第2卷 第1期 光学学报 Vol. 2, No. 1
1982年1月 ACTA OPTICA SINICA January 1982

旁轴高斯光束传输性质的矩阵表示及稳定光腔和非稳定光腔模式的统一处理

朱如曾
(中国科学院力学研究所)

提要

本文给出对旁轴高斯光束及其传输性质的矩阵表示，把轴高斯光束情况下的 ABCD 定律推广到旁轴情况。本文还统一处理稳定腔和非稳定腔的模式。

一、引言

人们熟知，在旁轴近似下，对于轴对称光学系统，光线用(x, θ)描写，光学系统对光线的变换用二阶“光线变换矩阵”H来描写。若在输入平面处光线为$(x^{(0)}, \theta^{(0)})$，输出平面处为$(x^{(1)}, \theta^{(1)})$，则

$$\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \theta^{(1)} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x^{(0)} \\ \theta^{(0)} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

式中 $H=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，它由光学系统的性质决定。

对于旁轴点光束，文献[1]已给出向量表示法，即用a和b不全为零的一组实数(a, b, c)来表示由坐标(x, θ)满足线性关系

$$ax+b\theta+c=0, \tag{2}$$

的全部光线所构成的点光束。(a, b, c)的物理意义如下：

若$a\neq 0$，则光束曲率半径为

$$R=-\frac{b}{a}, \tag{3}$$

光束中心的x坐标(即离轴的距离)为$h=-\frac{c}{a}$；

若$a=0$，但$b\neq 0$，则$R=\infty$，表示平行光束，其传播方向与光学系统轴线夹角为$\theta_0=-a/b$。

对于“光线变换矩阵”为H的光学系统，其“光束变换矩阵”Q为[1]

收稿日期：1981年4月24日

$$Q=\begin{bmatrix} \begin{matrix} & \mathrm{H}^{-1} & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D & -C & 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。 \tag{4}$$

如果输入平面和输出平面处的点光束为$(a^{(0)}, b^{(0)}, c^{(0)})$和$(a^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)})$,则

$$\begin{bmatrix} a^{(1)} \\ b^{(1)} \\ c^{(1)} \end{bmatrix}=Q\begin{bmatrix} a^{(0)} \\ b^{(0)} \\ c^{(0)} \end{bmatrix}。 \tag{5}$$

利用上述描述,可以证明,对旁轴点光束也成立 ABCD 定律[1],即

$$R^{(1)}=\frac{AR^{(0)}+B}{CR^{(0)}+D}, \tag{6}$$

式中,$R^{(0)}$ 和 $R^{(1)}$ 分别为输入平面和输出平面处的光束曲率半径。

上述(a, b, c)限于实向量。现在我们要将它向复向量推广,以便描述高斯光束,这样使得光束的向量表示法达到完备的程度。同时我们还在复向量表示法下统一处理稳定腔和非稳定腔的模式。

二、旁轴高斯光束及其传输性质的矩阵表示

如果我们将复数组(x, θ)理解成复光线,并令其传输性质为(1)式,则当 a/b 为非实数的复数时,满足线性关系

$$ax+b\theta=0 \tag{7}$$

的所有复光线(x, θ)构成复点光束(a, b),其复曲率半径显然为

$$q=-b/a。 \tag{8}$$

因为对复光线,(1)式成立,而且(7)式和(8)式又与(2)式和(3)式相同,所以(5)式和(6)式也适合于复光束$(a, b, 0)$,只是(6)式中 R 应改为 q,

$$q^{(1)}=\frac{Aq^{(0)}+B}{cq^{(0)}+D}, \tag{9}$$

即 q 遵从 ABCD 定律。

另一方面,物理上已知[2],轴高斯光束(即光束轴与光学系统轴重合的高斯光束)的复参数也遵从 ABCD 定律,所以,只要在某一参考平面上$(a, b, 0)$的复曲率半径 q 与轴高斯光束的复参数相等,则在任一参考平面上两者均保持相等。因此,复曲率半径为 $q=-b/a$ 的复点光束可以完全描述复参数为 $q'=q$ 的高斯光束。因此,以后我们用 q 来统一表示轴高斯光束的复参数以及其对应的复点光束的复曲率半径。

现在给出旁轴高斯光束(即光束轴与光学系统轴有小夹角的高斯光束)的向量表示。旁轴高斯光束的完全描写需要三个参数:复参数 q 和光束轴的描写(x, θ)。因此一个四维复向量(a, b, x, θ)可以表示一个旁轴高斯光束。这里 x, θ 取实数,a/b 取非实数的复数,它通过(8)式与 q 相联系。

