

# 光线在具有抛物线型折射率分布的玻璃板内的传播特性

程 科 华

(西安光学精密机械研究所)

## 提 要

本文讨论了光线在厚度方向具有抛物形折射率分布的玻璃板内的传播。分别对中心折射率比两大面折射率高和中心折射率比两大面折射率低的情况进行了讨论,前者称为正向折射率分布的玻璃板,后者称为负向折射率分布的玻璃板,还讨论了光线在两块互相垂直放置的具有正向抛物形折射率分布的玻璃板内的传播。

我们利用含铊铅硅酸盐玻璃中的铊离子与熔盐中的钾离子交换获得具有正向抛物形折射率分布的玻璃板,并用双光束干涉仪观测了两块互相垂直放置的玻璃板的干涉环。

讨论表明,两块互相垂直放置的正向抛物形折射率分布的玻璃板具有成像作用,而负向抛物形折射率分布的玻璃板具有发散光的作用。文中还考虑了它们的应用。

Pearson 等人<sup>[1]</sup>使用铊铅硅酸盐玻璃中的铊离子和熔盐中的钠离子交换首先获得折射率近似地比例于离光轴的距离的平方的减少而逐渐地减少的玻璃棒,随后, Kita 等<sup>[2]</sup>人使用铊铅硅酸盐玻璃中的铊离子和熔盐中的钾离子交换获得具有这种折射率分布的玻璃棒。S. E. Miller<sup>[3]</sup>对圆柱状折射率分布玻璃棒内光线的传播进行了研究。我们使用铊铅硅酸盐玻璃和钾离子的交换获得具有抛物形折射率分布的玻璃板。本文将讨论光线在具有抛物形折射率分布的玻璃板内的传播,其目的是利用其传播特性,考虑它的应用。

## 一、光线方程

研究具有变折射率分布的介质内光线的传播问题是求解光线方程的问题。光线的矢量微分方程的形式为<sup>[4]</sup>

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{R}}{ds} \right) = \nabla n, \quad (1)$$

式中,  $n=n(x, y, z)$ ;  $ds$  是光线上一段无限小的弧长;  $\mathbf{R}$  是光线上任一点的位置矢量, 如图 1 所示。

但是, 在多数情况下, 方程(1)是不易求解的, 若只研究光线与  $z$  轴夹角较小的形况, 可令  $ds \approx dz$ , 则光线方程变为

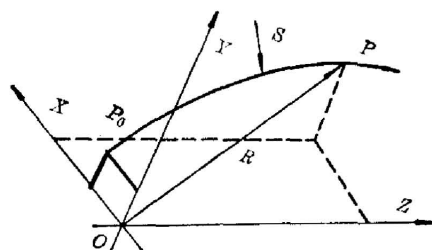


图 1 光线说明

Fig. 1 Specification of a ray

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{d\mathbf{R}}{dz} \right) = \nabla n, \quad (2)$$

上式就是所谓的近轴方程。

其空间直角坐标系中的光线方程则为

$$\frac{d}{dz} \left[ n \left( \frac{dx}{dz} \mathbf{i} + \frac{dy}{dz} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \right] = \frac{\partial n}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial n}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial n}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (3)$$

本文根据近轴方程仅求解光线在子午面内的传播。

## 二、求解光线在具有正向抛物形折射率分布的玻璃板内的传播

所谓正向抛物形折射率分布的玻璃板,是指折射率在玻璃板的厚度方向近似地比例于离两大面距离的平方减少而逐渐地减少。如图2所示,即 $n$ 与 $y$ 轴和 $z$ 轴变化无关,而与 $x$ 轴的变化具有如下关系:

$$n = n_0 \left( 1 - \frac{1}{2} Ax^2 \right). \quad (4)$$

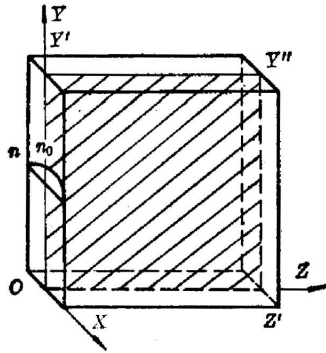


图2 具有正向抛物线型折射率分布的玻璃板

Fig. 2 A glass plate with positively directional parabolic distribution of refractive index

