

对兰斯别尔格介电常数椭球的商榷

龚 义 森

(南京通信工程学院)

1. 兰斯别尔格 (Ландсберг) 的介电常数椭球 (эллипсоид диэлектрической постоянной)

苏联兰斯别尔格院士所著《光学》(Оптика)一书于1954年发行第三版(该版由北京大学杨荫荪、张之翔译出,1957年在我国出版)。此书的第廿五章“晶体光学基础”中多次谈到介电常数椭球。如中译本464页上说:“在各向异性媒质方面,关于介电常数的一般规律是这样,那就是介电常数的全部数值可以用一个三轴的椭球来代表,这个椭球的三个主轴是 α , β , γ 。(按:后面兰斯别尔格把 α , β , γ 换成 ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z)如果在任一方向上作出上述椭球的径向矢量,则此径向矢量的长度就代表该方向上介电常数的数值……”,该页上注②说:“某一种数量,如果它的全部数值可以用一个椭球来代表,则称为二级张量。这样,媒质的光学各向异性可以用一个介电常数张量或介电常数椭球来说明。”

该书中译本465页又说:“在各向异性媒质,介电常数椭球系用下列方程表出:

$$\frac{x^2}{\epsilon_x^2} + \frac{y^2}{\epsilon_y^2} + \frac{z^2}{\epsilon_z^2} = 1, \quad (136.1)$$

(按:为方便起见,本文以后一律用 x_1, x_2, x_3 来代替坐标 x, y, z ,相应地用 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 代替 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$)

该书中译本468页和472页以及图287又具体叙述了怎样由这个介电常数椭球来找光沿晶体中某一方向传播时的两种光线速度,两个偏振波 E 矢量的振动方向和光线轴的方向等的Fresnel法则。

1957年苏联出版了兰斯别尔格的这本《光学》的第四版(我国于1965年出版了第四版中译本)。第四版中虽把原三版468页及472页(第三版中译本页数)的叙述去掉,而代之以Fresnel的椭球和折射率椭球的分析,可是,却仍然原封不动地保留着第三版中译本464页(俄文第四版的页数是427)那段对介电常数椭球的叙述和注②。

所以他坚持认为:另外还存在着一个介电常数椭球,其三个半轴长为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$,而椭球任一矢径 r 的大小等于该方向的介电常数值;这椭球和介电常数张量相对应。

2. 对于上述论点的商榷

(1) 晶体的介电常数张量对应的是Fresnel椭球,而不是兰斯别尔格的介电常数椭球。

按照张量分析理论,任何二阶对称张量均可用一椭球表示,而且这一椭球方程的六个系数就等于二阶对称张量的六个分量,并且叫做该张量的表象曲面,它们二者相对应,而且是唯一的。

事实上,一椭球的方程为

$$\sum_{i,j} s_{ij} x_i x_j = 1 \quad (i, j = 1, 2, 3; s_{ij} = s_{ji})。$$

展开后得 $s_{11}x_1^2 + s_{22}x_2^2 + s_{33}x_3^2 + 2s_{23}x_2x_3 + 2s_{31}x_3x_1 + 2s_{12}x_1x_2 = 1。$

这样就可以证明,在座标变换时,满足

$$s'_{k\ell} = \sum_{i,j} s_{ij} a_{ki} a_{\ell j},$$

而这是二阶张量定义,所以椭球方程系数 s_{ij} 分别等于二阶对称张量 \vec{s} 的六个独立分量。

晶体的介电常数满足二阶张量定义,且又有 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$,所以晶体的介电常数是一个二阶对称张量,它的表象曲面为一椭球,而其独立的六个分量 ε_{ij} 分别是椭球方程的六个系数。

在一般任意坐标系中,介电常数张量可用矩阵表示为

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}。$$

它所对应的表象曲面椭球方程为

$$\sum_{i,j} \varepsilon_{ij} x_i x_j = 1 \quad (i, j = 1, 2, 3)。$$

而当采用晶体的介电主轴坐标系时, $\vec{\varepsilon}$ 矩阵变为

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}。$$

这时对应的表象曲面椭球的方程为

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 1,$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为张量 $\vec{\varepsilon}$ 的主值。

