

量子激光理论的阻尼谐振子方法

张来顺 朱诗尧
(山西大学物理系)

提 要

本文提出一个激光振荡的模型,并根据 Dekker 的耗散系统的量子化程序分别用密度算子方法和 Langevin 方法导出激光运动方程式。与 Lamb 的库理论结果进行了比较,可以看到 Lamb 的结果是本文结果的零级近似。

一、引 言

自从六十年代以来,人们利用库理论 (reservoir theory) 处理激光振荡^[1~3],在解释激光的固有线宽,光子统计以及真空瞬变积累 (transient buildup from vacuum) 等现象方面取得了令人满意的结果。建立在库理论基础上的激光振荡的模型如图 1 所示。库对自由谐振子的辐射场产生阻尼作用,而与激活原子发生耦合的仅仅是自由谐振子的辐射场。

但是,我们知道从 Maxwell 方程出发,在单模无源的情况下,损耗腔中的辐射场满足以下方程:

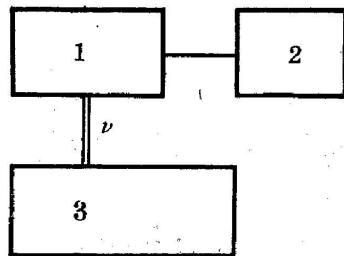


图 1 库理论的激光振荡模型

1—自由场(Ω, a_0, a_0^+); 2—库($\lambda=\Omega/Q$);
3—激活原子

Fig. 1 Model of laser oscillation in reservoir theory

1—Free field (Ω, a_0, a_0^+); 2—Reservoir ($\lambda=\Omega/Q$); 3—Active atom

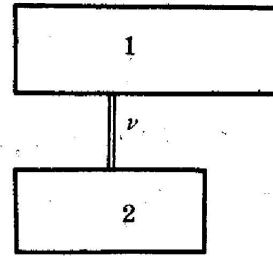


图 2 阻尼谐振子激光振荡模型

1—衰减场(Ω, λ, a, a^+);
2—激活原子

Fig. 2 Model of laser oscillation in damped harmonic oscillator

1—Damping field (Ω, λ, a, a^+);
2—Active atom

$$\ddot{E} + \lambda \dot{E} + \Omega^2 E = 0, \quad (1)$$

其中,衰减系数 $\lambda = \Omega/Q$, Q 是腔的品质因子, Ω 是模频率。这是一个阻尼谐振子的运动方程。由此,使我们很自然地提出如图 2 所示的激光振荡模型。与激活原子发生耦合的是阻

尼谐振子的衰减辐射场,而不是自由谐振子的辐射场。显然,这个模型在场与激活原子的耦合中已经将场的阻尼对激光场的影响包括在内了。这是前一种激光振荡模型没有考虑到的。

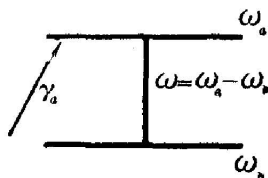
利用图 2 所示的模型处理激光振荡,首要的问题是经典阻尼谐振子的量子化。

长期以来,人们提出了若干阻尼谐振子量子化的方案。Kanai、Dodonov、彭桓武等人给出阻尼谐振子量子化的哈密顿量^[4,6,7],实际上都是显含时间的。这些量子化方案直接用来处理激光振荡,特别是处理稳态情况的激光振荡似乎有困难。Kostin 利用传统的正则量子化程序^[5],Kunio Yasue 利用波场的随机量子化程序^[12],对受迫阻尼谐振子进行量子化都得到一个非线性的 Schrödinger-Langevin 方程式。后者并用来研究损耗腔中的激光场,但没有与库理论的结果作比较。Dekker 将经典哈密顿量推广到复变量的情况,仍使用传统的正则量子化程序,得到一个非厄米的量子哈密顿,其虚部是与耗散有关的^[8~11],并进一步将经典的 Liouville 方程量子化得到量子的密度算子方程。本文根据 Dekker 的耗散系统量子化的程序,进一步用来处理激光振荡。我们按照图 2 所示的激光模型,分别用密度算子方法和 Langevin 方法导出激光运动方程式,并与 Lamb 等人的库理论结果作了比较。在稳态情况下,固有线宽增大,光子统计弥散加剧,特别在 Maser、低 Q 值或高阶模情况,差异愈加明显。可以看到 Lamb 等人的结果是本文结果的零级近似。

