

稀疏物体与连续物体的投影重构性质

王 能 鹤

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

本文论述了离散点集与连续物体的投影重构的不同性质。对于离散点集,只要少数几个投影便能唯一地重构出物体。对于连续物体,投影的必要数目与物体中可分辨的单元数成正比,并且投影上采样的数目与投影数有相互独立的要求。另外,还对点编码图像的纵向分辨能力作了讨论。

一、引 言

一般认为非相干光不能对三维物体成像。其实不然,普通光学系统一般都能对物空间的一个三维区域成像到与之共轭的像空间的另一个三维区域。非相干光三维成像的困难在于不能一次记录与重现三维像。例如,在大数值孔径的显微镜中,纵向分辨率与横向分辨率相当,因此,一次只能记录焦深以内的一层物体图像,其它层次的图像则是完全模糊的。所以,一次记录不能得到深度方向的信息。而对于相对孔径较小的光学系统,它具有较大的焦深,我们能够记录焦深范围内的三维物体信息,但是,这种记录乃是三维物体的二维投影,缺乏立体感和足够高的分辨率。至于对于 X 射线或 γ 射线,没有适当的成像系统,自然只能靠投影成像。依靠多次投影,综合三维物体已有比较成熟的技术^[1]。

编码成像是非相干光三维成像的新方法。但是,无论波带片编码成像或者随机点编码成像,对离散物体比较有效,对连续物体总不太成功^[2]。目前,对这类现象缺乏分析。从信息论的角度看,编码成像所记录的信息是否足够地多,以至可以重构三维物体,这是值得分析的。

作者认为,随机点编码图实际上是若干个点投影图的迭加。本文讨论物体的疏稀程度的两个极端情况,即离散物体和连续物体的不同的投影重构性质。可以证明离散点集只要少数几个投影就足以三维重构物体,而对于连续物体,投影的数目必须与欲分辨的物体单元数目成正比。在这个基础上,讨论了点编码成像的有效性。

二、有限点集的投影重构

如果空间有一些离散的物点,它们的大小比可分辨的尺寸要小,它们的光学性质(发光强度或吸收系数、散射系数等)与周围的介质相比有明显的不同,那末这些点就组成了有限可数点集。当只注意离散物体的位置时,这些物体也可近似地作为有限点集。

当一个点的任意两个方向的投影已知以后,把这两个投影作反向投影,相交点就是这个物点的重构像。一般认为,由两个投影可以区分两个物点的位置。实际上,这是不充分的。

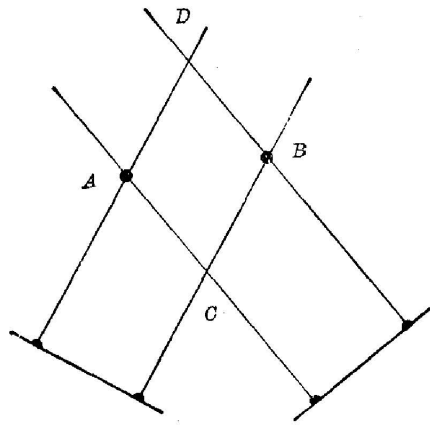


图 1

为了简单起见,我们分析两维问题。设有 A, B 两个物点。已知它们在两个方向的投影为 $\{A', B'\}; \{A'', B''\}$ 。作反向投影,我们将得到 A, B, C, D 四个点(图 1)。如果原来两个物点的投影性质是相同的,那末,我们将无法从这四个点中确定究竟哪两个点是像点。由此可知,当我们说可以从两个投影区分两个物点的空间位置时,我们暗中已经假定了这两个物点的投影性质是不同的。在图 2 中,我们以线段的粗细表示这两个点的不同的投影性质。显而易见,两根粗线的相交位置即为 A ,两根细线的相交点即为 B 。一根粗线与一根细线的相交点 C 和 D 则是假像。