但是,这是晶体光学中熟知的 Fresnel 椭球,而不是兰斯别尔格的介电常数椭球。Fresnel 椭球的半轴长分别为 $1/\sqrt{\varepsilon_1}, 1/\sqrt{\varepsilon_2}, 1/\sqrt{\varepsilon_3}$, 而不是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 。对 Fresnel 椭球可以运用 Fresnel 作图法则来求光线速度 v_1, v_2 , 两偏振波 \mathbf{E} 的方向和光线轴方位等等(详见一般晶体光学书,本文不赘述)。而兰斯别尔格的介电常数椭球则不能用 Fresnel 法则确定上述这些量。运用 Fresnel 法则求得 Fresnel 椭球的任一矢径 r 的大小为

$$r = n_r^{-1} = 1/\sqrt{\varepsilon},$$

其中 n_r 为光线折射率。这里明确看出 $r \neq \varepsilon$ 。

总之,只有 Fresnel 椭球方程的六个(或三个)系数才分别等于介电常数张量的六个独立分量值(或三个主值)。所以 Fresnel 椭球才是和介电常数张量唯一地对应的表象曲面!而兰斯别尔格定义的介电常数椭球方程系数为 $\varepsilon_1^{-2}, \varepsilon_2^{-2}, \varepsilon_3^{-2}$, 它们分别不等于介电常数张量的各分量值(或主值),所以它不是和介电常数张量相对应的表象曲面。

(2) 兰斯别尔格的介电常数椭球的任一矢径 r 的大小等于该方向的介电常数 ε 吗?

在晶体中某给定方向的介电常数 ε 可这样求出。使电场 \mathbf{E} 沿此给定方向,由于晶体的各向异性,引起的 \mathbf{D} 一般不与 \mathbf{E} 平行。可以把 \mathbf{D} 分解为平行于 \mathbf{E} 的分量 \mathbf{D}_\parallel 和垂直于 \mathbf{E} 的分量 \mathbf{D}_\perp , 则沿此给定方向之 ε 定义为

$$\varepsilon = \frac{D_\parallel}{\varepsilon_0 E} = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{\varepsilon_0 E^2}。$$

设给定方向的三个方向余弦为 l_1, l_2, l_3 , 则使电场 \mathbf{E} 沿此给定方向, 就有

$$\mathbf{E} = [l_1 E, l_2 E, l_3 E]_0$$

在晶体主轴坐标系中, 这时有

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \vec{\epsilon} \mathbf{E} = [\epsilon_0 \epsilon_1 l_1 E, \epsilon_0 \epsilon_2 l_2 E, \epsilon_0 \epsilon_3 l_3 E]_0$$

所以沿此给定方向的

$$\epsilon = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{\epsilon_0 E^2} = \epsilon_1 l_1^2 + \epsilon_2 l_2^2 + \epsilon_3 l_3^2,$$

而在任意坐标系中, \mathbf{D} 不能写成上面主轴坐标系那样简单的形式, 这时沿此给定方向的

$$\epsilon = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{\epsilon_0 E^2} = [l_1, l_2, l_3] \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \sum_{i,j} \epsilon_{ij} l_i l_j \quad (i, j=1, 2, 3,)$$

下面再分析兰斯别尔格介电常数椭球并求其矢径 \mathbf{r} 。在晶体主轴坐标系中, 若 \mathbf{E} 的方向余弦为 l_1, l_2, l_3 , 而 \mathbf{E} 在座标轴上的投影分别为 E_1, E_2, E_3 , 则当然有

$$\frac{E_1^2}{E^2} + \frac{E_2^2}{E^2} + \frac{E_3^2}{E^2} = 1_0$$

相应地 \mathbf{D} 在这个主轴坐标系中的三分量分别为 D_1, D_2 和 D_3 , 就有

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \epsilon_0 \epsilon_1 E_1, \\ D_2 &= \epsilon_0 \epsilon_2 E_2, \\ D_3 &= \epsilon_0 \epsilon_3 E_3. \end{aligned} \right\}$$