二、理论推导

1. 密度算子方法

为了简单起见,激活原子采用二能级系统,只考虑对上能级有泵浦,如图 3 所示。这样,场和原子系统的总哈密顿为



$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{场}} + \mathcal{H}_{\text{原子}} + \nu, \quad (2)$$

式中, $\mathcal{H}_{\text{场}}$ 是衰减辐射场的哈密顿。根据 Dekker 的理论,通过对经典阻尼谐振子的量子化得到^[8]

$$\mathcal{H}_{\text{场}} = H_{\text{场}} + i\Gamma = \hbar \left(\omega - i \frac{\lambda}{2} \right) a^+ a, \quad (3)$$

图 3 二能级激活原子

Fig. 3 two-level active atom

(3) 式中, λ 是阻尼谐振子的衰减系数, ω 是阻尼谐振子的约化频率, $\omega = \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2/4}$, a^+ 和 a 是阻尼谐振子的升、降算子。 $\mathcal{H}_{\text{场}}$ 是一个复变量。激活原子的哈密顿

$$\mathcal{H}_{\text{原子}} = \hbar(\omega_0 \sigma_+ \sigma_- + \omega_0 \sigma_- \sigma_+), \quad (4)$$

式中 $\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 是二能级系统的升、降算子。 ν 是场与激活原子的相互作用能,在旋转波近似下

$$\nu = \hbar(g a \sigma_+ + g^* a^+ \sigma_-), \quad (5)$$

式中, g 是衰减辐射场与激活原子的耦合系数,是一个复量。当系统的哈密顿为复变量时,系统的密度算子满足四维复相空间的量子化 Liouville 方程

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{a-f}(t) = & -\frac{i}{\hbar} [a^+, [a, \mathcal{H}] \rho_{a-f}] + \frac{i}{\hbar} [\rho_{a-f} [\mathcal{H}^+, a^+], a] \\ & - \frac{i}{\hbar} [\sigma_+, [\sigma_-, \mathcal{H}] \rho_{a-f}] + \frac{i}{\hbar} [\rho_{a-f} [\mathcal{H}^+, \sigma_+], \sigma_-]。 \end{aligned} \quad (6)$$

将(2)、(3)式代入(6)式,并注意到在涉及相互作用能 ν 的计算中,关于原子的算子 σ_- 和 σ_+ 的对易关系必须使用收缩的形式^[14],从而得到

$$\dot{\rho}_{a-f}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_{a-f}] - \frac{\lambda}{2} (a^+ a \rho_{a-f} + \rho_{a-f} a^+ a - 2a \rho_{a-f} a^+), \quad (7)$$

其中

$$H = H_{\text{总}} + \mathcal{H}_{\text{原子}} + \nu = H_0 + \nu \quad (8)$$

是场加原子系统的哈密顿 \mathcal{H} 的实部。可以证明,在相互作用表象下,(7)式变为(见附录 I)

$$\dot{\rho}_{a-f}^I(t) = -\frac{i}{\hbar} [\nu^I, \rho_{a-f}^I] - \frac{\lambda}{2} (a^+ a \rho_{a-f}^I + \rho_{a-f}^I a^+ a - 2a \rho_{a-f}^I a^+), \quad (9)$$

式中诸量右上角标 I 表示相互作用表象。作形式积分解,并对原子变数求迹,得到

$$\begin{aligned} \rho_f^I(t) = & \rho_f^I(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \text{Tr}_A [\nu^I(t'), \rho_{a-f}^I(t')] \\ & - \frac{\lambda}{2} \int_{t_0}^t dt' [a^+ a \rho_f^I(t') + \rho_f^I(t') a^+ a - 2a \rho_f^I(t') a^+], \end{aligned} \quad (10)$$