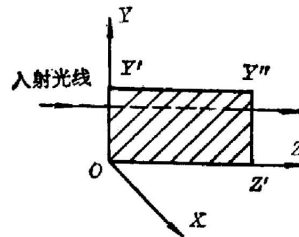


图3 光线垂直于 $Oy$ 轴入射在 $Oy'y''z'$ 平面内的传播

Fig. 3 Propagation of an incident ray perpendicular to  $Oy$  axis in the plane  $Oy'y''z'$

现在我们讨论光线在各种情况入射时的传播。

首先讨论光线垂直于 $Oy$ 轴入射在平面 $Oy'y''z'$ 内的传播,如图3所示。根据方程(3),由于 $n = n_0 = \text{常数}$ ,则有 $d^2y/dz^2 = 0$ ,

$$y = c_1 z + c_2. \quad (5)$$

由上式可知,这时光线是直线传播。

当光线平行于 $Oz$ 轴入射在平面 $x_1x_2x_3x_4$ 内传播时,根据方程(3),则有 $d^2x/dz^2 = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x}$ ,根据(4)式以及考虑到 $Ax^2/2 \ll 1$ ,  $n \approx n_0$ ,故

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -Ax,$$

其解为

$$x = c_1 \cos(\sqrt{A} z) + c_2 \sin(\sqrt{A} z), \tag{6}$$

边界条件为

$$z=0, x=x_1; \quad z \rightarrow 0, \frac{dx}{dz} = 0,$$

$$\therefore x = x_1 \cos(\sqrt{A} z). \tag{7}$$

上式表明,这时光线以余弦曲线传播,如图 4 所示。

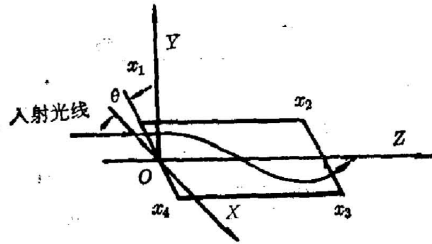


图 4 光线平行于  $Oz$  轴入射在  $x_1x_2x_3x_4$  平面内的传播

Fig. 4 Propagation of an incident ray parallel to  $Oz$  axis in the plane  $x_1x_2x_3x_4$

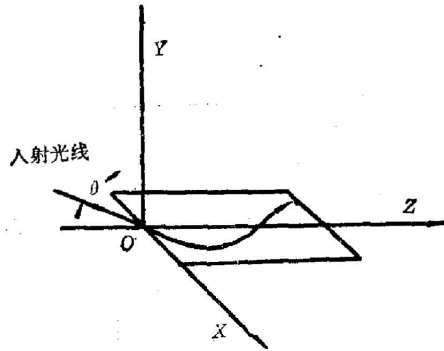


图 5 光线通过  $O$  点入射时的传播

Fig. 5 Propagation of an incident ray through point  $O$

当光线通过  $O$  点入射时,光线方程的解和方程(6)一样,仅边界条件不同,这时的边界条件为  $z=0, x=0; z \rightarrow 0, dx/dz = p$ ,

$$\therefore x = \frac{p}{\sqrt{A}} \sin(\sqrt{A} z). \tag{8}$$

上式表明,光线是以正弦曲线传播,如图 5 所示。

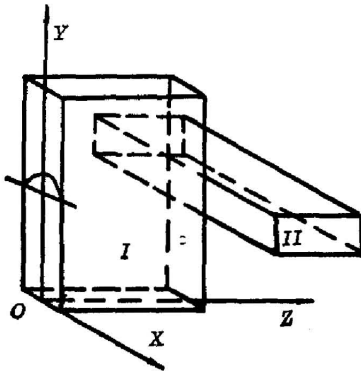


图 6 两块互相垂直放置的具有正向抛物线型折射率分布的玻璃板  
Fig. 6 Two perpendicularly intersected glass plates with positively directional parabolic distribution of refractive index

