第2卷 第1期 光学学报 Vol. 2, No. 1
1982年1月 ACTA OPTICA SINICA January 1982

精确测量高斯光斑参数的调制盘方法

许生龙 尹达人
(昆明物理研究所)

提 要

测量红外光斑在物理上和技术上都有很重要的意义。本文介绍一种精确测量高斯光斑参数的调制盘方法，它能快速和精确的测量高斯光斑参数。

假若光斑强度分布是高斯模式，当光斑扫过栅栏形调制盘时，测量频谱的峰值能精确知道高斯光斑的参数。

前 言

众所周知，测量线度范围极小的红外光斑，在物理上和技术上都有重要意义。L. D. Dickson[1] 给出了一种测量高斯光斑参数的方法，他指出用 Ronchi 环方法(本文称之为调制盘)有快速及精确的优点，问题是他所推得的公式，要求调制盘的辐条宽度与被测光斑的参数之间，满足一确定的关系，而这个先决条件，事实上是难于办到的。本文提出测量频谱的一系列峰值，利用统计方法减少测量误差，就能获得比较满意的结果。

1. 红外扫描系统信号波形及其频谱的计算通式。

令目标像函数为 $q(x, y)$，调制盘透过函数为 $r(x, y)$，若调制盘(或者目标)按 $x'(t)$，$y'(t)$ 的规律作平移运动，则目标辐射经调制入射到探测器上的能量为:

$$p(t)=p[x'(t),\ y'(t)]=\iint_{-\infty}^{\infty} q(x,\ y)r[x-x'(t),\ y-y'(t)]dx\,dy。\tag{1}$$

对(1)式两边进行二维傅里叶变换，得到:

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(f_x,\ f_y)=\mathscr{F}p(x',\ y')&=\iint_{-\infty}^{\infty} p(x',\ y')\exp[-2\pi i(f_x x'+f_y y')]dx'dy'\\&=Q(f_x,\ f_y)R^*(f_x,\ f_y),\end{aligned}\tag{2}$$

其中 $Q(f_x,\ f_y)=\iint_{-\infty}^{\infty} q(x,\ y)\exp[-2\pi i(f_x x+f_y y)]dx\,dy$ 为目标象函数的空间频谱。

$$R(f_x,\ f_y)=\iint_{-\infty}^{\infty} Q(x,\ y)\exp[-2\pi i(f_x x+f_y y)]dx\,dy\tag{3}$$

为调制盘的传递函数。*表示共轭复数。

若对(2)式进行逆变换，得:

$$p(t)=\mathscr{F}^{-1}\mathscr{P}(f_x,\ f_y)=\iint_{-\infty}^{\infty} Q(f_x,\ f_y)R^*(f_x,\ f_y)\exp[2\pi i(f_x x'+f_y y')]df_x\,df_y,\tag{4}$$

收稿日期: 1981年1月9日

其输出频谱可表示成:

$$P(f)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t)\exp[-2\pi ift]dt \tag{5}$$

假定调制盘以匀速 v_x 直线运动(见图 1)。则 $x'(t)=v_xt$, $y'(t)=0$, (4)式简化成:

$$p(t)=\iint_{-\infty}^{\infty}Q(f_x, f_y)R^*(f_x, f_y)\exp(2\pi if_xv_xt)df_x\,df_y, \tag{6}$$

其频谱为:

$$P(f)=\iiint_{-\infty}^{\infty}Q(f_x, f_y)R^*(f_x, f_y)\exp[2\pi i(f_xv_x-f)t]df_xdf_ydt$$

$$=\frac{1}{v_x}\int_{-\infty}^{\infty}Q(f/v_x, f_y)R^*(f/v_x, f_y)df_y。 \tag{7}$$