式中,第一个积分是激活原子对场的贡献,第二个积分是场由于阻尼作用而引起的衰减。在绝热近似的假设下,由于激活原子的平均寿命 τ_a 比场发生明显衰减所经历的时间间隔 $\tau_f = 1/\lambda$ 小得多,即 $\tau_a \ll 1/\lambda$, 所以(10)式中的两个积分可以分别进行。对第二个积分可以作粗粒时间变化率(coarse-grained time rate of change)的计算^[3],

$$(\Delta \rho_f^I)_{\text{总}} = -\frac{\lambda}{2} \Delta t (a^+ a \rho_f^I + \rho_f^I a^+ a - 2a \rho_f^I a^+). \quad (11)$$

对于第一个积分,要在 $t-t_0 \sim \tau_a$ 的时间间隔内进行积分。假设对激活原子的上能级的泵浦速率为 r_a , 利用微扰法,求得四级近似^[13], 则得到

$$\begin{aligned} (\Delta \rho_f^I)_{\text{原子}} = & r_a \Delta t (\delta \rho_f^I)_{\text{原子}} = r_a \Delta t [\rho_f^I(t) - \rho_f^I(t_0)] \\ = & \Delta t \left[-\frac{A}{2} (a a^+ \rho_f^I + \rho_f^I a a^+ - 2a^+ \rho_f^I a) + \frac{B}{8} (a a^+ a a^+ \rho_f^I \right. \\ & \left. + 6a a^+ \rho_f^I a a^+ + \rho_f^I a a^+ a a^+ - 4a^+ \rho_f^I a a^+ a - 4a^+ a a^+ \rho_f^I a) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $A = r_a |g|^2 \tau_a^2$, $B = \frac{8}{4!} r_a |g|^4 \tau_a^4$ 。因此我们得到激光场的约化密度算子的运动方程(略去角标 I, f)

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & \left(\frac{\Delta \rho_f^I}{\Delta t} \right)_{\text{总}} + \left(\frac{\Delta \rho_f^I}{\Delta t} \right)_{\text{原子}} \\ = & -\frac{A}{2} (a a^+ \rho + \rho a a^+ - 2a^+ \rho a) + \frac{B}{8} (a a^+ a a^+ \rho + 6a a^+ \rho a a^+ \\ & + \rho a a^+ a a^+ - 4a^+ \rho a a^+ a - 4a^+ a a^+ \rho a) - \frac{\lambda}{2} (a^+ a \rho + \rho a^+ a - 2a \rho a^+). \end{aligned} \quad (13)$$

利用 $a = (2\hbar\omega)^{-1/2} \left[p + \left(\frac{\lambda}{2} - i\omega \right) x \right]$, 得到阻尼谐振子的升、降算子 a^+, a 与自由谐振子的升、降算子 a_0^+, a_0 的关系

$$a = -ia_0 + \frac{\lambda}{4\omega}(a_0 + a_0^+), \quad (14)$$

$$a^+ = ia_0^+ + \frac{\lambda}{4\omega}(a_0 + a_0^+). \quad (15)$$

将(14)、(15)式代入(13)式,通过适当运算,略去双光子项和 $(\lambda/4\omega)^2$ 、 $B(\lambda/4\omega)^2$ 项,整理后得到

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & -\frac{A}{2}\left(1 + \frac{\lambda^2}{16\omega^2}\right)(a_0 a_0^+ \rho + \rho a_0 a_0^+ - 2a_0^+ \rho a_0) + \frac{B}{8}(a_0 a_0^+ a_0 a_0^+ \rho \\ & + 6a_0 a_0^+ \rho a_0 a_0^+ + \rho a_0 a_0^+ a_0 a_0^+ - 4a_0^+ \rho a_0 a_0^+ a_0 - 4a_0^+ a_0 a_0^+ \rho a_0) \\ & - \frac{\lambda}{2}\left(1 + \frac{A\lambda}{16\omega^2}\right)(a_0^+ a_0 \rho + \rho a_0^+ a_0 - 2a_0 \rho a_0^+). \end{aligned} \quad (16)$$