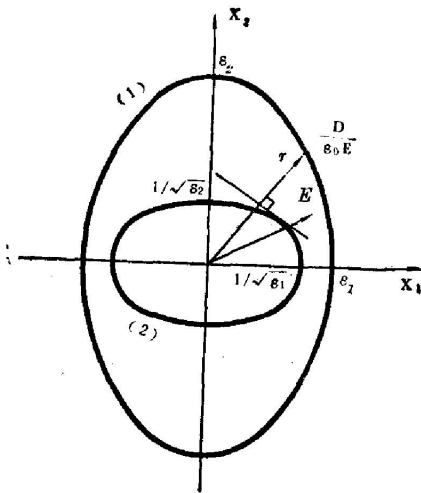


图 1

(1) 兰斯别尔格介电常数椭球; (2) Fresnel 椭球 (分别在 $X_1 X_2$ 座标平面上的截痕)

Fig. 1

(1) Landsberg's dielectric constant ellipsoid; (2) Fresnel ellipsoid (Intercepted separately on $X_1 X_2$ coordinate plane)

代入上式就有

$$\frac{(D_1/\epsilon_0 E)^2}{\epsilon_1^2} + \frac{(D_2/\epsilon_0 E)^2}{\epsilon_2^2} + \frac{(D_3/\epsilon_0 E)^2}{\epsilon_3^2} = 1_0$$

所以矢径 $\mathbf{r} = \mathbf{D}/\epsilon_0 E$ 的端点在下述的兰斯别尔格介电常数椭球上:

$$\frac{x_1^2}{\epsilon_1^2} + \frac{x_2^2}{\epsilon_2^2} + \frac{x_3^2}{\epsilon_3^2} = 1_0 \quad (136.1)$$

这就是说, 对这个介电常数椭球其矢径 \mathbf{r} 平行于 \mathbf{D} 而不是第三版上所说的 $\mathbf{r} \parallel \mathbf{E}$ 。若 \mathbf{E} 保持大小不变而在空间取一切可能方向, 则矢量 $\mathbf{D}/\epsilon_0 E$ 的端点就画出这一椭球面。为了确定 \mathbf{D} 的方向, 可利用 Fresnel 椭球性质, 即 \mathbf{D} 垂直于 \mathbf{E} 矢量与 Fresnel 椭球交点的切面。

而介电常数椭球的矢径大小

$$r = \frac{D}{\epsilon_0 E} = \sqrt{\frac{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}{\epsilon_0^2 E^2}} = \sqrt{\frac{\epsilon_1^2 E_1^2 + \epsilon_2^2 E_2^2 + \epsilon_3^2 E_3^2}{E^2}} = \sqrt{\epsilon_1^2 l_1^2 + \epsilon_2^2 l_2^2 + \epsilon_3^2 l_3^2}$$

前已指出, \mathbf{E} 的方向余弦若为 l_1, l_2, l_3 则沿此 \mathbf{E} 方向的

$$\varepsilon = \varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 l_2^2 + \varepsilon_3 l_3^2,$$

但现在矢径 r 是沿 D 方向的, 而兰斯别尔格说的是: “如果任一方向上作出上述椭球的径向矢量, 则此径向矢量的长度就代表该方向上介电常数的数值。”所以下面再计算沿 r 方向上的 ε , 看它是否等于 r ?

