第2卷 第1期　　　　光 学 学 报　　　　Vol. 2, No. 1
1982年1月　　　　ACTA OPTICA SINICA　　　　January 1982

自由电子激光的不稳振荡理论

谭 维 翰
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提　　要

自由电子激光最初是一种量子理论[1~5]，后来 F. A. Hopf 等证明可用经典理论加以描述[6]。本文将从解 Vlasov-Maxwell 方程的不稳振荡出发来讨论自由电子激光，所得结果不仅可用于相对论电子束通过横向周期磁场产生激光，而且也适用于光波或微波与相对论电子束相互作用产生激光。比较了各种方案，对电子束单色性要求是高的，接着又讨论了电子回旋激射器的不稳振荡，求得波纹回旋激射器问题的解。

一、自由电子的不稳振荡

一束相对论自由电子与以横向矢势 $\boldsymbol{A}$ 所表述的电磁场相互作用时，电子的分布函数 f 满足如下的 Vlasov 方程[7]，

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}_e\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{e}{m}\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}}{c}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\right]f=0 \tag{1}$$

设电子在 x, y 方向均匀分布，并对 x, y 方向各种电子速度求积分，于是(1)式可改写为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+v_z\frac{\partial}{\partial z}+\frac{e}{m}\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}}{c}\right)\cdot\boldsymbol{i}_3\frac{\partial}{\partial v_z}\right]F=0 \tag{2}$$

式中 $F=\iint f\,dv_x dv_y$，$\boldsymbol{i}_3$ 为 z 方向的单位矢量。将 $\boldsymbol{H}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 通过横矢势 $\boldsymbol{A}$（令标势 $\phi=0$）来表示，因为

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}/m}{\sqrt{1+(\boldsymbol{p}/m)^2}}\simeq\boldsymbol{v}_0-\frac{e\boldsymbol{A}}{m\gamma C},\ \gamma=\sqrt{1+(\boldsymbol{p}/m)^2},\ \boldsymbol{v}_0=v_z\boldsymbol{i}_3, \tag{3}$$

则(2)式又可写为 $$\left[\frac{\partial}{\partial t}+v_z\frac{\partial}{\partial z}-\frac{e^2}{\gamma m^2C^2}(\boldsymbol{A}\times\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{i}_3\frac{\partial}{\partial z}\right]F=0。 \tag{4}$$

而矢势 $\boldsymbol{A}$ 应满足如下波动方程[8]

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=-\frac{4\pi}{C}\boldsymbol{j}=-\frac{4\pi}{C}\int e\boldsymbol{v}_\perp F\,dv_z=\frac{4\pi e^2}{\gamma mC^2}\int \boldsymbol{A}F\,dv_z, \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{v}_\perp$ 为 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 方向上的分量。现将 F 表示为平衡的 F_0 及偏离平衡的 F' 之和，即 $F=F_0+F'$；将 $\boldsymbol{A}$ 表示为入射波 $\boldsymbol{A}_0$ 及散射波 $\boldsymbol{A}_S$ 之和，即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0e^{-ik_0zi\omega_0t}+\boldsymbol{A}_Se^{ik_Sz-i\omega_St}+C.C., \tag{6}$$

则 F' 中 $\omega\simeq\omega_S-\omega_0$, $k\simeq k_S+k_0$，傅里叶分量 $F'(\omega, k)$ 按(4)，(6)式为

收稿日期：1981年8月12日

$$F'(\omega,\ k)=\frac{-e^2}{\gamma m^2C^2}\frac{\partial F_0}{\partial v_z}A_SA_0^*\frac{k}{\omega-kv_z},\tag{7}$$

代入(5)式便得到

$$1=\frac{4\pi e^2}{m}\frac{kv_\perp^2}{\omega^2+2\omega_0(\omega+Ck)-C^2k^2}\int\frac{\partial F_0/\partial v_z}{-\omega+kv_z}dv_z,\tag{8}$$

式中 $v_\perp^2=(eA_0/m\gamma C)^2$ 即横向驱动速度的平方。不同的相对论电子束与场的耦合方案将决定不同的 $v_\perp^2$ 值。参照文献[7]将(8)式写成便于讨论的形式

$$1+\frac{k_D^2}{k^2}W\left(\frac{\omega-kv_z}{k(T/m)^{1/2}}\right)\frac{k^2v_\perp^2}{\omega_s^2-C^2k_s^2}=0,\tag{9}$$