2. 高斯光斑对栅栏型调制盘扫描的输出频谱

假定待测光斑的强度分布为:

$$q(x, y)=\frac{I_0}{2\pi\beta^2}\exp[-(x^2+y^2)/2\beta^2], \tag{8}$$

如图 2 所示。令 $r_0^2=x^2+y^2=2\beta^2$,根据计算,在半径为 r_0 的小圆范围内,集中了全部能量的 63.2%。我们称 β^2 为高斯光斑的结构参数,它决定着光斑的弥散程度。

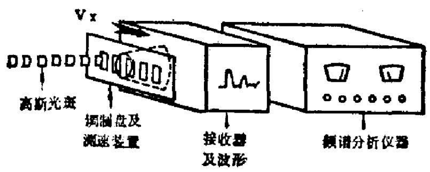

图 1 红外接收示意图

Fig. 1 Diagram of infrared detection

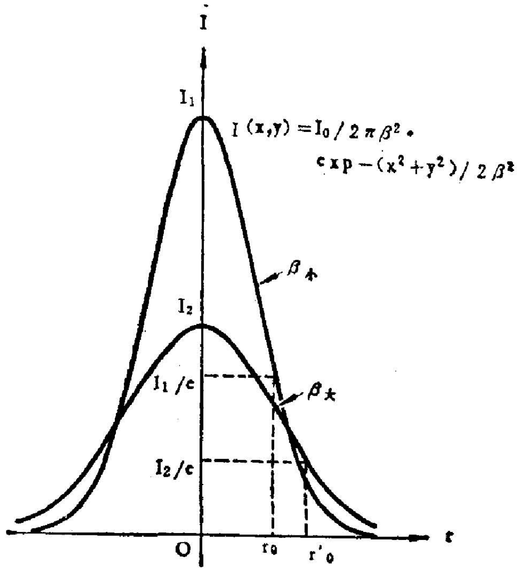

图 2 光斑的强度分布

Fig. 2 Intensity profile of the spot

对(8)式进行二维傅里叶变换,得到目标的空间频谱为:

$$Q(f_x, f_y)=I_0\exp[-2\pi^2\beta^2(f_x^2+f_y^2)], \tag{9}$$

假定调制盘是 n 个相距为 $2a$ 的 $a\times b$ 栅栏形调制盘(见图 3)。其透过函数为:

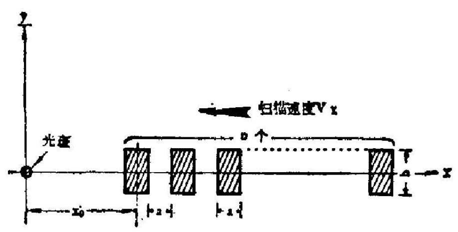

图 3 光斑的扫描方式及调制盘

Fig. 3 Spot scanning regime and modulation disc

$$r(x, y)=\begin{cases}1 & 当\ -b/2\leqslant y\leqslant b/2,\\ & x_0+2ka-a/2\leqslant x\leqslant x_0+2ka+a/2,\\ & k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\\ 0 & 其余情况,\end{cases} \tag{10}$$

其传递函数为:

$$R(f_x, f_y)=\frac{\sin(2na\pi f_x)\sin(\pi bf_y)}{2\pi^2f_xf_y\cos(\pi af_x)}\exp\{-2\pi if_x[x_0+(n-1)a]\} \tag{11}$$

把(9)，(11)式代入(7)式，可求得输出频谱为：

$$P(f)=\frac{I_0}{\pi f}\frac{\sin(2na\pi f/v_x)}{\cos(\pi fa/v_x)}\exp[-2\pi^2\beta^2f^2/v_x^2]e^{-i\phi_0}\mathrm{erf}\left(\frac{b}{2\sqrt{2}\beta}\right), \tag{12}$$

其中

$$\phi_0=\frac{2\pi f}{v_x}[x_0+(n-1)a],\ \mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}dy。$$

