

超音速绕流 Mach-Zehnder 干涉图 分析的 Abel 变换

丁培柱 潘守甫

(吉林大学原子与分子物理研究所)

提 要

本文处理了含激波的柱对称或球对称抛射体超音速绕流 Mach-Zehnder 干涉图分析的 Abel 变换问题。我们对一般的 Abel 积分方程研究了具有有限个间断点的解的某些性质; 将其应用到 Mach-Zehnder 干涉图的干涉条纹移动 $\delta(x)$ 和密度 $\rho(x)$ 间的 Abel 变换上, 得到了三个有明显物理意义的结论: (1) 干涉图上的任一直线上的干涉条纹移动 $\delta(x)$ 是 x 的连续函数; (2) 若在截面 1-1 上的圆环 $r=c$ 处有激波, 则当 $x \rightarrow c_-$ 时, $\delta'(x) \sim L/\sqrt{c-x}$; (3) 若除尖点 c 外, 干涉条纹移动 $\delta(x)$ 是光滑的, $\lim_{x \rightarrow c_+} \delta'(x)$ 存在, 且当 $x \rightarrow c_-$ 时, $\delta'(x) \sim L/\sqrt{c-x}$, 则流场中于圆环 $r=c$ 处出现激波, 在激波两侧密度跳跃值为 $\Delta\rho = \lambda^* L / K \sqrt{2c}$, 且对 $r \geq c$ 和 $r < c$, 从 $\delta(x)$ 到 $\rho(r)$ 的变换是通常的 Abel 变换。因此, 我们提出了一个简单且精确的数值解法, 可以把这种方法用于从 $\delta(x)$ 到 $\rho(r)$ 的计算上, 也可计算出在激波处的密度跳跃值。

一、引 言

Mach-Zehnder 干涉图分析 (简称 M-Z 干涉图) 是研究柱对称抛射体超音速绕流问题的重要测试方法^[1,2], 是光学在超音速风洞实验中的一项重要应用。轴对称抛射体超音速绕流 M-Z 干涉图的解释归结为 Abel 方程的研究。过去^[2]皆用斯蒂尔吉斯积分方法求解 Abel 方程。这种方法的明显缺点是不容易直接得出干涉条纹移动和密度场之间的一些物理关系, 而且一般地也不易为物理和技术工作者所接受。本文对一般的 Abel 方程研究了具有第一类间断的解的某些性质, 并应用它们将柱对称抛射体超音速绕流干涉图分析的 Abel 方程的求解归结为一个奇异不定积分的数值积分问题; 根据我们证得的 Abel 方程的结论 2, 即在流场某处存在激波时, 则在此处干涉条纹移动的速率将对坐标趋于激波位置处的二分之一阶的速度趋向无穷大, 提出了一种以附带根式项的多项式分段逼近被积函数的数值解法。这种数值解法能计算出激波两侧的密度跳跃值以及流场中密度分布图; 它建立在初等微积分的基础上, 使用简单, 是物理和技术工作者所乐于接受的。

本文第二节简述了柱对称抛射体超音速绕流干涉图分析的 Abel 方程及其与一般的 Abel 方程的关系; 将附录中证明出的关于非整数阶导数的四个命题应用于其解具有第一类间断的 Abel 方程, 再应用于干涉图分析得到了干涉条纹移动和流场中密度的某些性质; 基于这些性质, 第三节给出了数值解法; 第四节讨论了数值解法的误差估计。

二、理论分析

图 1 是尖头抛射体超音速飞行时的示意图。设想各种条件是柱对称的, 则有一个或几个圆锥形激波向后伸展。图 2 是干涉仪分析实验时 $I-I$ 截面上的光路图, 斜线部分是抛射体截面, 圆周 C 是激波面的截线。在 C 外是未受干扰的气流, 密度和折射率分别为 ρ_0 和 n_0 。在 C 内, 由于柱对称, 密度和折射率只与到中心的距离 r 有关, 分别为:

$$\rho = \rho(r), \quad n = n(r)。$$

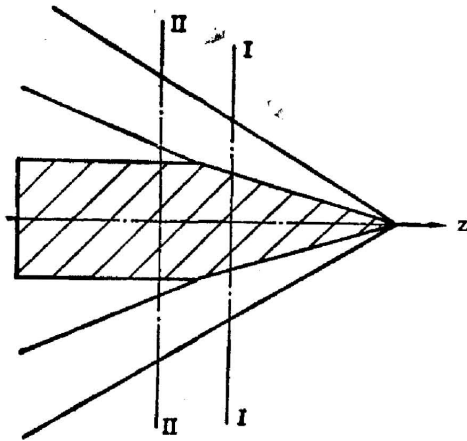


图 1

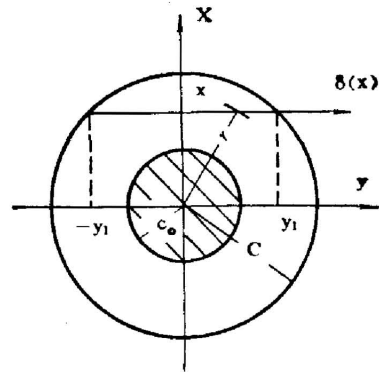


图 2

象通常那样, 本文假定激波 C 是密度 $\rho(r)$ 和折射率 $n(r)$ 的第一类间断; 还假定 $r \geq C$ 及 $r \leq C$ 时密度和折射率的变化率 $\rho'(r)$ 和 $n'(r)$ 连续。

图 2 示意, 对应于截面 $I-I$ 上的干涉条纹移动值 $\delta(x)$, 是光线经过截面 $I-I$ 上距 y 轴的距离为 x 的从 $-y_1$ 到 y_1 一段光路的折射迭加效应。在通常的假定下, 干涉条纹移动 $\delta(x)$ 与折射率改变量 $n(r) - n_0$, 或密度改变量 $\rho(r) - \rho_0$ 之间, 满足方程^[1]

$$\delta(x) = \frac{1}{\lambda^*} \int_{-y_1}^{y_1} [n(r) - n_0] dy = \frac{K}{\lambda^*} \int_{-y_1}^{y_1} [\rho(r) - \rho_0] dy,$$

其中 K 为 Gladstone-Dale 常数, λ^* 为干涉仪单色光源的单色光在真空中的波长。注意到柱对称性及

$$y_1 = \sqrt{c^2 - x^2},$$

以上方程可改写成

$$\delta(x) = \frac{2K}{\lambda^*} \int_0^{\sqrt{c^2 - x^2}} [\rho(r) - \rho_0] dy_0.$$

再由 $x^2 + y^2 = r^2$, 得到

$$\delta(x) = \frac{2K}{\lambda^*} \int_x^c \frac{[\rho(r) - \rho_0] r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr_0. \quad (1)$$

为便于推广到含多个激波的情形, 假定有 $R > C$, 在圆环 $r \geq R$ 上 $\rho(r) \equiv \rho_0$ 。这样, 方程 (1) 又可写成

$$\delta(x) = \frac{2K}{\lambda^*} \int_x^R \frac{[\rho(r) - \rho_0] r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr_0. \quad (2)$$

令

$$\begin{aligned} x^2 = t, \quad r^2 = \xi, \\ U(t) = \delta(\sqrt{t}), \quad F(\xi) = \rho(\sqrt{\xi}) - \rho_0. \end{aligned} \quad (3)$$

方程(2)化成

$$U(t) = \frac{K}{\lambda^*} \int_t^{R^2} \frac{F(\xi)}{\sqrt{\xi-t}} d\xi. \quad (4)$$

这是 Abel 方程

$$u(x) = \int_a^b \frac{f(y)}{(y-x)^\lambda} dy \quad (0 \leq a \leq x \leq b, \quad 0 < \lambda < 1) \quad (5)$$

的特例。人们熟知^[3,4], 当 $u(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微, 且 $u(b) = 0$ 时, Abel 方程(5)的解

$$f(x) = -\frac{\sin \lambda \pi}{\pi} \int_x^b \frac{u'(y)}{(y-x)^{1-\lambda}} dy. \quad (6)$$

再通过(3)式得不含激波时的方程(2)的解, 即不含激波时, 截面 $I-I$ 上各点 r 处的密度

$$\rho(r) = \rho_0 - \frac{\lambda^*}{\pi K} \int_r^R \frac{\delta'(x)}{\sqrt{x^2-r^2}} dx. \quad (7)$$