设 r (即 D) 的三个方向余弦为 l'_1, l'_2, l'_3 , 则 r 方向的

$$\varepsilon = \varepsilon_1 l'^2_1 + \varepsilon_2 l'^2_2 + \varepsilon_3 l'^2_3,$$

而 D 在主轴 x_1 上的分量

$$D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 l_1 E = l'_1 D_0.$$

所以

$$l'_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 l_1 E}{D}.$$

同理有

$$l'_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 l_2 E}{D},$$

$$l'_3 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_3 l_3 E}{D}.$$

所以

$$\begin{aligned} r \text{ 方向的 } \varepsilon &= \varepsilon_1 \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 l_1 E}{D} \right)^2 + \varepsilon_2 \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 l_2 E}{D} \right)^2 + \varepsilon_3 \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_3 l_3 E}{D} \right)^2 \\ &= \frac{1}{r^2} [\varepsilon_1^3 l_1^2 + \varepsilon_2^3 l_2^2 + \varepsilon_3^3 l_3^2]. \end{aligned}$$

但前面已指出 $r = \frac{D}{\varepsilon_0 E} = \sqrt{\varepsilon_1^2 l_1^2 + \varepsilon_2^2 l_2^2 + \varepsilon_3^2 l_3^2}$, 所以 $r \neq \varepsilon$. 因此对于兰斯别尔格定义的方程为 $\frac{x_1^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{x_2^2}{\varepsilon_2^2} + \frac{x_3^2}{\varepsilon_3^2} = 1$ 的介电常数椭球, 得不出他说的“矢径长等于该矢径方向的介电常数”的结论。

(3) “矢径长等于该矢径方向的介电常数”的曲面, 是什么样的曲面呢?

在主轴坐标系中, 若矢径 r 的三个方向的余弦为 l'_1, l'_2, l'_3 , 则现在有

$$\varepsilon = \varepsilon_1 l'^2_1 + \varepsilon_2 l'^2_2 + \varepsilon_3 l'^2_3 = r.$$

两边乘以 r^2 , 并注意 $x_1 = r l'_1, x_2 = r l'_2, x_3 = r l'_3$, 就有

$$(\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3.$$

这是一个六次卵形面, 它显然不是介电常数椭球 (136.1)。

而对于晶体中任意坐标系, 矢径方向为 $[l'_1, l'_2, l'_3]$ 的介电常数为

$$\varepsilon = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} l'_i l'_j \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

同样, 它若等于此方向上矢径 r 的大小

$$\sum_{i,j} \varepsilon_{ij} l'_i l'_j = r,$$

和刚才一样地两边乘以 r^2 , 并利用 $x_1 = r l'_1, \dots$ 等展开, 就有

$$(\varepsilon_{11} x_1^2 + \varepsilon_{22} x_2^2 + \varepsilon_{33} x_3^2 + 2\varepsilon_{23} x_2 x_3 + 2\varepsilon_{31} x_3 x_1 + 2\varepsilon_{12} x_1 x_2)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3.$$

当然, 这也不是兰斯别尔格的介电常数椭球。

(4) 其它书籍有关二阶对称张量及对应的椭球的表述。

李政道著《物理学中的数学方法》一书 21~22 页讲述了。

“定理 1.7 任一非零的二阶对称张量都唯一地对应了由下面方程所确定的二阶曲面。

$$\sum_{i,j} T_{ij} x_i x_j = \pm 1,$$

T_{ij} 是张量 \vec{T} 的六个独立分量”。

因此, 按此定理, 和二阶对称张量 $\vec{\epsilon}$ 对应的二次曲面, 应该唯一的是由方程 $\sum_{i,j} \epsilon_{ij} x_i x_j = 1$ (或在主轴坐标系方程: $\epsilon_1 x_1^2 + \epsilon_2 x_2^2 + \epsilon_3 x_3^2 = 1$) 所表示的 Fresnel 椭球。

另外, 朗道和栗弗席兹著的《连续介质电动力学》中译本下册 440 页上, 和他二人所著《连续介质力学》中译本第三册 730 页上都指出: “和介电常数张量相对应的张量椭球是 Fresnel 椭球, 其方程为 $\epsilon^{(x)} x^2 + \epsilon^{(y)} y^2 + \epsilon^{(z)} z^2 = 1$ 或简写成 $\epsilon_{ik} x_i x_k = 1$ ”, 所以和张量 $\vec{\epsilon}$ 相对应的不是兰斯别尔格的介电常数椭球。