为了给出光学系统(H)对$(a,\ b,\ x,\ \theta)$的变换，我们需要先证明对旁轴高斯光束 ABCD 定律也成立。这里，只需提到如下两点性质：

(1) 若旁轴高斯光束在均匀介质中传播一段距离，从参考平面 1 到达参数平面 2，而 1 和 2 间的距离为 z，则在光束方向上实际已传过距离

$$z'=z/\cos\alpha,$$

式中，α 为光束轴与光学系统轴之间的夹角，$\alpha\ll1$。在光束传播方向上应用 ABCD 定律得

$$q_2=q_1+z'=q_1+z/\cos\alpha\approx q_1+z。$$

这一变换关系与轴高斯光束的变换关系一致，即对旁轴高斯光束而言，在光学系统轴方向上也符合 ABCD 定律。

(2) 旁轴高斯光束在介质分界面上折射时，其光束宽度近似不变，而曲率半径的变换规律应与旁轴点光束完全一样。对旁轴点光束我们已知其曲率半径的变换关系与轴点光束一致，即(6)式。所以旁轴高斯光束的等相面曲率半径的变换关系也与轴高斯光束一致。又已知旁轴高斯光束宽度的变换关系也与轴高斯光束近似一致。所以界面折射(包括反射)对旁轴高斯光束复参数 q 的变换关系与轴高斯光束一致，即遵从 ABCD 定律。

光学系统对旁轴光束的变换可以分解为上面两种简单变换的多次乘积，所以我们可以得出结论：旁轴高斯光束也遵从 ABCD 定律。另一方面，光束轴的变换显然是(1)式。所以我们有

$$\begin{bmatrix} a^{(1)} \\ b^{(1)} \\ x^{(1)} \\ \theta^{(1)} \end{bmatrix}=N\begin{bmatrix} a^{(0)} \\ b^{(0)} \\ x^{(0)} \\ \theta^{(0)} \end{bmatrix},\qquad(10)$$

式中

$$N=\begin{bmatrix} \begin{matrix} & \\ & H^{-1'} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & H \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D & -C & 0 & 0 \\ -B & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & C & D \end{bmatrix}。\qquad(11)$$

(10)式就是光线变换矩阵为 H 的光学系统对旁轴高斯光束的变换关系。可以称 N 为“高斯光束变换矩阵”。因此，我们已把旁轴点光束的向量表示及变换的矩阵表示推广到旁轴高斯光束。

三、稳定腔和非稳定腔模式的统一处理

从衍射理论已知，腔模只有轴点光束和轴高斯光束两大类。事实上，旁轴点光束和旁轴高斯光束虽然有可能等相面再自现，但强度分布不能自再现，所以不可能形成模式。因此，腔模可以用复向量$(a,\ b,\ 0)$来描写。

从$(a,\ b,\ 0)$的物理意义可知，$\lambda(a,\ b,\ 0)$ 和 $(a,\ b,\ 0)$表示同一高斯光束或同一实点光束。为了使$(a,\ b,\ 0)$表示腔模，其充要条件是它能再自现，即如果腔的光线往返矩阵为 H，则要求

$$Q\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

式中，λ 为任一非零常数，而 Q 与 H 的关系是(4)式。为使$(a,\ b,\ 0)$有非零解，其充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} D-\lambda & -C \\ -B & A-\lambda \end{vmatrix}=0。$$

解得

$$\lambda=\frac{A+D}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(A+D)^2-4}, \tag{13}$$

$$R=-\frac{a}{b}=\frac{\lambda-D}{C}=\frac{B}{\lambda-A}。 \tag{14}$$

当$|A+D|\geqslant 2$，但 $H\neq I$ 时，腔是非稳定的[3]。由(13)式和(14)式可知，λ 和 R 均为实数，故表示实点光束。再由模式稳定性分析[1]可知，仅当$|\lambda|>1$时，模才稳定。

当$|A+D|<2$时，腔是稳定的[3]。此时，λ 和 R 均为非实的复数，故表示高斯模。

当 $H=\pm I$ 时，腔也是稳定的[3]。此时，$\lambda=\pm 1$，R 取实数或复数均可，故腔模可以是点光束，也可以是高斯光束，并且是随遇稳定的。

感谢中国科学院力学研究所谈镐生教授、周光地教授和上海光学精密机械研究所王之江教授的指导以及力学所傅裕寿同志的帮助。

参 考 文 献

[1] 朱如曾；《激光》，1981，**8**，No. 6(Jun)，13.
[2] H. Kogelnik; *Bell Syst. Tech. J.*, 1965, **44**, No. 3 (Mar), 455.
[3] 谈镐生，朱如曾；《中国科学》，1981，**24**，No. 5 (May)，557.

Representation of transmission properties of paraxial Gaussian beams by matrix and the unified treatment of the modes of stable and unstable cavities

Zhu Ruzeng
(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

(Received 24 April 1981)

Abstract

Representation of transmission properties of paraxial Gaussian beams by matrix is given and the ABCD law for on-axis Gaussian beams is extended to paraxial case. The modes of stable and unstable cavities are treated uniformly.