这就是通常的从干涉条纹移动到流场密度的 Abel 变换。

下面考虑含激波亦即流场密度有间断的情形。我们先就一般的 Abel 方程(5)进行讨论, 设 $a < c < b$, $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上连续, $f(b) = 0$, 点 c 是 $f(x)$ 的第一类间断点。依据附录的命题 1、2 即得

1. $u(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续;
2. $u'(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上连续,

$$u'(x) = \begin{cases} \int_a^b \frac{f'(y)}{(y-x)^\lambda} dy + \frac{f(c_+) - f(c_-)}{(c-x)^\lambda} & (\text{当 } a \leq x < c \text{ 时}), \\ \int_a^b \frac{f'(y)}{(y-x)^\lambda} dy & (\text{当 } c \leq x \leq b \text{ 时}). \end{cases} \quad (8)$$

从而当 $x \rightarrow c_-$ 时

$$u'(x) \sim \frac{f(c_+) - f(c_-)}{(c-x)^\lambda}.$$

反之, 如果 $u(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $u(b) = 0$, $u'(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上连续, 且当 $x \rightarrow c_-$ 时

$$u'(x) \sim K/(c-x)^\alpha \quad (0 < \alpha \leq \lambda),$$

则依据附录中的命题 3、4 又有

3. 函数

$$f(x) = -\frac{\sin \lambda \pi}{\pi} \int_x^b \frac{u'(y)}{(y-x)^{1-\lambda}} dy$$

是 Abel 方程(5)在 $[a, b]$ 上的解, 且当 $\alpha < \lambda$ 时 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续; 当 $\alpha = \lambda$ 时 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上连续, 但是

$$f(c_+) - f(c_-) = K.$$

将以上结果应用于流场含激波的情形, 通过变换(3)式回到方程(2)得到以下结论:

结论 1 当流场中有激波时, 即密度发生间断时, 流场干涉图的垂直于对称轴的任一截线 (譬如图 1 上的 $I-I$) 上的干涉条纹移动 $\delta(x)$ 仍是 x 的连续函数;

结论 2 若截面 $I-I$ 上的圆周 $r=c$ 是激波, 则在激波内侧 (即 $x < c$ 时) 干涉条纹移动 $\delta(x)$ 的变化率

$$\delta'(x) = \frac{2Kx}{\lambda^*} \int_x^R \frac{\rho'(r)}{\sqrt{r^2-x^2}} dr + \frac{2Kx}{\lambda^*} \frac{\rho(c_+) - \rho(c_-)}{\sqrt{c^2-x^2}},$$

在激波外侧(即 $x \geq c$ 时)

$$\delta'(x) = \frac{2Kx}{\lambda^*} \int_x^R \frac{\rho'(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr.$$

特别地,干涉条纹移动的导数从激波内侧临近于激波时

$$\delta'(x) \sim \frac{K\sqrt{2c}}{\lambda^*} \frac{\rho(c_+) - \rho(c_-)}{\sqrt{c-x}}.$$

结论 3 若干干涉条纹移动曲线 $\delta(x)$ 除一个尖点 c 外是光滑的, $\lim_{x \rightarrow c} \delta'(x)$ 存在, 当 $x \rightarrow c_-$ 时 $\delta'(x) \sim L/\sqrt{c-x}$, 则流场于截面 $I-I$ 上的圆环 $r=c$ 处出现激波, 在激波两侧密度的跳跃值

$$\rho(c_-) - \rho(c_+) = -\frac{\lambda^* L}{K\sqrt{2c}}, \quad (9)$$

并且在激波内侧

$$\rho(r) = \rho_0 - \frac{\lambda^*}{\pi K} \int_r^R \frac{\delta'(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx. \quad (10)$$

在文献[1]中 Bennet 等曾直接就方程(1)进行讨论, 也得到与本文结论部分相同的结果。

容易看出, 上述理论分析适用于含多个激波的情形。

三、数值计算

设想只有一个激波。据(7)式, 求流场中截截面 $I-I$ 上各点处的密度, 可归化为计算一个含干涉条纹移动的导数 $\delta'(x)$ 的广义不定积分

$$\int_r^R \frac{\delta'(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx.$$