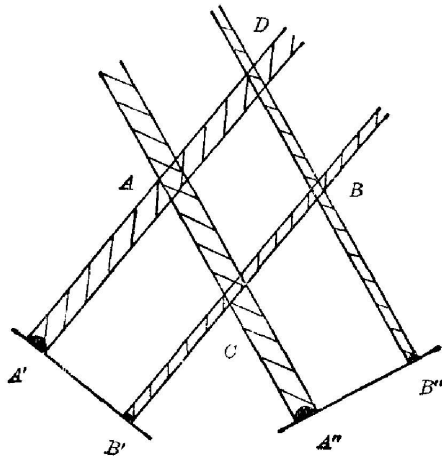


图 2

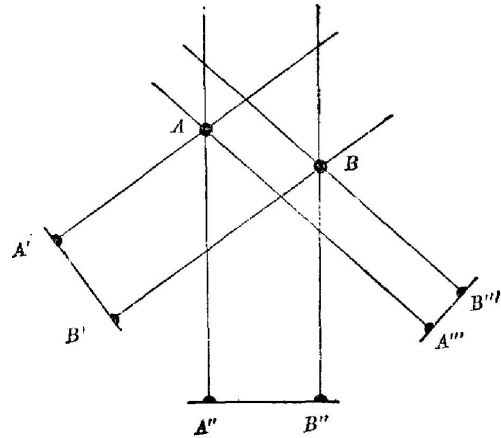


图 3

若把两个物点作三个不同方向的投影(图 3),再把这三个投影图作反向投影,则将得到两个三条线的相交点,以及其余六个两条线的相交点。因此,真像与伪像的强度比为 $3:2$ 。对于两个点的情况可归纳在表 1 中。

表 1 二个点的投影重构

Table 1 Two points' projection

投影次数	1	2	3	n
信号点数	0	2	2		2
伪像点数	0	2	6		$n(n-1)$
真伪像强度比	0	1:1	3:2	$n:3$

对于三个点的情况,两次投影得到 9 个等强度点,其中三个点是真像,六个点是假像,真伪像强度比为 $1:1$ 。三次投影有可能得到三个真像, 18 个伪像点,真伪像强度比为 $3:2$ 。当伪像点简并时,又会出现与信号点等强度的伪像。这时,我们需要四次或更多次投影数。三个点的投影重构性质可归纳为表 2。

表 2 三个点的投影重构
Table 2 Three points' projection

投影次数	1	2	3	n
信号点数	0	3	3	3
伪像点数	0	6	≤ 18	$3n(n-1)$
真伪像强度比	0	1:1	$\leq 3/2$	$\leq n/2$

依次类推, 设物体是由 N 个点组成的(例如 N 个原子组成的大分子), 投影次数为 M , 则重构物体的必要条件为

$$M > 3, \quad (1a)$$

而充分条件为

$$M > N. \quad (1b)$$

但是, 由于投影的方向是随机的, 若物体的点密度足够小, 即物体足够地稀疏, 则第 $N+1$ 个反投影遇到前 N 个反投影的伪像的几率也足够地小。由此可知, 有限点集的投影重构所需要的投影数略大于 3。当集合的元素的数目 N 较大时, 实际需要的投影数 $M \ll N$ 。这是点集投影重构的基本特点。

究竟多大的真伪像强度比才能充分区分真像与假像, 这与系统的噪声性质有关。在 X 光投影过程中, 噪声的来源主要有两个部分, X 光的量子噪声与底片的颗粒噪声。

根据 Goodman^[2]的意见, 信噪比不是定义为信号与噪声平均值之比 $I/\langle N \rangle$, 而应该定义为信号与噪声的均方根偏差之比 S/σ , 两者有如下关系

$$\frac{S}{\sigma} = \frac{I/\langle N \rangle}{[1+2I/\langle N \rangle]^{1/2}}. \quad (2)$$

对于离散点源, 底片的颗粒噪声引起的 $I/\langle N \rangle$ 可表示为^[2]

$$I/\langle N \rangle \propto (Lf_{\max})^2, \quad (3)$$

其中 L 为底片的有效工作尺寸, f_{\max} 为底片的 MTF 的截止值。因此, $I/\langle N \rangle$ 与底片的空间带宽积的平方成正比。又因为 S/σ 是 $I/\langle N \rangle$ 的单调上升函数, 所以, 当底片的空间-带宽积足够大时, S/σ 具有足够大的值。