式中 k_D 为德拜波数，W 为色散函数。当 $k(T/m)^{1/2}$ 很小时，(9)式又可写为

$$\frac{\omega_s^2-C^2k_s^2}{k^2v_\perp^2}-\frac{\omega_p^2}{(\omega-kv_z)^2}-\frac{3\omega_p^2k^2(T/m)}{(\omega-kv_z)^4}+i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{(\omega-kv_z)k_D^2}{k^3(T/m)^{1/2}}\exp\left[\frac{-(\omega-kv_z)^2}{2k^2(T/m)}\right]=0,\tag{10}$$

式中 ω_p 为等离子体振荡频率。设 $\omega_s=\tilde{\omega}_S+i\gamma_S$，则由(9)式得

$$\frac{\tilde{\omega}_s^2-C^2k_s^2}{k^2v_\perp^2}\simeq\frac{\omega_p^2}{[\tilde{\omega}_S-\omega_0-(k_S+k_0)v_z]^2}+\frac{3\omega_p^2k^2(T/m)}{[\tilde{\omega}_S-\omega_0-(k_S+k_0)v_z]^4}。\tag{11}$$

当 $v_\perp\ll C$ 时，$\tilde{\omega}_S\simeq Ck_S$，为了增率较大，由(10)式看出 $\omega\simeq kv_z-k(T/m)^{1/2}$，当 $(T/m)^{1/2}$ 很小时，便是 $\omega\simeq kv_z$，即 $\omega_S\simeq Ck_S\simeq\omega_0+(k_S+k_0)v_z$。最后得出 k_s 及 $\tilde{\omega}_S$ 的修正值为：

$$k_S=\frac{\omega_0+k_0v_z}{c-v_z}\quad\tilde{\omega}_S\doteq Ck_S+\frac{2\omega_p^2v_\perp^2}{Ck_S(T/m)}。\tag{12}$$

由(10)式又得出不稳振荡增率 γ_S 的如下结果：

$$\frac{\gamma_S}{k_SC}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{k_D^2v_\perp^2}{k_s^2C^2}\frac{\omega-kv_z}{k^3(T/m)^{1/2}}\exp\left[-\frac{(\omega-kv_z)^2}{2k^2(T/m)}\right],\tag{13}$$

$$\gamma_{S\max}=0.3801(k_D/k_S)^2(v_\perp/C)^2k_SC,\tag{14}$$

式中 $k_D^2/k_s^2=4\pi ne^2/Tk_s^2$ 与电子束单色性有关，而 $(v_\perp/C)^2=(eA/m\gamma C^2)^2$ 又与入射光的功率密度有关。因电子半径 $r_0^2=e^2/mC^2$，输入功率密度 $I_0=Ck_0^2A_0^2/4\pi$，故(13)式又可写成

$$\gamma_S=8\pi^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{n}{k_0^2k_S}\frac{r_0^2I_0}{\gamma^2T}\frac{\omega-kv_z}{k(T/m)^{1/2}}\exp\left[-\frac{(\omega-kv_z)^2}{2k^2(T/m)}\right]\tag{15}$$

$$\gamma_{S\max}=60.02(n/k_0^2k_S)(r_0I_0/\gamma^2T)\tag{16}$$

前一因子 $n/k_0^2k_S$ 为 $\lambda_0^2\lambda_S/8\pi^3$ 体积内的自由电子数，而后一因子 $r_0^2I_0/\gamma^2T$ 则是以 γ^2T 为单位通过 r_0^2 面积的能流。看来电子的单色性是很重要的，在 Hopf 的分析中，由于假定了电子束是理想单能的，未能明显看出这点。

由上面的分析还可以看出 v_z 影响散射光的波矢 k_S，因而也影响到频率 ω_S，即

$\omega_S\simeq Ck_S=Ck_0\beta_z/(1-\beta_z)$（静周期磁场激发 $\omega_0=0$），　$\omega_S\simeq Ck_0(1+\beta_z)/(1-\beta_z)$（光波或微波激发 $\omega_0=ck_0$）。　(17)