最后,讨论光线通过两块厚度相同互相垂直放置的具有正向抛物形折射率分布的玻璃板内的传播,如图 6 所示。其中板 1\* 竖直放置,板 2\* 横向放置,板 1\* 和板 2\* 紧密接触互相垂直。

在图 7(a) 所示的情况下,光线垂直于  $Oy$  轴入射在  $yOz$  平面内传播时,根据上面的分析,光线在板 1\* 是直线传播,在板 2\* 内,折射率是在  $Oy$  方向变化,即

$$n = n_0 \left( 1 - \frac{1}{2} A y^2 \right). \tag{9}$$

光线方程的解为

$$y = c_1 \cos(\sqrt{A} z) + c_2 \sin(\sqrt{A} z), \tag{10}$$

边界条件为  $z=0, y=y_1; z \rightarrow 0, dy/dz = 0$ ,

$$\therefore y = y_1 \cos(\sqrt{A} z). \tag{11}$$

所以,光线在板 2\* 内是余弦曲线传播。

在图 7(b) 所示的情况下,当光线平行于  $Oz$  轴入射在平面  $xOz$  内传播时,光线在板 1\* 内

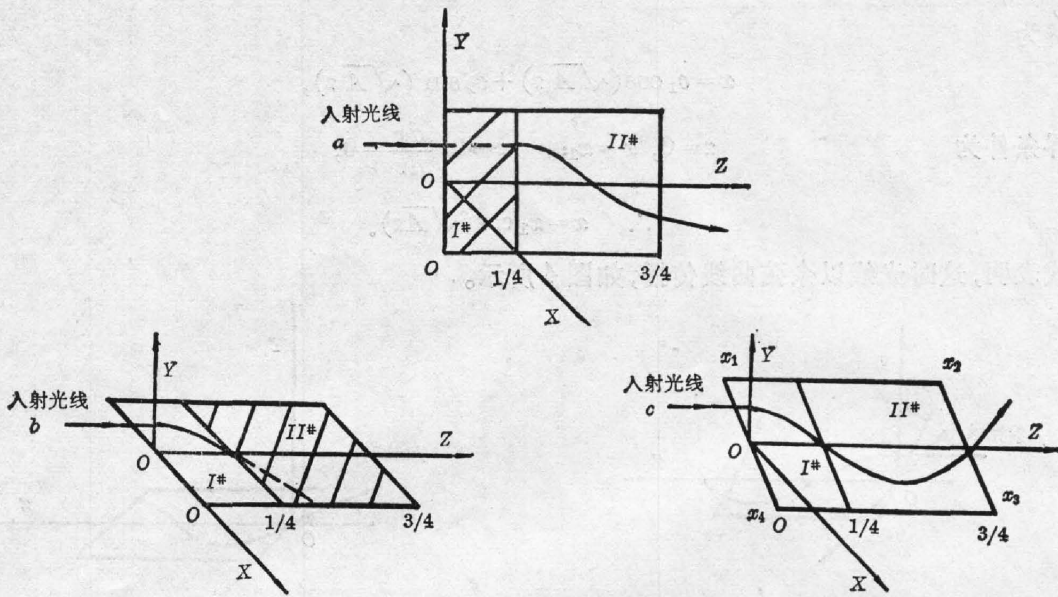


图 7 在两块互相垂直放置的玻璃板内各种入射光线的传播

Fig. 7 Propagation of different incident rays in two perpendicularly intersected glass plates