这就是激光场的密度算子的运动方程式。

对(16)式取 Fock 表象,则对角矩阵元满足以下 Pauli 主方程

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{nn}(t) = & -\left[A\left(1 + \frac{\lambda^2}{16\omega^2}\right) - (n+1)B\right](n+1)\rho_{nn} \\ & + \left[A\left(1 + \frac{\lambda^2}{16\omega^2}\right) - nB\right]n\rho_{n-1,n-1} - \lambda\left(1 + \frac{A\lambda}{16\omega^2}\right)n\rho_{nn} \\ & + \lambda\left(1 + \frac{A\lambda}{16\omega^2}\right)(n+1)\rho_{n+1,n+1}. \end{aligned} \quad (17)$$

对(16)式取相干态表象,得到 P-表象的 Fokker-Planok 方程(见附录 II)

$$\dot{P}(\alpha, t) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}[(A - \lambda - B|\alpha|^2)\alpha P] + \text{c.c.}\right\} + A\left(1 + \frac{\lambda^2}{16\omega^2}\right)\frac{\partial^2 P}{\partial\alpha\partial\alpha^*}. \quad (18)$$

2. Langevin 方法

为了便于与 Lamb 等人的结果进行比较,激活原子采用三能级系统,如图 4 所示。这等价于一个受简谐振子库影响的二能级系统的激活原子(参阅文献[3], 328 页),其哈密顿

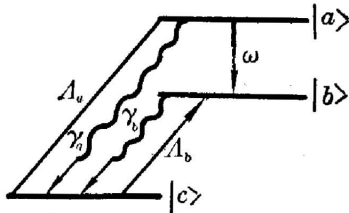


图 4 三能级激活原子

Fig. 4 Three-level active atom

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{原}} = & \hbar N(\omega_a \sigma_+ \sigma_- + \omega_b \sigma_- \sigma_+) \\ & + \hbar \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \hbar \sum_k g_k (b_k \sigma_+ + b_k^\dagger \sigma_-). \end{aligned} \quad (19)$$

当我们取 Heisenberg 表象时,衰减场的哈密顿由下式给出^[9]

$$\mathcal{H}_{\text{衰}} = H_{\text{衰}} + i\Gamma = \hbar\omega a^+ a - i\frac{\hbar}{2}\lambda. \quad (20)$$

场与激活原子的相互作用能

$$V = \hbar N(g a \sigma_+ + g^* a^+ \sigma_-). \quad (21)$$

将(19)、(20)和(21)式代入(2)式,在 Heisenberg 表象下,可分别求出场算子和激活原子的算子所满足的 Langevin 方程。在绝热近似条件下,将它们联立求解,便得到缓变算子(slowly varying operators) $A(t) = a(t)e^{i\nu t}$ 所满足的 Langevin 方程式(推导与 Lamb 等人的方法类似,参阅文献[3], 331 页)。

$$\dot{A}(t) = -\left[\frac{\lambda}{2} + i(\omega - \nu)\right]A(t) + \mathcal{A}_c A(t) + \mathcal{B}_c A(t)\langle A^+ A \rangle + G(t), \quad (22)$$

其中 \mathcal{A}_c 是复线性增益系数, \mathcal{B} 是复自饱和系数, $G(t)$ 是噪声算子。利用(14)和(15)式,将

$A(t)$ 变为相应的自由辐射场的缓变算子 $A_0(t)$, 略去高频项 $e^{\pm i2\nu t}$ 与 $B\left(\frac{\lambda}{4\omega}\right)^2$ 项, 便得到激光场的 Langevin 方程式

$$\begin{aligned} \dot{A}_0(t) = & -\left[\frac{\lambda}{2} + i(\omega - \nu)\right]A_0(t) + \mathcal{A}_0 A_0(t) - \mathcal{B}_0 A_0(t) \langle A_0^\dagger A_0 \rangle \\ & + i\left(1 - i\frac{\lambda}{4\omega}\right)G(t). \end{aligned} \quad (23)$$