由(17)式得出，采用静周期磁场，而且希望得高频 ω_S，则一定需用相对论电子束，如果采用光波激发，则用非相对论电子束也是可以的，但仍要求很单色，否则由(15)式增率将下降，还应指出在光与电子束相互作用过程中谱宽 $k\sqrt{T/m}$ 将不断增加，这也是 Madey 等实验中遇到的困难[1,9]，故关键在于获得并保持电子束的单色性，当然增大流束密度 n 及激发磁场强度 I 也同样是重要的，这些均在(15)式中表现出来了。

如果不加静的周期磁场，也不加光波，则上面所说的散射波 A_s 将无法激励起来，因为

$I_0=0$, 但这时可以激发静电纵波，其增率 γ_s 由下面色散关系确定。

$$1-\frac{\omega_p^2}{(\omega-kv_z)^2}-\frac{3\omega_p^2k^2(T/m)}{(\omega-kv_z)^4}\cdots+i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{(\omega-kv_z)k_D^2}{k^3(T/m)^{1/2}}\exp\left[\frac{-(\omega-kv_z)^2}{2k^2(T/m)}\right]=0,$$
$$\omega=kv_z-\sqrt{\omega_p^2+3k^2(T/m)},\quad \gamma_s=-\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2}(\omega-kv_z)\left(\frac{k_D}{k}\right)^3\exp\left[\frac{-(\omega-kv_z)^2}{2k^2(T/m)}\right]。\tag{18}$$

现参照文献[1]，[9]的参数，算出公式(15)中的各个参数为 $n=2.06\times10^8/\mathrm{cm}^3$, $I_0=1.375\times10^9\,\mathrm{w/cm^2}$, $T=2.04\times10^{-13}\,\mathrm{erg}$, $k_s=(2\pi/10.6)\mu^{-1}$ 和 $k_0=(2\pi/3.2)\mu^{-1}$, 于是从(15)式求得 $\gamma_s=1.352\times10^6/\mathrm{sec}$, 单程增益 4.68%。关于振荡频率及波长为

$$\omega_s=\frac{Ck_0\beta_z}{1-\beta_z}\simeq\frac{2Ck_0}{1-\beta_z^2},\quad \lambda_s=\frac{\lambda_0}{2}\left(1-\beta_z^2+\frac{v_\perp^2}{c^2}\right)=\frac{\lambda_0}{2\gamma^2}\left(1+\frac{r_0A_0^2}{mC^2}\right)=11.06\,\mu,\tag{19}$$

与实测数 10.6 μ 相比，有些差别。

周期磁场等价的 $I_0=1.375\times10^9\,\mathrm{w/cm^2}$ 已经不算低了，这时的磁场强度为 24 KG[1]，只是电子密度 $2.06\times10^8/\mathrm{cm}^3$ 太低了些，如让 I_0/T 不变，用微波或激光来代替上面的周期磁场，例如 λ_0 取为 $3.2\,\mu$, 则 n 应增到原来的 10^{12} 倍，而 $2.06\times10^{20}/\mathrm{cm}^3$ 才能保持原来的增益，不过这时 $\lambda_s=10.6\times10^{-4}\,\mu=10.6\,\text{Å}$ 已经到达 X 光区了。如将 I_0 提到 $10^{14}\sim10^{16}\,\mathrm{w/cm^2}$ 对 n 的要求便是 $10^{15}\sim10^{13}/\mathrm{cm}^3$。又如将 γ^2 下降一个量级，对 n 或 I_0 的要求也就下降一个量级，不过这时已不是 10.6 Å，而是 106 Å 软 X 光区了。看来要实现 10.6 Å 的 X 激光，用相对论电子束与高功率激光脉冲对打是有可能的。

二、回旋激射器的不稳振荡

Granatstein 提出了自由电子通过纵向磁场，产生回旋运动的回旋激射器方案[11]，后 Providakes 又在磁套管内加铝环，使恒定纵向磁场上叠加一横向波纹磁场（用另一线圈产生）[12]，起到独立调节大小的作用，在文献[8～12]中对回旋激射器的分析，均假定了电子束是理想单能的，也得到基本相近的结果，对波纹回旋激射器还没有过分析。与上述分析不同，我们考虑到电子束有一定的能谱宽度，运用前节不稳振荡方法，在简要地导出理想单能回旋激射器结果之后，便求解波纹回旋激射器的振荡频率与增率。