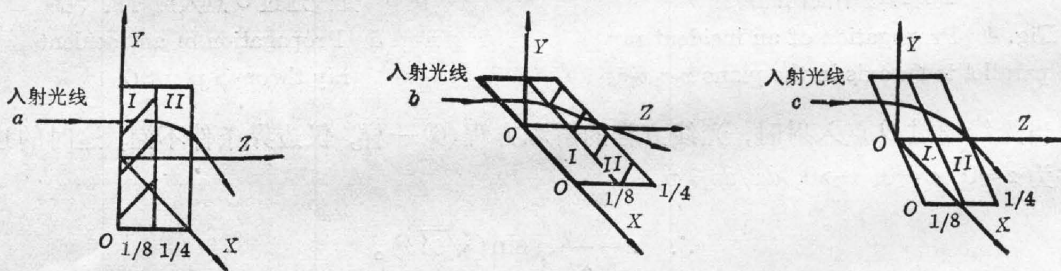


图 8 板 1\* 和板 2\* 厚度均为 1/8 周期时各种入射光线的传播

Fig. 8 Propagation of different incident rays in two perpendicularly intersected glass plates when both of their thickness are 1/8 period

是以余弦曲线传播，而在板 2\* 内则是直线传播。

在图 7(c) 所示的情况下，当光线平行于 Oz 轴入射在平面  $x_1x_2x_3x_4$  内传播时，光线是在以板 1\* 和板 2\* 组成的平面内以余弦曲线传播。

显然，由于选取板 1\* 和板 2\* 的厚度不同，其光线出射情况也不同。当我们选取板 1\* 和板 2\* 的厚度是光线传播周期的  $\frac{1}{8}$  时，这时的出射光线在同一方向与 Oz 轴相交，如图 8(a)、(b)和(c)所示。即具有聚焦特性，其干涉图应是同心圆。实验获得的两块互相垂直放置的正向抛物形折射率分布的玻璃板的干涉环照片如图 9 所示。

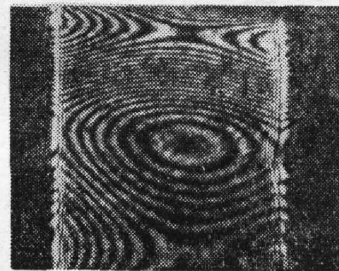


图 9 用双光束干涉仪获得的两块互相垂直放置的正向抛物形折射率分布的玻璃板的干涉环  
Fig. 9 An interference ring photograph of two perpendicularly intersected glass plates with positively directional parabolic distribution of refractive index obtained by double ray interferometer

### 三、求解光线在负向折射率分布的玻璃板内的传播

所谓负向折射率分布的玻璃板,是指折射率在厚度方向近似地比例于离两大面距离的平方减少而增加。其折射率变化如下式所示。

$$n = n_0 \left( 1 + \frac{1}{2} Ax^2 \right). \quad (12)$$

现在讨论光线在各种情况下入射时的传播。当光线垂直于  $Oy$  轴入射在平面  $yOz$  内传播时,根据方程(3),由于  $n = n_0 = \text{常数}$ ,则有  $d^2y/dz^2 = 0$ ,