X 光的量子噪声就象电子学中的散粒噪声一样, 满足泊松分布, 不过这里是指 X 光光子, 而不是电子。这部分噪声满足下列关系

$$I/\langle N \rangle = kn_0, \quad (4)$$

其中 k 为一常数, n_0 是光子的平均数。

显然, 只有在下列条件

$$I_i - I_p > \sigma_i + \sigma_p \quad (5)$$

被满足时, 我们才能够从强度的大小区分真像与伪像。这里 I_i 、 σ_i 为真像的强度和均方偏差, I_p 、 σ_p 分别为伪像的强度和均方偏差。当 $I/\langle N \rangle \gg 1$ 时, $S/\sigma = \left[\frac{1}{2} \frac{I}{\langle N \rangle} \right]^{1/2} = \left(\frac{k}{2} n_0 \right)^{1/2}$ 。

用这个近似表达式, 条件(5)可以化为对真像与伪像的强度比 $I_i/I_p = \gamma$ 的要求

$$\gamma > \frac{\left(\frac{k}{2} n_0 \right)^{1/2} + 1}{\left(\frac{k}{2} n_0 \right)^{1/2} - 1}. \quad (6)$$

在低噪声情况下, (6)式成为 $\gamma > 1$ 。

三、连续物体的投影重构

在讨论点集的投影重构时,我们已假设任意两个点之间的距离足够大,以至在每个投影中,我们都足以分辨任意两个点投影,除非它们正好排列在投影方向上。或者说,在深度方向排列的两个点,只要两次投影的方向之间的夹角足够大,我们总可以分辨它们。在这种假定之下,可以不讨论分辨率的问题。而能否重构则是以区分真像与伪像(在一定的信噪比条件下)为判据的。对于连续物体,投影重构的可能性总是以一定的空间分辨率为基础的。下面,我们推导投影方式、各个投影中采样数 N 以及投影数 M 与空间分辨率的关系。

为了简单起见,我们以二维物体的一维投影为例,推广到三维物体的二维投影是直接的。设二维物体为 $f(x, y)$ (见图 4)。从 φ 方向得到投影 $f_{\varphi}(x')$ 。将直角坐标 (x, y) 旋转到 (x', y') , 则 $f_{\varphi}(x')$ 为

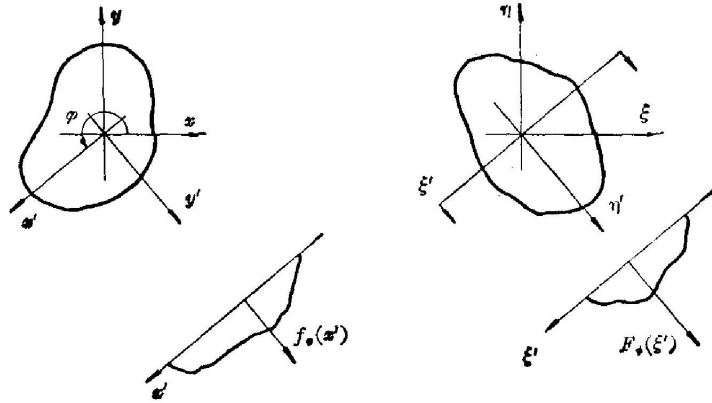


图 4

$$f_{\varphi}(x') = \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') dy', \quad (7)$$

$f(x', y')$ 的二维傅里叶变换为 $F(\xi', \eta')$:

$$F(\xi', \eta') = \iint f(x', y') e^{i2\pi(x'\xi' + y'\eta')} dx' dy'. \quad (8)$$

