac{A_2(H_1 \alpha - 1) - (H_1 - 1)}{H_1 H_2 - 1}. \quad (42)$$

当  $\alpha = 1$  时  $A_1/C_1 = A_2/C_2 = A/C$ , 可得

$$\frac{B_1 \bar{n}_1}{A_1} + \frac{B_2 \bar{n}_2}{A_2} = \frac{H_1 + H_2 - 2}{H_1 H_2 - 1} \left( \frac{A}{C} - 1 \right) = \frac{A}{C} - 1. \quad (43)$$

当  $C_1 = C_2$  时上式可严格导出<sup>[10]</sup>。

(5) 光子统计分布 当二模同时存在时, 第一模的光子统计由(31)式决定。虽然我们并不能给出精确的结果, 但可通过与具有相同峰值的单模情况下的光子统计分布比较了解一些特性。在单模情况下有

$$p_s(n+1) = \frac{A_s}{C_s} \frac{p_s(n)}{1 + B_s(n+1)/A_s}. \quad (44)$$

令  $B_1/A_1 = B_s/A_s$ ,  $\bar{n}_1 = \bar{n}_s$ , 则  $A_s/C_s = A_1/C_1 - B_2 H_2 \bar{n}_2/A_2$ 。考虑与斜率成比例的比值  $K^{[*]}$

$$K = \frac{A_s/C_s(1 + B_s \bar{n}/A_s) - 1}{A_1/C_1(1 + B_1 \bar{n}_1/A_1 + B_2 H_2 \bar{n}_2/A_2) - 1} = \frac{1 + B_1 \bar{n}_1/A_1 + B_2 H_2 \bar{n}_2/A_2}{1 + B_1 \bar{n}_1/A_1}.$$

这说明具有相同峰值的单模情况下的光子统计分布曲线陡, 双模运转时一个模的光子统计分布曲线平坦, 如图 5 所示。

## 2. 下能级的泵浦, 二上能级泵浦率相同, 即 $R_a = R_b = R$

在这样条件下, (25)和(26)式化为

$$A_1 p(n_1) = C_1 p(n_1 + 1) [1 + B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2 H_2 \bar{n}_2/A_2] + A'_1 p(n_1 + 1), \quad (45)$$

$$A_2 p(n_2) = C_2 p(n_2 + 1) [1 + B_1 H_1 \bar{n}_1/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2] + A'_2 p(n_2 + 1). \quad (46)$$

(35)和(36)式化为

$$(A_1 - A'_1)/C_1 = 1 + B_1 \bar{n}_1/A_1 + B_2 H_2 \bar{n}_2/A_2, \quad (47)$$

$$(A_2 - A'_2)/C_2 = 1 + B_1 H_1 \bar{n}_1/A_1 + B_2 \bar{n}_2/A_2. \quad (48)$$

这相当于对二上能级为泵浦从  $R$  变为  $R - R_c$ , 对下能级的泵浦从  $R_c$  变为 0。因此峰值位置及运转特性与下能级无泵浦, 而上能级泵浦为  $R - R_c$  的情况基本相同。但光子统计分布曲线有些变化。我们令  $A'_1 p(n_1 + 1) = A'_1 K' p(n_1)$ 。这里  $K'$  是一个很接近 1 的数, 在峰值前  $K' > 1$ , 在峰值后  $K' < 1$ 。因此(45)式可写为

$$(A_1 - K' A'_1) p(n_1) = C_1 p(n_1 + 1) [1 + B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2 H_2 \bar{n}_2/A_2]. \quad (49)$$

如果  $K' = 1$ , 这就是上能级泵浦率为  $R - R_c$ , 下能级没有泵浦的情况。现在在小于峰值一

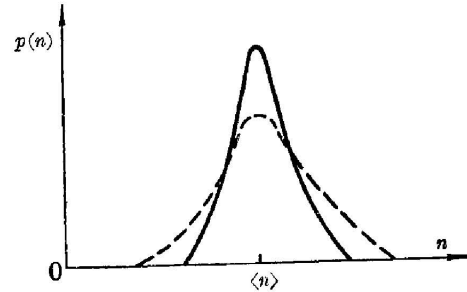


图 5 光子统计曲线比较

(实线: 单模情况下; 虚线: 双模情况下)

Fig. 5 The comparison of the curves of photon statistical

(solid line: in single mode operation; dotted line: in two mode operation)

[\*]  $K$  不是斜率比, 但不影响结果的正确性。

边,  $K' > 1$ , 这说明光子统计分布曲线随  $n_1$  增加而上升缓慢, 在大于峰值一边  $K' < 1$ , 说明下降也缓慢。因此光子统计分布曲线降低变平坦, 类似图 5 所示, 唯图 5 中的实线代表下能级没泵浦时情况, 而虚线代表下能级有泵浦时的情况。