三、讨 论

1. 激光的固有线宽

激光的固有线宽与扩散系数成比例。由 (18) 式可知, 线宽 $2D \propto A\left(1 + \frac{\lambda^2}{16\omega^2}\right)$, 与 Lamb 等人的结果 $2D \propto A$ 比较, 增加了一个比例因子 $\left(1 + \frac{\lambda^2}{16\omega^2}\right)$ 。从 (23) 式得到 $2D \propto \left\langle \left[i\left(1 - i\frac{\lambda}{4\omega}\right)G^+(t) \right] \left[i\left(1 - i\frac{\lambda}{4\omega}\right)G(t') \right] \right\rangle = \left(1 + \frac{\lambda^2}{16\omega^2}\right) \cdot \langle G(t)^+ G(t') \rangle$, 而 Lamb 等人的结果是 $2D \propto \langle G^+(t) G(t') \rangle$, 也是增加了一个比例因子 $\left(1 + \frac{\lambda^2}{16\omega^2}\right)$ 。两种方法得到一致的结果。

2. 光子统计

在稳态情况下, 考虑到细致平衡的条件, 由 (17) 式可得到递推关系与光子统计分布

$$\rho_{n+1, n+1} = \frac{A(1 + \lambda^2/16\omega^2) - (n+1)B}{\lambda(1 + A\lambda/16\omega^2)} \rho_{n, n}, \quad (24)$$

$$\rho_{n, n} = \rho_{0, 0} \prod_{k=1}^n \frac{A(1 + \lambda^2/16\omega^2) - BK}{\lambda(1 + A\lambda/16\omega^2)}, \quad (25)$$

其中归一化常数

$$\rho_{0, 0} = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{A(1 + \lambda^2/16\omega^2) - BK}{\lambda(1 + A\lambda/16\omega^2)} \right]^{-1}. \quad (26)$$

稳态时的平均光子数

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \frac{A(1 + \lambda^2/16\omega^2) - \lambda(1 + A\lambda/16\omega^2)}{B} \\ &= \frac{A - \lambda}{B}. \end{aligned} \quad (27)$$

与 Lamb 等人的结果比较, 稳态时的平均光子数 $\langle n \rangle$ 是相同的, 并且都位于光子统计分布的峰值处。但光子统计分布的曲线有所不同。在峰值附近, 我们的 $\rho_{n, n}$ 值比 Lamb 的要低, 在曲线的两端, 我们的 $\rho_{n, n}$ 值比 Lamb 的要高, 如图 5 所示。

3. $(1 + \lambda^2/16\omega^2)$ 因子

从 (17)、(18) 和 (23) 式可以看出, 我们的结果与 Lamb 等人的结果的差异在于线性增益系数 A 、衰减系数 λ 和扩散系数都增加了一个同数量级的因子 $(1 + \lambda^2/16\omega^2)$ 。出现这个因子是因为在我们的阻尼谐振子的激

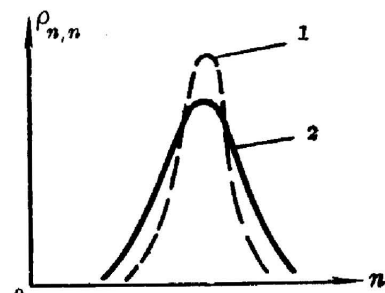


图 5

1—Lamb 的光子统计分布;
2—阻尼谐振子模型的光子统计分布

Fig. 5

1—Lamb's photon statistical distribution;
2—Photon statistical distribution in the model of damped harmonic oscillator