当 $n=6$ 时输出频谱如图 4 所示。

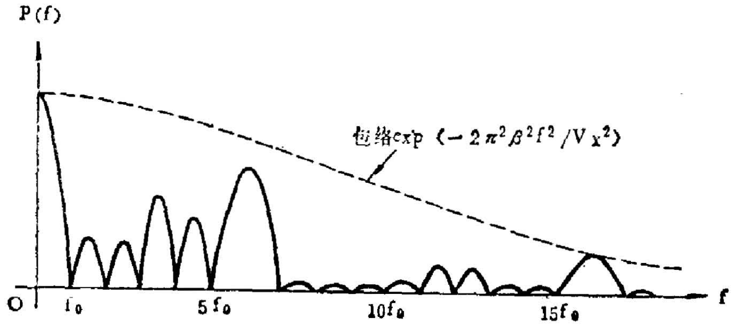

图 4　频谱 $P(f)$ 及其包络 $e^{-2\pi^2\beta^2f^2/v_x}$($n=6$ 情况)

Fig. 4　Spectrum $P(f)$ and its envelope $e^{-2\pi^2\beta^2f^2/v_x}$ ($n=6$)

分析(12)式可以看出，频谱 $P(f)$ 由四部分组成：(1) 包络项 $\exp[-2\pi^2\beta^2f^2/v_x^2]$；(2) 调制函数 $\frac{1}{f}\frac{\sin(2na\pi f/v_x)}{\cos(\pi af/v_x)}$；(3) 相位项 $e^{-i\phi_0}$；(4) 常数项 $\frac{I_0}{\pi}\mathrm{erf}\left(\frac{b}{2\sqrt{2}\beta}\right)$。对测量而言，重要的是前两部分，而高斯光斑的结构参数 β^2 主要出现在包络项上。调制函数则是一振动较快的周期函数，它在包络项的限制下给出一系列的峰值。若能实际测量出 $P(f)$ 的一组峰值，就可推算出高斯光斑的结构参数 β^2。

3. 频谱分析：零值点和峰值点

对于(12)式取绝对值，并令：$\eta=2\pi^2\beta^2/v_x^2$，$A=\frac{I_0}{\pi}\mathrm{erf}\left(\frac{b}{2\sqrt{2}\beta}\right)$，

得：

$$|P(f)|=A\left|\frac{\sin(2na\pi f/v_x)}{f\cos(\pi af/v_x)}\right|e^{-\eta f^2}。$$

(I) 谱的零值点。

让 $\sin(2na\pi f/v_x)=0$，并除掉

$$f\cos(a\pi f/v_x)=0 \tag{13}$$

成立的点。故零值点为：

$$f=f_0,\ 2f_0,\ \cdots(n-1)f_0,\ (n+1)f_0,\ \cdots(3n-1)f_0,\ (3n+1)f_0, \tag{14}$$

其中 $f_0=\frac{v_x}{2na}$。不难看出，零值点的间隔一般为 f_0，但在(13)式成立的点上，其间隔为 $2f_0$。

(II) 谱的峰值点。

峰值点 f_k 可表示为主要项 f_{k_0} 加上修正项 ε_k：

$$f_k=f_{k_0}+\varepsilon_k, \tag{15}$$

其中

$$f_{k_0}=0,\ \frac{3}{2}f_0,\ \frac{5}{2}f_0,\cdots,\frac{2n-3}{2}f_0,\ \frac{2n}{2}f_0,\ \frac{2n+3}{2}f_0,\cdots\frac{6n-3}{2}f_0,\ \frac{6n}{2}f_0,\ \frac{6n+3}{2}f_0,\ \cdots, \tag{16}$$

而

$$\varepsilon_k=\frac{v_x}{\pi a}\,\frac{\operatorname{tg}(\pi a f_{k_0}/v_x)-\dfrac{v_x}{\pi a f_{k_0}}}{4n^2-1-\dfrac{v_x^2}{\pi^2 a^2 f_{k_0}^2}-\operatorname{tg}^2(\pi a f_{k_0}/v_x)}。 \tag{17}$$