众所周知, 刚体力学中有个转动惯量张量 \mathbf{I} , 和它对应的有一个转动惯量椭球。但是决不能由此认为和介电常数张量 $\vec{\epsilon}$ 相对应的就是介电常数椭球。相反地, 把转动惯量椭球和 Fresnel 椭球一一对比, 二者完全相对应, 所以只有 Fresnel 椭球才是和张量 $\vec{\epsilon}$ 对应的。

Jenkins & White 著的《Fundamentals of Optics》用了介电椭球 (dielectric ellipsoid) 这一名词, 但其方程为

$$\frac{x_1^2}{\epsilon_1} + \frac{x_2^2}{\epsilon_2} + \frac{x_3^2}{\epsilon_3} = 1。$$

这一椭球的三个半轴长分别为 $\sqrt{\epsilon_1}$, $\sqrt{\epsilon_2}$, $\sqrt{\epsilon_3}$ 。其矢径 r 的大小

$$r = n = n_r / \cos \alpha = \sqrt{\epsilon} / \cos \alpha$$

(这里 n 是折射率, α 为晶体中 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 的夹角)。所以它也根本不是介电常数椭球, 它是晶体光学中熟知的折射率椭球。应当指出, 和折射率椭球相对应的是另一个张量——折射率张量 (index tensor) $\vec{\eta}$, 折射率椭球方程的六个系数分别等于 $\vec{\eta}$ 的六个独立分量, 而折射率张量是介电常数张量的逆阵。

$$\vec{\eta} = [\vec{\epsilon}]^{-1}。$$

(5) 查阅晶体光学书籍, 一般有八种光学示性面用来描述晶体的光学性质。但其中却不包括这个介电常数椭球。固然, 我们可以象兰斯别尔格这样人为地定义这个椭球, 使三个半轴长分别为 ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 , 即有

$$\epsilon_1^{-2} x_1^2 + \epsilon_2^{-2} x_2^2 + \epsilon_3^{-2} x_3^2 = 1。 \quad (136.1)$$

这意味着, 在主轴坐标系 (x_1, x_2, x_3) , 它唯一地对应的二阶对称张量 \vec{c} , 这 \vec{c} 的三个主值为 $c_1 = \epsilon_1^{-2}$, $c_2 = \epsilon_2^{-2}$, $c_3 = \epsilon_3^{-2}$ 。而在任意坐标系 (x'_1, x'_2, x'_3) 中, 上述椭球的方程变为

$$c_{11} x_1'^2 + c_{22} x_2'^2 + c_{33} x_3'^2 + 2c_{23} x_2' x_3' + 2c_{31} x_3' x_1' + 2c_{12} x_1' x_2' = 1。$$

这里张量 \vec{c} 的六个独立分量 c_{ij} 可通过张量矩阵在两坐标系之间互换而由 c_1, c_2, c_3 求得, 因而可求出 c_{ij} 与 $\epsilon_1^{-2}, \epsilon_2^{-2}, \epsilon_3^{-2}$ 的关系式。同样 ϵ_{ij} 也可由坐标互换而求得 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 的关系式。从而可以证明, $c_{ij} \neq \epsilon_{ij}$ 。所以和介电常数椭球唯一地对应的二阶对称张量 \vec{c} 并不是介电常数张量 $\vec{\epsilon}$ 。

1976 年, 苏联出版了《光学》的第五版, 它比第四版又作了较多的修改, 但在晶体光学这一章中, 除了最后添加了一节空间色散效应外, 其它变动不大。特别是关键性的对应第三版中译本 464 页的介电常数椭球的叙述, 以及该页注②的叙述, 还是和第四版一样, 原封不动 (见俄文第五版 498 页)。所以看来直到 1976 年, 编第五版的兰斯别尔格的一些学生和同事们还是坚持他这个介电常数椭球的论点的。