### 3. 下能级没泵浦, 二上能级有不同泵浦, $R_b > R_a$

在这样条件下, 则(25)和(26)式化为

$$\begin{aligned} A_1 p(n_1) + \frac{3A_2 B_1 \bar{n}_2 (R_b/R_a - 1)/4A_1}{1 + [B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2 H_2 \bar{n}_2/A_2]/4} p(n_1) \\ = C_1 p(n_1 + 1) [1 + B_1(n_1 + 1)/A_1 + B_2 H_2 \bar{n}_2/A_2], \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} A_2 p(n_2) - \frac{3A_2 B_1 \bar{n}_1 (R_b/R_a - 1)/4A_1}{1 + [B_1 H_1 \bar{n}_1/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2]/4} p(n_2) \\ = C_2 p(n_2 + 1) [1 + B_1 H_1 \bar{n}_1/A_1 + B_2(n_2 + 1)/A_2]. \end{aligned} \quad (51)$$

这里利用了(31a)和(31b), 以及在双光子过程中应用  $p(n) = p(n-1)$  的近似。  $H'$  也是一个接近 1 的参数。

在(50)和(51)式中左边第二项, 双光子过程式正好一正一负。一个主要起增益作用, 另一个主要起损耗作用。这是由于两个双光子过程的不平衡引起的。在  $R_b > R_a$  情况下, 它们的作用利于模 1 而不利于模 2, 并且在另一模不存在, 即  $\bar{n} = 0$  时为 0, 随着另一模的增加而增加。最终趋于一个定值乘以  $A_2$ 。因此在一定条件下它们的作用可超过第一项的作用。

## 五、结 论

由以上的讨论我们有如下结论:

(1) 由于采用三能级代替二能级原子系统, 以双模代替了单模, 同时又考虑了三个能级都有泵浦的情况。所得之主方程比较复杂。主方程中出现了与双光子过程有关的四项。这些项反映了发射一个模的光子而吸收另一个模的光子的级联跃迁过程, 也参与了两模的竞争过程。这种过程在二能级单模理论中是没有的。同时在采用三能级系统的文献[7], [10]中是没有涉及到的。

(2) 在主方程求解过程中, 首先要对主方程作统计解释, 正确画出几率流图是很有必要的。在双模情况下, 一个  $(n_1, n_2)$  光子态要与邻近的六个光子态发生几率流关系, 本文提出一个二维几率流图, 它能沿二维光子数坐标延伸到无穷。并且根据光子统计分布理论, 将二维变数约化为一维变数表示。合理地考虑到细致平衡与宏观平衡之间的对应关系, 获得稳态下的运动方程。

(3) 本文引入一个参数  $H$ , 得到形式解。由此出发讨论了阈值条件, 单模运转条件以及光子统计分布及模竞争等问题。与文献[8]所报导的结果相似。

## 附 录

在场作用下没有衰退的共下能级三能级原子的运动规律  
相互作用能为(2)式, 在相互作用表象下有

$$V^T = g_1 \exp[-i(\Omega_1 - \omega_1)t] a_1 A_0^\dagger A_0 + g_2 \exp[-i(\Omega_2 - \omega_2)t] a_2 A_0^\dagger A_0 + \text{H.C.} \quad (A1)$$

其中  $\omega_1 = \omega_b - \omega_c$ ,  $\omega_2 = \omega_a - \omega_c$ 。共振情况下  $\omega_1 = \Omega_1$ ,  $\omega_2 = \Omega_2$ 。

态矢量的运动方程为

$$\frac{d}{dt} |\psi^I(t)\rangle = -iV^I |\psi^I(t)\rangle. \quad (\text{A2})$$

1. 初始原子处于  $|a\rangle$  态

$$|\psi^I(0)\rangle = |a\rangle |n_1, n_2\rangle. \quad (\text{A3})$$

令

$$|\psi^I(t)\rangle = a_{n_1, n_2}(t) |a\rangle |n_1, n_2\rangle + b_{n_1-1, n_2+1}(t) |b\rangle |n_1-1, n_2+1\rangle + c_{n_1, n_2+1}(t) |c\rangle |n_1, n_2+1\rangle. \quad (\text{A4})$$

以(A1)和(A4)式代入(A2)式,利用(A3)式得

$$a_{n_1, n_2}(t) = \frac{1}{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2 (n_2+1)} \{ |g_2|^2 (n_2+1) \cos \sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2 (n_2+1)} t + |g_1|^2 n_1 \}, \quad (\text{A5})$$

$$b_{n_1-1, n_2+1}(t) = \frac{g_1 g_2^* \sqrt{n_1(n_1+1)}}{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2 (n_2+1)} \{ \cos \sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2 (n_2+1)} t - 1 \}, \quad (\text{A6})$$

$$c_{n_1, n_2+1}(t) = \frac{-i g_2^* \sqrt{n_2+1}}{\sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2 (n_2+1)}} \sin \sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2 (n_2+1)} t. \quad (\text{A7})$$