分析 ε_k 表达式(17)可知，在 $f_{k_0}=0,\ nf_0,\ 3nf_0,\ \cdots$处，$\varepsilon_k=0$，显然这些点也就是满足方程(13)式的点。我们把使 $\varepsilon_k=0$ 成立的峰值点称为“主峰值点”，而把 $\varepsilon_k\neq0$ 的峰值点称为“一般峰值点”，其理由是调制函数 $\dfrac{1}{f}\ \dfrac{\sin(2na\pi f/v_x)}{\cos(\pi af/v_x)}$ 在“主峰值点”上的值要大于它周围的“一般峰值点”上的值(见图 4)。

调制函数在主峰值点上的值为：

$$\left.\frac{\sin(2na\pi f/v_x)}{f\cos(\pi af/v_x)}\right|_{f=0}=2na\pi/v_x,$$

$$\left.\frac{\sin(2na\pi f/v_x)}{f\cos(\pi af/v_x)}\right|_{f=Nf_0n}=\frac{4na}{Nv_x}\quad(\text{其中 } N=1,\ 3,\ 5,\ \cdots)。$$

而在一般峰值点上的值为：

$$\left.\frac{\sin(2na\pi f/v_x)}{f\cos(\pi af/v_x)}\right|_{f=f_k}=\frac{\cos(2na\pi\varepsilon_k/v_x)}{f_{k_0}\cos(\pi af_{k_0}/v_x)}。$$

由图 4 可以看出：前面几个一般峰值点上的值并不小，它们完全可同主峰值相比较，例如第 2 个峰到第 5 个峰与第 15 个峰相比较。因此需要全盘考虑所有峰值点的贡献，并从中检测出我们需要的 β^2 的信息，这就是本文利用统计方法检测 β^2 的原由。

4. 高斯光斑参数 β^2 的统计检测

光斑参数 β^2 的检测，最简单的办法是在 $f=\dfrac{v_x}{2a}$ 处测幅值，β 增加，幅值减少，β 减少，幅值增加。这一方法精度不高。我们提出用统计检测的方法。

首先我们来讨论函数 $y=Be^{-\eta x^2}$ 的最佳逼近。令 $z=\log y=\log B-\eta x^2$，$\xi=\log B$。则 $z=\xi-\eta x^2$。

设给定一组实际测量值 $(x_k,\ z_k)$，$k=1,\ 2,\ \cdots M$，希望从中检测出最佳的 ξ，η 值。假定这组测量值是彼此独立和平权的，利用最小二乘法，可求得：

$$\xi=\frac{\langle x^4\rangle\langle z\rangle-\langle x^2\rangle\langle x^2z\rangle}{\langle x^4\rangle-\langle x^2\rangle^2},\quad \eta=\frac{\langle x^2\rangle\langle z\rangle-\langle x^2z\rangle}{\langle x^4\rangle-\langle x^2\rangle^2}。 \tag{18}$$

其中：
$$\langle x^2\rangle=\frac{1}{M}[x_1^2+x_2^2+\cdots+x_M^2],\quad \langle x^4\rangle=\frac{1}{M}[x_1^4+x_2^4+\cdots+x_M^4],$$

$$\langle x^2z\rangle=\frac{1}{M}[x_1^2z_1+x_2^2z_2+\cdots+x_M^2z_M],\quad \langle z\rangle=\frac{1}{M}[z_1+z_2+\cdots+z_M]。$$

为了求出高斯光斑结构参数 β^2，只需分析 η。

在测量输出频谱的过程中，由于仪器精度、实验误差、外界干扰等偶然因素，多次重复测量不可能都获得同一值。即是说实验值本身还有某种不确定性，用数学语言表示，指实验值介于某一小矩形区域内：

$$x_{k_0}-\Delta x_k\leqslant x_k\leqslant x_{k_0}+\Delta x_k,\quad y_{k_0}-\Delta y_k\leqslant y_k\leqslant y_{k_0}+\Delta y_{k}。$$