在有纵向磁场作用下，参照文献[7]可得电子分布函数的起伏与电流 $\boldsymbol{j}$ 分别为：

$$\begin{aligned}&\delta f(\boldsymbol{v})\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)+\eta t]\\&=-\frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t}\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{v}')}{\partial\boldsymbol{v}'}\right]\cdot\left[\left(1-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}'}{\omega}\right)\overleftrightarrow{I}+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}'}{\omega}\right]\cdot\delta\boldsymbol{E}\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'-\omega t')+\eta t']dt',\\&\boldsymbol{j}=-\frac{e^2n}{m}\int dv\int_0^{\infty}d\tau\,\boldsymbol{v}\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{v}')}{\partial\boldsymbol{v}'}\right]\cdot\left[\left(1-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}'}{\omega}\right)\overleftrightarrow{I}+\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}'}{\omega}\right]\\&\quad\cdot\delta\boldsymbol{E}\exp[-i\phi(\tau)+\eta(t-\tau)+i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)],\end{aligned}\tag{20}$$

式中 $\boldsymbol{v}'=\overleftrightarrow{B}(t'-t)\cdot\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\overleftrightarrow{H}(t'-t)\cdot\boldsymbol{v}/\Omega$, $\phi(\tau)=\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\omega\tau$, $\tau=t-t'$, 其中 $\overleftrightarrow{B}=d\overleftrightarrow{H}/\Omega dt$, $\Omega=Be/mC$,

$$\overleftrightarrow{H}=\begin{pmatrix}\sin\Omega t & 1-\cos\Omega t & 0\\-(1-\cos\Omega t) & \sin\Omega t & 0\\0 & 0 & \Omega t\end{pmatrix}。$$

考虑到 $\boldsymbol{v}=v_\perp(\cos\theta\boldsymbol{i}_1+\sin\theta\boldsymbol{i}_2)+v_\parallel\boldsymbol{i}_3$, 求出 $\partial f/\partial v'$ 代入(20)式，并对 θ 积分后得

$$\boldsymbol{j}=\frac{-\omega_p^2}{4\pi\omega}\left\{\overleftrightarrow{I}+\int_0^\infty d\tau\int dv\,\Sigma\left(\frac{n\Omega}{v_\perp}\frac{\partial f}{\partial v_\perp}+k_\parallel\frac{\partial f}{\partial v_\parallel}\right)\overleftrightarrow{\Pi}(n)\exp[i(n\Omega+k_\parallel v_\parallel-\omega)\tau-\eta\tau]\right\}$$
$$\cdot\delta E\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)+\eta t],\tag{21}$$

其中
$$\overleftrightarrow{\Pi}(n)=\begin{pmatrix} n^2\Omega^2J_n^2/k_\perp & iv_\perp n\Omega J_nJ_n'/k_\perp & v_\parallel n\Omega J_n^2/k_\perp \\ -iv_\perp n\Omega J_nJ_n'/k_\perp & v_\perp^2(J_n')^2 & -iv_\parallel v_\perp J_nJ_n' \\ v_\parallel n\Omega J_n^2/k_\perp & iv_\parallel v_\perp J_nJ_n' & v_\perp^2J_n^2\end{pmatrix},\tag{22}$$

式中
$$\int dv=2\pi\int v_\perp dv_\perp dv_\parallel,\quad J_n'=dJ_n(z)/dz,\quad z=k_\perp v_\perp/\Omega。$$

1．理想单能回旋激射器

若略去(22)中非对角矩阵元，并考虑到 $\boldsymbol{k}=k_\perp\boldsymbol{i}_1+k_\parallel\boldsymbol{i}_3$。将电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 的三个分量近似地取为 $(0,\ E_y,\ 0)$ 及 $(B_x,\ 0,\ B_z)$[10]，则 $\boldsymbol{j}$ 可写为

$$\boldsymbol{j}=\frac{i\omega_p^2}{4\pi\omega}\left[1+\sum_n\int dv\left(\frac{n\Omega}{v_\perp}\frac{\partial f}{\partial v_\perp}+k_\parallel\frac{\partial f}{\partial v_\parallel}\right)\frac{v_\perp^2(J_n')^2}{n\Omega+k_\parallel v_\parallel-\omega-i\eta}\right]E_y\boldsymbol{i}_2。\tag{23}$$