将 $[0, R]$ N 等分, 分点依次为

$$c_0 = x_W < x_{W+1} < \dots < x_V = c < x_{V+1} < \dots < x_N = R.$$

记

$$h = x_{k+1} - x_k,$$

$$\delta_k = \delta(x_k).$$

据第二节结论 2, 干涉条纹移动的导数 $\delta'(x)$ 从激波内侧趋于激波时以 $1/\sqrt{c-x}$ 的量级趋于无穷。所以, 在激波内侧用多项式及根式项 $\sqrt{c^2 - x^2}$ 来分段拟合干涉条纹移动 $\delta(x)$ 。在 $[x_{V-2}, c]$ 及 $[x_{V-1}, c]$ 上, 取

$$P_{V-2}(x) = P_{V-1}(x) = a + bx + cx^2 + l\sqrt{c^2 - x^2}.$$

拟合 $\delta(x)$, 令

$$P_{V-2}(x_k) = P_{V-1}(x_k) = \delta_k \quad (k = V-3, V-2, V-1, V),$$

可定出

$$l = \frac{1}{Dh} \{-\delta_V + 3\delta_{V-1} - 3\delta_{V-2} + \delta_{V-3}\} \quad (11)$$

以及系数 a, b, c , 其中

$$D = 3\sqrt{2V-1} - 3\sqrt{4V-4} + \sqrt{6V-9}. \quad (12)$$

在 $[x_j, x_{j+1}]$ ($j = W+1, W+2, \dots, V-3$) 上取

$$P_j(x) = a_j + b_j x + c_j x^2 + d_j x^3 + l\sqrt{c^2 - x^2},$$

$$P_j(x_k) = \delta_k \quad (k = j-1, j, j+1, j+2);$$

在 $[x_W, x_{W+1}]$ 上, 当 $W=0$ 时取

$$P_0(x) = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3 + l\sqrt{c^2 - x^2},$$

$$P_0(x_k) = \delta_k \quad (k = 0, 1, 2),$$

$$P'_0(0) = 0;$$

当 $W \geq 1$ 时取

$$P_W(x) = a_W + b_W x + c_W x^2 + l\sqrt{c^2 - x^2},$$

$$P_W(x_k) = \delta_k \quad (k = W, W+1, W+2),$$

即可定出系数 a_j, b_j, c_j, d_j 。

在激波外侧用多项式来分段拟合干涉条纹移动 $\delta(x)$ 。在 $[c, x_{V+1}]$ 上取

$$P_V(x) = a_V + b_V x + c_V x^2,$$

$$P_V(x_k) = \delta_k \quad (k = V, V+1, V+2);$$

在 $[x_j, x_{j+1}]$ ($j = V+1, V+2, \dots, N-2$) 上取

$$P_j(x) = a_j + b_j x + c_j x^2 + d_j x^3,$$

$$P_j(x_k) = \delta_k \quad (k = j-1, j, j+1, j+2);$$

在 $[x_{N-1}, R]$ 上取

$$P_{N-1}(x) = a_{N-1} + b_{N-1} x + c_{N-1} x^2,$$

$$P_{N-1}(x_k) = \delta_k \quad (k = N-2, N-1),$$

$$P_{N-1}(R) = 0,$$

又可定出系数 a_j, b_j, c_j, d_j 。

据第二节结论 3 即得激波两侧密度跳跃值的近似公式

$$\rho(c_-) - \rho(c_+) = \frac{\lambda^* l}{2K}, \quad (13)$$

其中 l 由 (11)、(12) 式确定。再据第二节结论 3, 将如上确定的 $P'_k(x)$ 代替

$$\rho(r_j) = \rho_0 - \frac{\lambda^*}{\pi K} \int_{r_j}^R \frac{\delta'(x)}{\sqrt{x^2 - r_j^2}} dx = \rho_0 - \frac{\lambda^*}{\pi K} \sum_{k=j}^{N-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{\delta'(x)}{\sqrt{x^2 - r_j^2}} dx$$

中之 $\delta'(x)$ 即得

$$\rho(r_j) = \rho_0 - \frac{\lambda^*}{\pi K} \sum_{k=j}^{N-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{P'_k(x)}{\sqrt{x^2 - r_j^2}} dx。$$