我们称 $(x_{k_0},\ y_{k_0})$ 为测量中心值，$(\Delta x_k,\ \Delta y_k)$ 为围绕中心值的误差起伏(见图5)。于是得到：

$$z_{k_0}-\Delta z_k\leqslant z_k\leqslant z_{k_0}+\Delta z_k,\quad z_{k_0}=\log y_{k_0},\quad \Delta z_k=\left|\frac{\Delta y_k}{y_{k_0}}\right|。\tag{19}$$

把(19)式代入(18)式后展开，得到 η_0 的中心值为：

$$\eta_0=\frac{\langle x_0^2 z_0\rangle-\langle x_0^2\rangle\langle z_0\rangle}{\langle x_0^4\rangle-\langle x_0^2\rangle^2}。\tag{20}$$

而 η 的相对起伏率为：

$$\left|\frac{\Delta\eta}{\eta_0}\right|\leqslant 2\sqrt{\langle x_0^2\rangle}\left\{\frac{\sqrt{\langle z_0^2\rangle}-\langle z_0\rangle}{\langle x_0^2 z_0\rangle-\langle x_0^2\rangle\langle z_0\rangle}+\frac{2\left(\langle x_0^2\rangle+\sqrt{\dfrac{\langle x_0^6\rangle}{\langle x_0^2\rangle}}\right)}{\langle x_0^4\rangle-\langle x_0^2\rangle^2}\right\}\sigma_x+\frac{\sqrt{\langle x_0^4\rangle}+\langle x_0^2\rangle}{\langle x_0^2 z_0\rangle-\langle x_0^2\rangle\langle z_0\rangle}\sigma_z,\tag{21}$$

其中
$$\sigma_x=\left[\frac{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_M^2}{M}\right]^{1/2},$$

$$\sigma_z=\left[\frac{\Delta z_1^2+\Delta z_2^2+\cdots+\Delta z_M^2}{M}\right]^{1/2}。$$

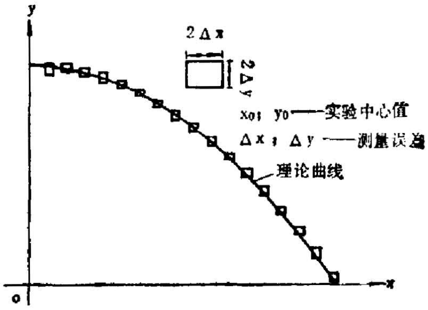

图5　实验值与最佳理论曲线

Fig. 5　Experimental value and optimized theoritical curves

由此可见 η 的中心值仅取决于测量中心值 $(x_{k_0},\ y_{k_0})$，与误差起伏 $(\Delta x_k,\ \Delta y_k)$ 无关，而 η 的相对起伏率却与 $\Delta x_k,\ \Delta y_k$ 有关，它的大小决定着测量结果的精确度。

将前述的理论应用于频谱公式上：

$$|P(f)|=A\left|\frac{\sin(2na\pi f/v_x)}{f\cos(\pi af/v_x)}\right|\exp\left[-\frac{2\pi^2\beta^2}{v_x^2}f^2\right]$$

由于调制函数 $\left|\dfrac{\sin(2na\pi f/v_x)}{f\cos(\pi af/v_x)}\right|$ 中的参数 $n,\ a,\ v_x$ 假定都是已知的，与我们需求的 β^2 无关，因此输出频谱中零值频率和峰值频率都是已知的。设峰值频率为 $f_k=f_{k_0}+\Delta f_k$，并在此峰值频率上测得谱值为：

$$P_k=P_{k_0}\pm\Delta P_k,$$

其中 P_{k_0}——测量得到的峰值的中心值，ΔP_k——峰值测量误差，f_{k_0}——中心频率，Δf_k——测量带宽，得到：

$$P_{k_0}\pm\Delta P_k=A\left|\frac{\sin(2na\pi f_k/v_x)}{f_k\cos(\pi af_k/v_x)}\right|\exp\left[-\frac{2\pi^2\beta^2}{v_x^2}f_k^2\right]\qquad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots M)。$$