设 $f=\delta(v_\parallel-v_\parallel^0)\delta(v_\perp-v_\perp^0)/2\pi v_\perp$，由(23)和(5)式考虑到 $\delta\boldsymbol{E}=-i\omega\delta\boldsymbol{A}/C$，便得色散关系

$$\omega^2-\omega_p^2-C^2(k_\perp^2+k_\parallel^2)=\omega_p^2\sum_n\left[\frac{2n\Omega(1/z_0-z_0)J_nJ_n'}{n\Omega+k_\parallel v_\parallel^0-\omega-i\eta}-\frac{(k_\parallel v_\perp^0J_n')^2}{(n\Omega+k_\parallel v_\parallel^0-\omega-i\eta)^2}\right]\tag{24}$$

式中 $z_0=k_\perp v_\perp^0/\Omega$，由此可求出振荡频率与增率[10]。

2．波纹回旋激射器

在回旋激射器分析中 $v_\perp^0$ 被看成是常数。对波纹回旋激射器而言，由于横向周期电磁场的作用，横向速度 $v_\perp^0$ 已不再是常数，(21)式中对"τ"的积分将变得很复杂，但当波矢方向与纵向磁场一致时，有比较简单的结果，由(22)式得出二阶张量 $\overleftrightarrow{\Pi}(n)$ 的表式为：

$$\overleftrightarrow{\Pi}(\pm1)=\begin{pmatrix} v_\perp^2/4 & \pm iv_\perp^2/4 & 0\\ \mp iv_\perp^2/4 & v_\perp^2/4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \overleftrightarrow{\Pi}(0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&v_\parallel^2\end{pmatrix},\tag{25}$$

其他的 $\overleftrightarrow{\Pi}(n)$ 均为零。

对于回旋激射器来说，电子分布函数起伏的波数与频率和电场的波数与频率相等。但对于波纹回旋激射器，两者的波数与频率是不一样的。

$$\Sigma\delta f(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{k},\ \omega)\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)+\eta t]=-\frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t}\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{v}}\right]\cdot\left[\left(1-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}'}{\omega}\right)\overleftrightarrow{I}+\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}'}{\omega}\right]$$
$$\cdot\{\delta\boldsymbol{E}_0\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'-\omega_0t')+\eta t']+\delta\boldsymbol{E}_S\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'-\omega_St')+\eta t']\}dt',\tag{26}$$

设
$$f(v')=\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{(v_\parallel-v_\parallel^0)^2}{2T/m}\right]\frac{\delta(v_\perp'-v_\perp^0)}{2\pi v_\perp}。\tag{27}$$

由(3)式和(6)式得

$$\boldsymbol{v}_\perp'^0=(-e/m\gamma C)\left[\boldsymbol{A}_0\exp(-ik_0z-i\omega_0t')+\boldsymbol{A}_S\exp(-ik_Sz-i\omega_St')+C.C.\right],\tag{28}$$

式中 $\delta\boldsymbol{E}_0=-i\omega_0\boldsymbol{A}_0/C$，$\delta\boldsymbol{E}_S=-i\omega_S\boldsymbol{A}_S/C$。将(27)，(28)式代入(26)式对横波易于看出

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_0+\boldsymbol{k}_S,\quad \omega=-\omega_0+\omega_S,\tag{29}$$

又因(26)式中 $(1-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}'/\omega)=1-k_\parallel v_\parallel'/\omega$ 与 $v_\perp'^0$ 无关，这样从(27)，(28)和(21)式可得

$$\boldsymbol{j}=\frac{-\omega_p^2}{4\pi\omega}\int_0^\infty d\tau\int dvk_\parallel\frac{\partial f}{\partial v_\parallel}\sum_{n=0,\pm1}\overleftrightarrow{\Pi}(n)\exp[i(n\Omega+k_\parallel v_\parallel-\omega)\tau-\eta\tau]$$
$$\cdot\delta\boldsymbol{E}_S\exp[i(\boldsymbol{k}_S\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)+\eta t],\tag{30}$$

其中 $k_{/\!/}=k_0+k_S$，用来计算电流 $\boldsymbol{j}$ 的张量 $\overleftrightarrow{\Pi}(n)$ 为

$$\overleftrightarrow{\Pi}(\pm1)=\begin{pmatrix}(eA_0/2m\gamma C)^2 & \mp i(eA_0/2m\gamma C) & 0\\ \pm i(eA_0/2m\gamma C)^2 & (eA_0/2m\gamma C)^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \overleftrightarrow{\Pi}(0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&(v_{/\!/}^0)^2\end{pmatrix},\tag{31}$$