光振荡模型中, 考虑了阻尼谐振子的衰减辐射场与激活原子的相互作用。这就相当于在库理论中, 不仅考虑了自由辐射场与激活原子的相互作用, 同时也计及了场的库与激活原子的相互作用对激光场的影响。对于 Maser 或低 Q 值或高阶模情况, 衰减系数 λ 可以很大, 频率 ω 可以很低, $\lambda^2/16\omega^2$ 项的地位将会显著表现出来, 不能忽略。对于光频范围, $\lambda^2/16\omega^2$ 项取的值很小, 所引起的影响也很小。当忽略 $\lambda^2/16\omega^2$ 项时, 即对(14)、(15)二式取零级近似时, 则得到与 Lamb 等人的库理论完全相同的结果。这正说明利用 Dekker 的阻尼谐振子量子化程序来处理量子耗散问题是可行的。

我们知道, 用以处理激光振荡的方法往往可以用来处理非平衡态量子统计力学的若干问题, 这些问题也包含了开式系统, 并且也受到非线性相干和不相干因素的影响。因此, 我们期望这种方法在物理学的其它方面如超导、相变、Josephson 辐射等课题上能得到应用。

承蒙司徒达和苏大春副教授审阅了全文, 并提出宝贵的指导意见, 在此表示衷心感谢。

附录 I: 关于(9)式的证明

将密度算子 ρ_{a-f} 变换到相互作用表象, 则有

$$\rho_{a-f}^I = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} \rho_{a-f} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \quad (\text{A-1})$$

对(A-1)式两端作时间微商, 并利用(7)、(8)二式得

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{a-f}^I &= \frac{i}{\hbar} [H_0, \rho_{a-f}^I] + e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} \dot{\rho}_{a-f} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \\ &= -\frac{i}{\hbar} [\nu^I, \rho_{a-f}^I] + e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} \left[-\frac{\lambda}{2} (a^+ a \rho_{a-f} + \rho_{a-f} a^+ a \right. \\ &\quad \left. - 2a \rho_{a-f} a^+) \right] e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}, \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

其中

$$\nu^I = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} \nu e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \quad (\text{A-3})$$

利用(14)、(15)二式, 我们有

$$\begin{aligned} [a, a^+] &= \left[-ia_0 + \frac{\lambda}{4\omega} (a_0 + a_0^+), ia_0^+ + \frac{\lambda}{4\omega} (a_0 + a_0^+) \right] \\ &= \left(-i + \frac{\lambda}{4\omega} \right) \left(i + \frac{\lambda}{4\omega} \right) [a_0, a_0^+] + \frac{\lambda^2}{16\omega^2} [a_0^+, a_0] \\ &= (1 + \lambda^2/16\omega^2) [a_0, a_0^+] - \lambda^2/16\omega^2 [a_0, a_0^+] \\ &= [a_0, a_0^+] = 1. \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

使用算子公式

$$e^{\xi A} B e^{-\xi A} = B + \frac{\xi}{1!} [A, B] + \frac{\xi^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots \quad (\text{A-5})$$

和(A-4)式, 令 $\xi = i\omega t$, $A = a^+ a$, $B = a$, 容易证明

$$e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} a e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} = e^{i\omega a^+ a t} a e^{-i\omega a^+ a t} = a e^{-i\omega t}, \quad (\text{A-6})$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} a^+ e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} = a^+ e^{i\omega t}, \quad (\text{A-7})$$

$$\Gamma^I = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} \Gamma e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} = \Gamma = -\frac{\lambda}{2} a^+ a, \quad (\text{A-8})$$

将(A-6)、(A-7)和(A-8)代入(A-2)式, 则得到

$$\dot{\rho}_{a-f}^I(t) = -\frac{i}{\hbar} [\nu^I, \rho_{a-f}^I] - \frac{\lambda}{2} (a^\dagger a \rho_{a-f}^I + \rho_{a-f}^I a^\dagger a - 2a \rho_{a-f}^I a^\dagger). \quad (\text{A-9})$$

(9)式证得。

附录 II: 关于(18)的推导

利用对易关系

$$[a_0, \rho] = \frac{\partial \rho}{\partial a_0^\dagger}, \quad [a_0^\dagger, \rho] = -\frac{\partial \rho}{\partial a_0}, \quad [a_0, a_0^\dagger] = 1, \quad (\text{B-1})$$