$$\therefore y = c_1 z + c_2. \quad (13)$$

这时,光线仍是直线传播,这和同样情况的光线在正向折射率分布的玻璃板内的传播一样。

当光线平行于  $Oz$  轴入射在平面  $x_1x_2x_3x_4$  内传播时,根据方程(3)和(12)可得  $d^2x/dz^2 = Ax$ ,其解为

$$x = c_1 e^{\sqrt{A}z} + c_2 e^{-\sqrt{A}z}, \quad (14)$$

边界条件为  $z=0, x=x_1; z \rightarrow 0, dx/dz=0$ ,

$$\therefore x = \frac{x_1}{2} (e^{\sqrt{A}z} + e^{-\sqrt{A}z}). \quad (15)$$

上式表明,光线是以双函数曲线传播,即  $x$  随着  $z$  值的增加而迅速地增加,使光线很快发散到玻璃板的边缘,如图 10 所示。

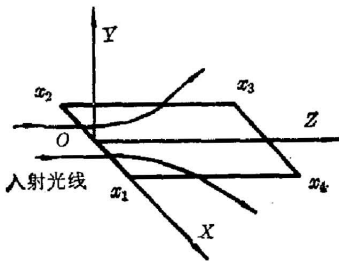


图 10 光线平行于  $Oz$  轴入射在  $x_1x_2x_3x_4$  平面内的传播

Fig. 10 Propagation of an incident ray parallel to  $Oz$  axis in the plane  $x_1x_2x_3x_4$

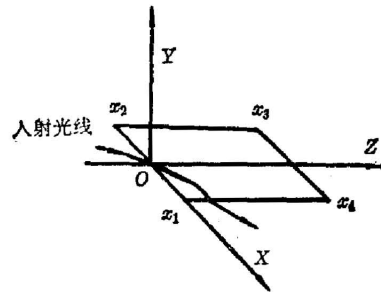


图 11 光线通过  $O$  点入射在  $x_1x_2x_3x_4$  平面内的传播

Fig. 11 Propagation of an incident ray in the plane  $x_1x_2x_3x_4$  through point  $O$

当光线通过  $O$  点入射时,方程的解和(14)一样,但边界条件不同,此时的边界条件为:  $z=0, x=0; z \rightarrow 0, dx/dz=p$ ,

$$\therefore x = \frac{p}{2\sqrt{A}} (e^{\sqrt{A}z} + e^{-\sqrt{A}z}). \quad (16)$$

上式表明,这时光线仍是以双函数曲线传播,随着  $z$  值增加光线很快发散到两大面,如图 11 所示。

光线发散到边缘时对应的玻璃板的长度也是容易计算的。如果玻璃板的厚度为  $L$ ,则  $x = L/2$  时,代入方程(15)和(16)就可求出发散到边缘时的  $z$  值。

#### 四、结 束 语

通过讨论,两块互相垂直放置的正向抛物形折射率分布的玻璃板具有成像作用,而具有负向抛物形折射率分布的玻璃板具有发散光的作用,利用光线的可逆性,可考虑制作平面玻璃板聚光镜。

最后,在离子交换实验和拍照干涉环的工作中得到刘功成、许晓援和董新意同志的帮助,在此表示感谢。

#### 参 考 文 献

- [1] A. D. Pearson, *et al.*; *A. P. L.*, 1962, **15**, No. 2 (15 Jul), 76.
- [2] H. Kita; *J. Amer. Ceram. Soc.*, 1971, **54**, No. 7 (Jul), 321.
- [3] S. E. Miller; *Bell Syst. Tech. J.*, 1965, **44**, No. 9 (Nov), 2017.
- [4] M. Born, E. Wolf; *«Principles of Optics»*, (Pergamon, New York, 1959).

### Propagation characteristics of light rays in glass plates with parabolic distribution of refractive index

CHENG KEHUA

(Xian Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 20 May 1981)

#### Abstract

In this article, propagation characteristics of light rays in glass plates with parabolic distributions of refractive index on the thickness are discussed. The central refractive index higher than that of the two big surfaces and the central refractive index lower than that of the two big surfaces are discussed respectively. The former is called glass plates with positively directional distribution of refractive index and the latter is called glass plates with negatively directional distribution of refractive index, and also, propagation of light rays in two perpendicularly intersected glass plates with positively directional parabolic distribution of refractive index is discussed.

Glass plates with positively directional parabolic distribution of refractive index are obtained by using  $Tl^+$  ions from the thallium lead silicate glasses is exchanged by  $K^+$  ions from the melt. And also, the interference ring is observed by double light ray interferometer.

It is obtained from the above discussion that two perpendicularly intersected glass plates with positively directional distribution of refractive index are provided with an imaging property, and a glass plate with negatively directional parabolic distribution of refractive index is provided with a divergent property. In this article, their applications are considered.