注意到

$$\int_0^\infty \exp[i(n\Omega+k_{/\!/}v_{/\!/}-\omega)\tau-\eta\tau]d\tau\simeq -i/(n\Omega+r_{/\!/}v_{/\!/}-\omega),$$

$$\int dv\,\frac{k_{/\!/}\partial f/\partial v_{/\!/}}{n\Omega+k_{/\!/}v_{/\!/}-\omega}=W\left(\frac{\omega-n\Omega-k_{/\!/}v_{/\!/}^0k_{/\!/}}{(T/m)^{1/2}}\right)\frac{1}{T/m},$$

则得

$$\boldsymbol{j}=\frac{-\boldsymbol{A}_S\omega_p^2}{4\pi C}\sum_{n=0,\pm1}W\left(\frac{\omega-n\Omega-k_{/\!/}v_{/\!/}^0}{(T/m)^{1/2}}\right)\overleftrightarrow{\Pi}(n)/(T/m)。\tag{32}$$

由(32)和(5)式得出横场及纵场的色散关系为

$$\det\left|\overleftrightarrow{I}-\left(\frac{k_SC}{\omega_S}\right)^2\left(\overleftrightarrow{I}-\frac{\boldsymbol{k}_S\boldsymbol{k}_S}{k_S^2}\right)+\left(\frac{k_D}{\omega_S}\right)^2\sum_{n=0,\pm1}W\left(\frac{\omega-n\Omega-k_{/\!/}v_{/\!/}^0}{k_{/\!/}(T/m)^{1/2}}\right)\overleftrightarrow{\Pi}(n)\right|=0,\tag{33}$$

解(33)式求得

$$\omega_S^2-(Ck_S)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{k_DeA_0}{m\gamma C}\right)^2W\left(\frac{\omega-\Omega-k_{/\!/}v_{/\!/}^0}{k_{/\!/}(T/m)^{1/2}}\right)=0,$$

$$\omega_S^2+(k_Dv_{/\!/}^0)^2W\left(\frac{\omega-k_{/\!/}v_{/\!/}^0}{k_{/\!/}(T/m)^{1/2}}\right)=0。\tag{34}$$

(34)式的第一个解为重根，分别对应于左旋波与右旋波，频率相差2Ω与(29)联立，可定出振荡频率与增率、讨论与(9)式～(17)式同，当 $\Omega\to0$ 即磁场趋于零时，这两个解并为(9)式。调节 Ω 便改变了左、右旋波频率。(34)式的第二个解对应于纵波，(29)式应以下式代替

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_S,\quad \omega=\omega_S,\tag{35}$$

由(34)和(35)式便得(18)式，故纵波振荡不受回旋运动影响。

参 考 文 献

[1] J. R. Elias *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1976, **36**, No. 11 (Mar), 717.
[2] J. M. J. Madey; *J. A. P.*, 1971, **42**, No. 6 (May), 1906.
[3] J. M. J. Madey *et al.*; *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 1973, **NS-20**, 980.
[4] V. L. Granatstein; *IEEE Trans, Microwave Theory & Tech.*, 1977, **MTT-25**, No. 6 (Jun), 545.
[5] V. P. Sukhatme, P. W. Wolf; *J. A. P.*, 1973, **44**, No. 5 (May), 2331.
[6] F. A. Hopf, P. Meystre *et al.*; *Opt. Commun.*, 1976, **18**, No. 4 (Sep), 413.
[7] S. Ichimuru; «*Basic Principes of Plasma Physics*», (W. A. Benjamin, Inc. London, 1973).
[8] P. Sprangle *et al.*; *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, 1977, **MTT-25**, No. 6 (Jun), 528.
[9] 刘盛纲;«中国科学», 1979, **22**, No. 8 (Aug), 901.
[10] E. Ott, W. M. Manheimer; *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 1975, **PS-3**, No. 1 (Mar), 1.
[11] V. L. Granaststein *et al.*; *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, 1974, **MTT-22**, No. 12 (Dec), 1000.
[12] G. Providakes *et al.*; *J. A. P.*, 1976, **50**, No. 7 (Apr), 3026.

Unstable oscillation theory of the free electron laser

TAN WEIHAN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 12 August 1981)

Abstract

In this paper, we develop an unstable oscillation theory of the free electron laser. This theory can be used to analyze the production of stimulated emission by relativstic electrons either passing through a periodic magnetic field or interacting with a light wave field.