我们有

$$\rho a_0 = a_0 \rho - \frac{\partial \rho}{\partial a_0^\dagger}, \quad a_0^\dagger \rho = \rho a_0^\dagger + \frac{\partial \rho}{\partial a_0}, \quad a_0^\dagger a_0 = a_0 a_0^\dagger - 1. \quad (\text{B-2})$$

利用(B-2)式将(16)式变为反序形式(antinormal-ordered form),

$$\begin{aligned} a_0 a_0^\dagger \rho &= a_0 \rho a_0^\dagger - a_0 \frac{\partial \rho}{\partial a_0^\dagger}, & \rho a_0 a_0^\dagger &= a_0 \rho a_0^\dagger - \frac{\partial \rho}{\partial a_0^\dagger} a_0^\dagger, \\ a_0^\dagger \rho a_0 &= a_0 \rho a_0^\dagger - a_0 \frac{\partial \rho}{\partial a_0} - \frac{\partial(\rho a_0^\dagger)}{\partial a_0^\dagger} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial a_0 \partial a_0^\dagger}, \\ a_0^\dagger a_0 \rho &= a_0 \rho a_0^\dagger - \frac{\partial(a_0 \rho)}{\partial a_0}, & \rho a_0^\dagger a_0 &= a_0 \rho a_0^\dagger - \frac{\partial(\rho a_0^\dagger)}{\partial a_0^\dagger}, \\ a_0 a_0^\dagger a_0 a_0^\dagger \rho &= a_0 a_0 \rho a_0^\dagger a_0^\dagger - a_0 \rho a_0^\dagger - 2a_0 a_0 \frac{\partial \rho}{\partial a_0} a_0^\dagger + a_0 a_0 \frac{\partial^2 \rho}{\partial a_0 \partial a_0} + a_0 \frac{\partial \rho}{\partial a_0}, \\ a_0 a_0^\dagger \rho a_0 a_0^\dagger &= a_0 a_0 \rho a_0^\dagger a_0^\dagger - a_0 \rho a_0^\dagger - a_0 a_0 \frac{\partial \rho}{\partial a_0} a_0^\dagger - a_0 \frac{\partial \rho}{\partial a_0^\dagger} a_0^\dagger a_0^\dagger + a_0 \frac{\partial^2 \rho}{\partial a_0^\dagger \partial a_0} a_0^\dagger, \\ a_0^\dagger a_0 a_0^\dagger \rho a_0 &= a_0 a_0 \rho a_0^\dagger a_0^\dagger - 3a_0 \rho a_0^\dagger - 2a_0 a_0 \frac{\partial \rho}{\partial a_0} a_0^\dagger + a_0 a_0 \frac{\partial^2 \rho}{\partial a_0^2} + 3a_0 \frac{\partial \rho}{\partial a_0} \\ &\quad - a_0 \frac{\partial \rho}{\partial a_0^\dagger} a_0^\dagger a_0^\dagger + 2a_0 \frac{\partial^2 \rho}{\partial a_0^\dagger \partial a_0} a_0^\dagger + \frac{\partial(\rho a_0^\dagger)}{\partial a_0^\dagger} - a_0 \frac{\partial^3 \rho}{\partial a_0^\dagger \partial a_0^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial a_0^\dagger \partial a_0}, \\ a_0^\dagger \rho a_0 a_0^\dagger a_0 &= (a_0^\dagger a_0 a_0^\dagger \rho a_0)^\dagger. \end{aligned}$$

将以上诸式代入(16)式, 用几率函数 $P(\alpha, t)$ 代替密度算子 ρ , 用算子 a_0 的本征值 α 代替算子 a_0 , 并且在迁移项中略去比 $B|\alpha|^2$ 小的项(但保留 $B|\alpha|^2$ 项), 在扩散项中略去 $B|\alpha|^2$ 和更小的项, 整理后便得到

$$\dot{P}(\alpha, t) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} [(A - \lambda - B|\alpha|^2)\alpha P] + \text{c. c.} \right\} + A(1 + \lambda^2/16\omega^2) \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha \partial \alpha^*}. \quad (\text{B-3})$$