(下转第 187 页)

The measurement of time-synchronization for six-beam laser by making use two-photon fluorescence

YU WENYAN XIE ZIMING LI ANMING AND HE XINGFA
(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 7 January 1981)

Abstract

In the target experiment by multi-beam irradiation time-synchronization is very important. Using a method of two-photon fluorescence (TPF), we have measured the time-synchronization of six beams Nd³⁺ glass high power laser system (6×10^{11} W). The active-passive mode-locked Nd³⁺:YAG oscillator of the time-synchronization was used as the light source for the time-synchronization measurement. The pulse width was 20 ps.

Time-synchronization for two opposite beams was measured using a TPF cell capable of four beam transmission on the position of target. Time-synchronization for two crossed beams was measured by placing a half-transparent film on the target position and a TPF apparatus. The measurement is simple and perceivable.

The error in the measurement of the time-synchronization by two-photon fluorescence is presented. The error is about 4 ps for two opposite beams and 5 ps for two crossed beams. The total error of the time-synchronization for six beams is about 10 ps.

(上接第 192 页)

参 考 文 献

- [1] M. Born, E. Wolf; *«Principles of Optics»* 2nd ed., (London, Pergamon, 1964).
- [2] J. F. Nye; *«Physical Properties of Crystals»*, (Oxford, The Clarendon Press, 1957).
- [3] Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская; *«Основы Кристалло физики»* (Москва, «Наука» Главная Редакция Физико-Математической Литературы, 1979).
- [4] Н. Н. Бухгольц; *«Основной Курс Теоретической Механики»*, Изд. 4-е (Государственное Издательство Технично-Теоретической Литературы, Советский Союз, 1939).

(下转第 104 页)

A method of damped harmonic oscillator in quantum laser theory

ZHANG LAISHUN AND CHU SHIYAO

(*Department of Physics, Shanxi University, Taiyuan*)

(Received 20 February 1981)

Abstract

A model of laser oscillation is suggested and in the light of the quantization procedure of Dekker's dissipative systems, the laser equations of motion are derived through both density operator and Langevin methods respectively. They have been compared with Lamb's results of the reservoir theory. It can be seen that Lamb's results are the zero-order approximation of the results presented in this article.

(上接第 187 页)

On Langdsberg's (Ландсберг) dielectric constant ellipsoid

GONG YISEN

(*Nanjing Institute of Communication*)

(Received 6 July 1981)

Abstract

Academician of the Soviet Union Langdsberg (Ландсберг) introduced a dielectric constant ellipsoid in this book "Optics". He considered that the total values of the dielectric constants in crystals can be represented by a dielectric constant ellipsoid. The three semi-axes of this ellipsoid are respectively of lengths ε_1 , ε_2 , ε_3 , i. e. the principle components of the dielectric constant tensor, and the length of any radius vector of this ellipsoid is equal to the dielectric constant in that direction. In other words, Langdsberg's dielectric constant ellipsoid corresponds to the dielectric constant tensor.

It is pointed out in this paper that the dielectric constant tensor corresponds to Fresnel's ellipsoid rather than Langdsberg's dielectric constant ellipsoid. This correspondence relation is unique. Dielectric constant tensor is a symmetrical second rank tensor, its six independent components are just equal to the six coefficients of Fresnel's ellipsoid equation respectively. Mathematical derivation indicates that the length of any radius vector of Langdsberg's ellipsoid is not equal to the dielectric constant in that direction. Conversely, the surface whose length of radius vector in a given direction is equal to the dielectric constant in that direction, is an ovaloid of six degrees.

Besides, in this paper, confusing terms, such as dielectric constant ellipsoid, dielectric ellipsoid Fresnel's ellipsoid and index ellipsoid, and their respective corresponding tensors are clearly defined.