2. 初始原子处于  $|b\rangle$  态

$$|\psi^I(0)\rangle = |b\rangle |n_1, n_2\rangle. \quad (\text{A8})$$

令

$$|\psi^I(t)\rangle = a_{n_1+1, n_2-1}(t) |a\rangle |n_1+1, n_2-1\rangle + b_{n_1, n_2}(t) |b\rangle |n_1, n_2\rangle + c_{n_1+1, n_2}(t) |c\rangle |n_1+1, n_2\rangle. \quad (\text{A9})$$

以(A1)和(A9)式代入(A2)式,利用(A8)式得

$$a_{n_1+1, n_2-1}(t) = \frac{g_1^* g_2 \sqrt{n_2(n_2+1)}}{|g_1|^2 (n_1+1) + |g_2|^2 n_2} \{ \cos \sqrt{|g_1|^2 (n_1+1) + |g_2|^2 n_2} t - 1 \}, \quad (\text{A10})$$

$$b_{n_1, n_2}(t) = \frac{1}{|g_1|^2 (n_1+1) + |g_2|^2 n_2} \{ |g_1|^2 (n_1+1) \cos \sqrt{|g_1|^2 (n_1+1) + |g_2|^2 n_2} t + |g_2|^2 n_2 \}, \quad (\text{A11})$$

$$c_{n_1+1, n_2}(t) = \frac{-i g_1^* \sqrt{n_1+1}}{\sqrt{|g_1|^2 (n_1+1) + |g_2|^2 n_2}} \sin \sqrt{|g_1|^2 (n_1+1) + |g_2|^2 n_2} t. \quad (\text{A12})$$

3. 初始原子处于  $|c\rangle$  态

同理可得

$$a_{n_1, n_2-1}(t) = \frac{-i g_2 \sqrt{n_2}}{\sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2 n_2}} \sin \sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2 n_2} t, \quad (\text{A13})$$

$$b_{n_1-1, n_2}(t) = \frac{-i g_1 \sqrt{n_1}}{\sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2 n_2}} \sin \sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2 n_2} t, \quad (\text{A14})$$

$$c_{n_1, n_2}(t) = \cos \sqrt{|g_1|^2 n_1 + |g_2|^2 n_2} t. \quad (\text{A15})$$

## 参 考 文 献

- [1] M. O. Scully, W. E. Lamb; *Phys. Rev.*, 1967, **159**, No. 2 (10 Jul), 208.
- [2] M. O. Scully, W. E. Lamb; *Phys. Rev.*, 1968, **166**, No. 2 (10 Feb), 246.
- [3] M. O. Scully, W. E. Lamb; *Phys. Rev.*, 1969, **179**, No. 2 (10 Mar), 368.
- [4] M. O. Scully, D. M. Kim *et al.*; *Phys. Rev.*, 1970, **2**, No. 6 (Dec), 2529.
- [5] M. Sargent, M. O. Scully *et al.*; *Appl. Opt.*, 1970, **9**, No. 11 (Nov), 2423.
- [6] Y. R. Wang, W. E. Lamb; *Rhys. Rev.*, 1973, **8**, No. 2 (Aug), 866.
- [7] S. Singh, M. S. Zubairy; *Phys. Rev.*, (A), 1980, **21**, No. 1 (Jan), 281.
- [8] K. Ostuka; *IEEE J. Q. E.*, 1978, **QE-14**, No. 12 (Dec), 1007.
- [9] M. Szymanski; *Appl. Phys.*, 1981, **24**, No. 1 (Jan), 13.
- [10] 朱诗尧, 苏大春; *Phys. Rev. (A)*, 1982, **25**, No. 2.
- [11] M. Sargent, M. O. Scully *et al.*; *Laser Physics* (Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1974).

## The quantum theory of the two-mode laser in a three-level atomic system with common low level

ZHU SHIYAO

(Department of Physics, Shanxi University, Taiyuan)

(Received 15 July 1981)

### Abstract

The quantum theory of two-level atom single-mode laser system of Sargent, Scully and Lamb is extended to two-mode laser in a three-level atomic system with common lower level, and master equation is obtained for the system with all the three levels being pumped. There appear four terms in the master equation that are absent in the single-mode case and those interpreted as 2-photon processes play an especial role in the present case. The master equation is represented by a probability flow diagram in two-dimensions with the photon numbers  $n_1$  and  $n_2$  of the two-mode as variables. The probability flow diagram can be extended to infinity, and each arrow of it represents a term of the right hand side of master equation. By taking sum over one of the variables  $n_1$  or  $n_2$ , the master equation is reduced to two equations, each of them can be represented by an one-dimensional probability flow diagram. The equation of motion under steady state is obtained by considering the correspondence between the macroscopic balance and the microscopic balance.

A parameter  $H$  is introduced to reduce the equation of motion and to facilitate the mathematical procedure and a formal solution is thus obtained. Using the equation of motion and its formal solution various operation characteristics are discussed. Among them are: the threshold condition for each mode; the condition of only one mode operation; the variation of photon statistics between single-mode operation and two-mode operation and the variation of photon statistics with lower level being pumped and not pumped.