设 $f_{\varphi}(x')$ 的一维傅里叶变换为

$$F_{\varphi}(\xi') = \int f_{\varphi}(x') e^{i2\pi x'\xi'} dx'. \quad (9)$$

将(7)式代入(9)式为

$$F_{\varphi}(\xi') = \iint f(x', y') e^{i2\pi x'\xi'} dx' dy'. \quad (10)$$

比较(8)式与(10)式得到

$$F_{\varphi}(\xi') = F(\xi', \eta') |_{\eta'=0}. \quad (11)$$

这称为投影的中心切片定理^[2]。

设 $f_{\varphi}(x')$ 仅在 $(-X', X')$ 区间内有不为 0 的值,并在这个区域内进行均匀采样,采样点数为 N 。按照采样定理,若投影的傅里叶变换是带限的,截止频率为 Ω ,那末,由采样值重构投影的必要条件为,采样间隔 Δx 满足 $\Delta x < \frac{1}{2\Omega}$, 即

$$N > 4X'\Omega. \quad (12)$$

设在 $[0, \pi]$ 角度范围内等角间隔地取 M 次投影, 角间隔 $\Delta\theta$ 为

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{M}. \quad (13)$$

根据中心切片定理, M 次投影相当于把频率域分为 M 个扇形。

在计算机截面层析术中, 都可以进行这两种采样。在光学模拟截面层分析中, 每个投影中并不需要采样。但是, 比较这两种采样是有意义的。由(12)式可知, 在频率域内径向采样点数为 N , 间隔为

$$\Delta\rho = \frac{1}{2X'}. \quad (14)$$

从频率域的极坐标中看 (ρ, φ) , 径向采样 $N/2$ 次, 切向采样 $2M$ 次。这两种采样是相互独立的, 投影中采样数目 N 增加, 不可能降低对投影次数 M 的要求。 N 的要求由(12)式决定, 而 M 的要求如下:

$$M > 2\pi X\Omega, \quad (15)$$

而衍射分辨率 ΔX 为

$$\Delta X \geq \frac{1}{\Omega}. \quad (16)$$

结合(12)、(15)和(16)式, 我们得到 N 、 M 和 ΔX 的关系为

$$M \geq 2\pi \frac{X}{\Delta X}, \quad (17a)$$

$$N \geq \frac{4X}{\Delta X}. \quad (17b)$$

由此可知, 投影重构不是要求总的采样数多, 而是要求 N , M 分别足够大。

在极坐标中, 傅里叶逆变换为

$$f(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\Omega} d\rho \cdot \rho \cdot F(\rho, \theta) \exp[-2\pi i r \rho \cos(\theta - \varphi)], \quad (18)$$

其中 $F(\rho, \theta)$ 是投影 $f_{\varphi}(x)$ 的一维傅里叶变换。从(18)式知道, 投影重构的过程是: 先将投影 $f_{\varphi}(x)$ 进行傅里叶变换, 再进行 ρ 滤波和 $\text{rect}\left(\frac{\rho}{\Omega}\right)$ 切趾, 这样得到

$$g(r, \varphi, \theta) = \int_0^{\Omega} d\rho \cdot \rho \cdot F(\rho, \theta) \exp[-i2\pi r \rho \cos(\theta - \varphi)]. \quad (19)$$

最后把这些中间结果全部投影到 φ 轴上。这个过程一方面在标度上进行 $\cos(\theta - \varphi)$ 的变化, 另一方面完成对 θ 的积分。所有实际使用的方法都等同于上述过程^[3]。

四、讨 论

(一)在《非相干光学处理》一书中^[4], 作者论述到编码图像的三维性质时指出, 这些技术十分紧密地与物体的稀疏程度有关, 这乃是不必说的。当面对漫射的以及或多或少连续的物体时, 所有这些方法都是没有希望的。他是根据实验得出的结论, 我们认为这正与投影重构有内在联系。

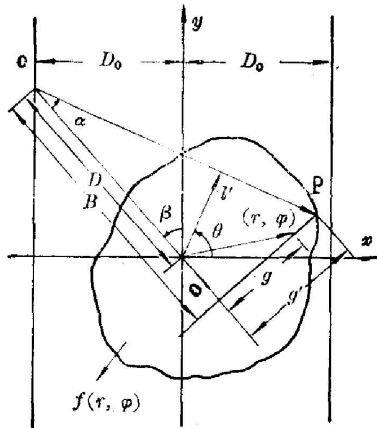


图 5

含意如图 5 所示, CP 方向的投影记为 $P(V, \theta)$, 或者用 (g', β) 座标, 投影记为 $h(g', \beta)$, 则物体恢复公式为