算出各积分, 归并整理后即得截面 $I-I$ 上各点 r_j 处的密度值的近似值

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}(r_W) &= \rho_0 + \frac{1}{R} \sum_{k=W}^{N-1} a_{W,k} \delta_k, \\ \bar{\rho}(r_j) &= \rho_0 + \frac{1}{R} \sum_{k=j-1}^{N-1} a_{j,k} \delta_k \\ (j &= W+1, W+2, \dots, V-2, V+1, V+2, \dots, N-1), \\ \bar{\rho}(r_{V-1}) &= \rho_0 + \frac{1}{R} \sum_{k=V-3}^{N-1} a_{V-1,k} \delta_k, \\ \bar{\rho}(r_V) &= \rho_0 + \frac{1}{R} \sum_{k=V}^{N-1} a_{V,k} \delta_k. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

我们将在另文中给出全部变换系数 $a_{j,k}$ 的公式, 它们只与 N 、 V 、 W 有关, 即由分点总数、激波位置(激波位置在干涉图上是很清晰的)、抛射体截面半径完全确定。

四、误差估计

根据第二节结论 2, 干涉条纹移动 $\delta(x)$ 必是如下形状的函数

$$\delta(x) = \begin{cases} f(x) & (\text{当 } c \leq x \leq R \text{ 时}), \\ f(x) + L\sqrt{c^2 - x^2} & (\text{当 } c_0 \leq x \leq c \text{ 时}), \end{cases}$$

其中

$$f(x) = -\frac{2K}{\lambda^*} \int_x^R \rho'(r) \sqrt{r^2 - x^2} dr,$$

$$L = -\frac{2K}{\lambda^*} [\rho(c_+) - \rho(c_-)].$$

假设 $f'(x)$ 在 $[c_0, R]$ 上连续且 $f''(x)$ 分段连续。我们来讨论第三节给出的数值解法的误差。

$$\text{记 } R_k(x) = \delta(x) - P_k(x) \quad (k = W, W+1, \dots, N-1),$$

$$f_i = f(x_i).$$

于是

$$\delta_i = \begin{cases} f_i & (V \leq i \leq N-1), \\ f_i + L\sqrt{c^2 - x_i^2} & (W \leq i \leq V-1). \end{cases}$$

从而

$$l = \frac{1}{Dh} \{-f_V + 3f_{V-1} - 3f_{V-2} + f_{V-3}\} + L_0.$$

所以按(11)、(12)、(13)式计算激波两侧密度跳跃值的误差

$$\Delta_0 = \frac{\lambda^*}{2K} |l - L| = \frac{\lambda^*}{2K} \frac{h}{|D|} \left| \frac{f_V - f_{V-1} - 2(f_{V-1} - f_{V-2}) + f_{V-2} - f_{V-3}}{h^2} \right|,$$

按(14)式计算密度值的误差

$$\Delta_j = |\rho(r_j) - \bar{\rho}(r_j)| = \frac{\lambda^*}{\pi K} \left| \sum_{k=j}^{N-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{R'_k(x)}{\sqrt{x^2 - r_j^2}} dx \right|.$$

因为

$$\frac{1}{|D|} = \frac{1}{|3\sqrt{2V-1} - 3\sqrt{4V-4} + \sqrt{6V-9}|} \leq M_1 \sqrt{h},$$

其中常数 M_1 仅与 c 有关, 故有

$$\Delta_0 \leq \frac{\lambda^*}{2K} M_1 |f''(\eta_1) - f''(\eta_2)| h^{\frac{3}{2}}, \quad (15)$$

其中 $x_{V-2} \leq \eta_1 \leq x_V$, $x_{V-3} \leq \eta_2 \leq x_{V-1}$ 。在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上, 由于

$$R_k(x_i) = 0 \quad (i = k, k+1),$$

必有 ξ_k : $x_k < \xi_k < x_{k+1}$, 使

$$R'_k(\xi_k) = 0.$$

于是, 当 $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ 时

$$R'_k(x) = \int_{\xi_k}^x R''_k(\xi) d\xi.$$

将上式积分中之 $R''_k(\xi)$ 换成

$$R''_k(\xi) = f''(\xi) + L(\sqrt{c^2 - \xi^2})'' - P''_k(\xi) \quad (W \leq k \leq V-1),$$

$$R''_k(\xi) = f''(\xi) - P''_k(\xi) \quad (V \leq k \leq N-1),$$

并将 $P_k''(\xi)$ 中的系数 c_k, d_k, l 代入即可得到 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的估计