令
$$z_k=\log[P_{k_0}\pm\Delta P_k]+\log\left|\frac{f_k\cos(\pi af_k/v_x)}{\sin(2na\pi f_k/v_x)}\right|,$$

得到：
$$z_{k_0}=\log P_{k_0}+\log|f_{k_0}\cos(\pi af_{k_0}/v_x)|,$$

$$\Delta z_k\leqslant\left|\frac{\Delta P_k}{P_{k_0}}\right|+\left|\frac{v_x}{\pi af_{k_0}}-\mathrm{tg}(\pi af_{k_0}/v_x)\right||\varepsilon_k|,$$

其中 f_{k_0}，ε_k 之值见(16)式和(17)式。

由于
$$z_k=z_{k_0}\pm\Delta z_k,$$

得到：
$$\beta_0^2=\frac{v_x^2}{2\pi^2}\frac{\langle f_0^2 z_0\rangle-\langle f_0^2\rangle\langle z_0\rangle}{\langle f_0^4\rangle-\langle f_0^2\rangle^2},$$

而 β^2 的起伏率为：

$$\left|\frac{\Delta\beta^2}{\beta_0^2}\right|\leqslant\frac{2\langle f_0^2\rangle}{\langle f_0^2 z_0\rangle-\langle f_0^2\rangle\langle z_0\rangle}\sigma_z+2\sqrt{\langle f_0^2\rangle}\left\{\frac{\sqrt{\langle z_0^2\rangle}-\langle z_0\rangle}{\langle f_0^2 z_0\rangle-\langle f_0^2\rangle\langle z_0\rangle}+\frac{4\langle f_0^2\rangle}{\langle f_0^4\rangle-\langle f_1^2\rangle^2}\right\}\sigma_f。$$

据(14)式: $f_0=\frac{v_x}{2na}$, 我们称f_0为"单位带宽"。它表征着对测量系统的频率分辨率的具体要求,即是说,我们使用的频谱分析仪的频率分辨率Δf必须小于$\frac{f_0}{2}$,否则测量结果无意义(见图6)。

假定实验从小到大顺序测量了 M 个点,则可算出:

$$\langle f_0^2\rangle=\frac{f_0^2}{3}\left(M^2-\frac{1}{4}\right)-\frac{f_0^2}{6n}\left(M^2-n^2\right)-\frac{f_0^2}{4}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{n}\right), \tag{22}$$

$$\langle f_0^4\rangle=\frac{f_0^4}{5}\left(M^2-\frac{1}{4}\right)\left(M^2-\frac{7}{12}\right)-\frac{f_0^4}{10n}\left(M^2-n^2\right)\left(M^2-\frac{7}{3}n^2+5\right)-\frac{f_0^4}{16}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{M}\right), \tag{23}$$

$$\langle f_0^4\rangle-\langle f_0^2\rangle^2=\frac{4}{45}f_0^4\left(M^2-\frac{1}{4}\right)\left(M^2-1\right)+\frac{f_0^4}{90n}\left(M^2-n^2\right)\left(M^2+21n^2-\frac{95}{2}\right)+\frac{f_0^4}{6}\left(M^2-\frac{5}{8}\right)\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{n}\right)-\frac{f_0^4}{3n}\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{4M}\right)\left(M^2-n^2\right)+\frac{f_0^4}{16}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{n}\right)^2, \tag{24}$$

$$\sigma_f=\sqrt{\langle\Delta f^2\rangle}=\frac{\sqrt{2}\,v_x}{(4n^2-1)\pi a}=\frac{2n\sqrt{2}}{\pi(4n^2-1)}f_0, \tag{25}$$