$$f(r, \varphi) = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(BD - g'D_\beta)}{B(g - g')^2 (B^2 + g'^2)^{1/2}} dg' d\beta, \quad (20a)$$

$$B(BD - g'D_\beta) \geq 0, \quad (20b)$$

这里 $D_\beta = \frac{dD}{d\beta}$ 。 (20b) 是恢复公式的约束条件, 物体的大小以及投影中心 C 的运动轨迹必须受 (20b) 的限制。在编码孔成像中, 若干点的投影相当于对 β 的积分用几个项的求和来表示。显然, 这种可能性一般是不存在的, 或者说, 只有在采样定理被满足的条件下才是可能的。

(二) 若 m 个投影不是在 $[0, \pi]$ 以内均匀安排, 而是集中在角度 Θ 以内 (图 6), 并且满足

$$\frac{\Theta}{m} \cdot \Omega < \frac{1}{2X}, \quad (21)$$

其中 Ω 为截止频率, $2X$ 为物体大小。这相当于在 ξ 和 η 两个方向上截止频率是不同的, 在 ξ 方向的截止频率为 Ω , 在 η 方向上, 截止频率为 $\Omega \sin \Theta$, 结果, 纵向和横向的分辨率分别为

$$\Delta X \sim \frac{1}{2\Omega}, \quad (22a)$$

$$\Delta Y \sim \frac{1}{2\Omega \sin \Theta}. \quad (22b)$$

如果我们把成像过程看作是物体经过各个信息通道 (即每个自由度) 的投影, 那末这些投影是集中张角 D/f 之中的, 即 $\Theta = D/f$, 因此, 纵向分辨率比横向分辨率低 $\sin \Theta$ 倍。

本工作得到王之江同志的指导, 谨表谢意!

参 考 文 献

[1] A. Klug, R. A. Crowther; *Nature*, 1972, 238, No. 5365 (25 Aug), 435.
 [2] J. W. Goodman; *Modern Optics* (John Wiley & Sons Inc., New York, London), 573.

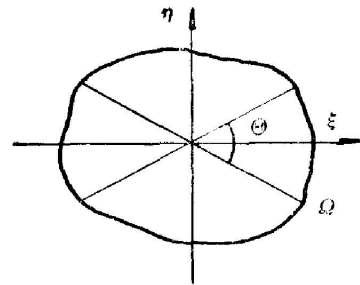


图 6

- [3] H. H. Barret, W. Swindell; *Proc. IEEE*, 1977, **65**, No. 1 (Jan), 89.
 [4] G. L. Rogers; «*Noncoherent Optical Processing*» (John Wiley & Sons Inc., New York, London), **62**.
 [5] N. Ohyama, T. Honda; *Opt. Commun.*, 1978, **27**, No. 3 (Dec), 339.
 [6] F. S. Weinstein; *J. O. S. A.*, 1980, **70**, No. 8 (Aug), 931.

The reconstruction properties of the dilute objects and the extended objects from projections

WANG NENGHE

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 31 October 1980)

Abstract

The reconstruction properties of the dilute objects are different from the extended objects. The dilute objects can be reconstructed from a few of projections. In the case of the extended objects, the projection number needed for reconstruct is proportional to the number of resolvable elements. And the projection number cannot be decreased by means of augmenting sampling points in each projection. The depth resolution of the dot coded imaging is discussed as well.



TM 500 Solar Simulator

Solar simulator serves as an important equipment in space technology.

It is mainly used in the simulating experiments of optical-electronic conversion of solar cell, physical-chemical properties degradation of spacecraft and its hardwares at radiation of sun light and UV rays, thermal equilibrium of spacecraft and satellite attitude control.

Model TM-500 500W miniature solar simulator uses short arc Xe-lamp as a light source. The specifications are listed as following:

Effective radiation area	100 × 100 mm ²
Illuminance	a solar constant,
Uniformity	±3%,
Collimation	±2%,
Stabilization	±3%,
Continue Operation time	4 hours,

Spectrum, Matching with solar spectrum at the atmospheric mass is zero.

Affiliated workshop, Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica.

Address: Changchun Satellite Road

P. O. Box 1060

Telex: 4110 Tel: 24692