参 考 文 献

- [1] M. O. Scully, and W. E. Lamb Jr; *Phys. Rev.*, 1967, **159**, No. 1 (Jan), 208.
- [2] M. Sargent III, M. O. Scully *et al.*; *Appl. Opt.* 1970, **9**, No. 11 (Nov), 2423.
- [3] M. Sargent III, M. O. Scully *et al.*; «*Laser Physics*» (Addison-Wesley, 1974).
- [4] R. W. Hase; *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, No. 10 (Oct), 2005.
- [5] M. D. Kostin; *J. Stat. Phys.*, 1975, **12**, 145.
- [6] V. V. Dodonov, V. I. Manko; *Phys. Rev.*, 1979, **A20**, No. 2 (Feb), 550.
- [7] 彭桓武; «*物理学报*», 1980, **29**, No. 8 (Aug) 1089.
- [8] H. Dekker; *Physica*, 1979, **95A**, No. 2 (Feb), 311.
- [9] H. Dekker; *Z. Physik*, 1975, **B21**, 295.
- [10] H. Dekker; *Phys. Rev.*, 1977, **A16**, No. 5 (May), 2126.
- [11] H. Dekker; *Z. Physik*, 1976, **B24**, 211.
- [12] Kunio Yasue; *Intern. J. Theor. Phys.*, 1979, **18**, No. 12 (Dec), 861.
- [13] H. M. Nussenzveig; «*Introduction to Quantum Optics*» (Gorden and Breach, Science Publishers, Inc. 1973)
- [14] F. T. Arechi, E. Courtens *et al.*; *Phys. Rev.*, 1972, **A6**, No. 6 (Dec), 2211.

A method of damped harmonic oscillator in quantum laser theory

ZHANG LAISHUN AND CHU SHIYAO

(*Department of Physics, Shanxi University, Taiyuan*)

(Received 20 February 1981)

Abstract

A model of laser oscillation is suggested and in the light of the quantization procedure of Dekker's dissipative systems, the laser equations of motion are derived through both density operator and Langevin methods respectively. They have been compared with Lamb's results of the reservoir theory. It can be seen that Lamb's results are the zero-order approximation of the results presented in this article.

(上接第 187 页)

On Langdsberg's (Ландсберг) dielectric constant ellipsoid

GONG YISEN

(*Nanjing Institute of Communication*)

(Received 6 July 1981)

Abstract

Academician of the Soviet Union Langdsberg (Ландсберг) introduced a dielectric constant ellipsoid in this book "Optics". He considered that the total values of the dielectric constants in crystals can be represented by a dielectric constant ellipsoid. The three semi-axes of this ellipsoid are respectively of lengths ε_1 , ε_2 , ε_3 , i. e. the principle components of the dielectric constant tensor, and the length of any radius vector of this ellipsoid is equal to the dielectric constant in that direction. In other words, Langdsberg's dielectric constant ellipsoid corresponds to the dielectric constant tensor.

It is pointed out in this paper that the dielectric constant tensor corresponds to Fresnel's ellipsoid rather than Langdsberg's dielectric constant ellipsoid. This correspondence relation is unique. Dielectric constant tensor is a symmetrical second rank tensor, its six independent components are just equal to the six coefficients of Fresnel's ellipsoid equation respectively. Mathematical derivation indicates that the length of any radius vector of Langdsberg's ellipsoid is not equal to the dielectric constant in that direction. Conversely, the surface whose length of radius vector in a given direction is equal to the dielectric constant in that direction, is an ovaloid of six degrees.

Besides, in this paper, confusing terms, such as dielectric constant ellipsoid, dielectric ellipsoid Fresnel's ellipsoid and index ellipsoid, and their respective corresponding tensors are clearly defined.