$$\sigma_f/f_0=\frac{2\sqrt{2}\,n}{\pi(4n^2-1)}。 \tag{26}$$

从(26)式可看出,当调制盘辐条数n增加,σ_f/f_0将减小,β^2的起伏率降低,这意味着这样测得的β^2可得较高精度。

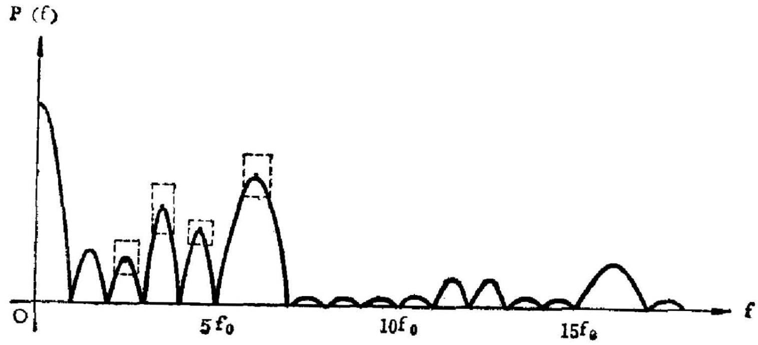

图6 峰值频率上的测量值

Fig. 6 The measurement values at peak frequency

5. 若速度v_x未知时,高斯光斑参数β^2的检测

在前面的论述中,我们假定速度v_x是已知的。假若v_x未知时,我们可以通过测量峰值频率,首先来推算速度v_x。

测速最简单的办法可测主峰值点的移动,但这一方法精度不高。要使测量精度较高,可用下列方法。

分析峰值频率的表示式(15)式,不难看出,峰值之间的间隔,大部分等于f_0,小部分等于$\frac{3}{2}f_0$。如果实验上测定一组峰值频率,则可算出它们之间的间隔。这组间隔可分为数值

彼此相近的两组:

$$f_2'-f_1';\ f_3'-f_2';\ f_4'-f_3';\ \cdots$$
$$f_2''-f_1'';\ f_4''-f_3'';\ f_6''-f_5'';\ \cdots$$

分别对它们求算术平均: $\langle f_2'-f_1'\rangle$, $\langle f_2''-f_1''\rangle$ 和标准误差$\delta_{f'}$, $\delta_{f''}$。上面两组平均值对应着:

$\langle f_2'-f_1'\rangle\simeq f_0$, $\langle f_2''-f_1''\rangle\simeq 3/2f_0$, $\langle f_2''-f_1''\rangle/\langle f_2'-f_1'\rangle=3/2$, 即是说, 调制盘(或光斑)若是匀速运动,上面最后一个式子就是它的实验判据,并由此获得:

$$v_{x_0}=na[\langle f_2'-f_1'\rangle+2\langle f_2''-f_1''\rangle/3]。\tag{27}$$

测速的标准误差 δ_{v_x} 为:

$$\delta_{v_x}=na[\delta_{f'}+2\delta_{f''}/3]。\tag{28}$$

知道了扫描速度就可根据上面第四节推算出光斑参数 β^2。

小　　结

本文采用调制盘的方法,测量输出频谱一系列峰值,来推算高斯光斑的结构参数。由于测量误差的随机性,统计平均后可获得较为精确的结果。在实际工作中,峰值频率可由计算得到,只需测量频谱峰值,故简化了设备,节省了工作量。

作者对杨亚文同志的帮助表示致谢。

参 考 文 献

[1] L. D. Dickson; *Opt. Engng*, 1979, **18**, No. 1 (Jan), 70.

A reticle method for exactly measuring Gaussian optical spot parameter

XU SHENLONG AND YIN DAREN
(*Kunming Institute of Physics*)

(Received 9 January 1981)

Abstract

Measurement of IR optical spot is of great importance to physics and technology. In this paper, we present a reticle method for exactly measuring Gaussian optical spot parameter. Reticle method may be used for fast, accurate measurement of Gaussian optical spot parameter.

Suppose the brightness of a spot is a Gaussian model, when optical spot scans over the bars reticle, the parameter of Gaussian optical spot can be exactly known with measuring peak value of frequency spectrum.