$|R'_k(x)| < M_2 h$ ($k \neq V-2, V-1$); $|R'_k(x)| < M'_2 k + M''_2 h^{3/2} / \sqrt{c-x}$ ($k=V-2, V-1$);
其中常数 $M_2 \cdot M'_2$ 仅与 $R, c, \max_{c_0 < x < R} |f''(x)|$ 有关, 而 M''_2 与 M_1, c 有关。代入估计式 Δ_j 中即得

$$\Delta_j \leq \frac{\lambda^*}{\pi K} \{M_2[|\ln R| + |\ln r_j|] + M_3\} h \quad (j=W, W+1, \dots, N-1; W \geq 1), \quad (16)$$

$$\Delta_0 \leq \frac{\lambda^*}{\pi K} \{M_2[|\ln R| + |\ln h|] + M'_3\} h_0. \quad (17)$$

其中常数 M_3 与 M'_2, M''_2, c 有关, 而 M'_3 与 $M'_2, M''_2, c, \max_{c_0 < x < R} |f''(x)|$ 有关。对临近激波的点 $r_{V-3}, r_{V-2}, r_{V-1}$ 还可以估计得更精细一些

$$\Delta_{V-i} \leq \frac{\lambda^*}{\pi K} M_2 M_4 h^{\frac{3}{2}} \quad (i=1, 2, 3), \quad (18)$$

其中常数 M_4 与 c 及 M'_2, M''_2 有关。由(15)式和(18)式可见, 用本文提出的算法计算激波两侧密度的跳跃值和临近激波的密度值是比较精确的, 而这些值恰恰是人们所关心的。

附 录

按惯例, 记

$$Df(x) = \frac{d}{dx} f(x),$$

$$D^{-1}f(x) = \int_x^b f(y) dy;$$

而对 $0 < \lambda < 1$, 令

$$D^{-\lambda}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_x^b (y-x)^{\lambda-1} f(y) dy,$$

$$D^\lambda f(x) = DD^{-(1-\lambda)}f(x),$$

其中 $\Gamma(\lambda)$ 为 Γ 函数。

设 $0 \leq a < c < b$ 。函数 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上连续, c 是 $f(x)$ 的间断点; $f(b) = 0$ 。函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(b) = 0$; $g'(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上连续, 当 $x \rightarrow c_-$ 时

$$g'(x) \sim K(c-x)^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq \lambda_0.$$

于是, 下列命题成立:

命题 1 $D^{-\lambda}f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续;

命题 2 当 $c \leq x \leq b$ 时

$$DD^{-\lambda}f(x) = D^{-\lambda}Df(x),$$

当 $a \leq x < c$ 时

$$DD^{-\lambda}f(x) = D^{-\lambda}Df(x) + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \frac{f(c_+) - f(c_-)}{(c-x)^{1-\lambda}};$$

命题 3 $D^{-\lambda}D^\lambda f(x) = -f(x)$;

命题 4 (i) $DD^{-\lambda}g(x) = D^{-\lambda}Dg(x)$;

(ii) 当 $\alpha < \lambda$ 时 $D^{-\lambda}Dg(x)$ 连续, 当 $\alpha = \lambda$ 时 $D^{-\lambda}Dg(x)$ 在点 c 间断, 且

$$D^{-\lambda}Dg(c_-) - D^{-\lambda}Dg(c_+) = K\Gamma(1-\lambda).$$

命题 1 的证明 只需证明 $D^{-\lambda}f(x)$ 在点 c 连续。为此只需证明 $\Delta x \rightarrow 0_+$ 时

$$\int_{c-\Delta x}^b (y-c+\Delta x)^{\lambda-1} f(y) dy - \int_c^b (y-c)^{\lambda-1} f(y) dy \rightarrow 0.$$

令 $\eta = y + \Delta x$, 则

$$\begin{aligned} \int_{c-\Delta x}^b (y-c+\Delta x)^{\lambda-1} f(y) dy &= \int_c^{b+\Delta x} (\eta-c)^{\lambda-1} f(\eta-\Delta x) d\eta, \\ \int_{c-\Delta x}^b (y-c+\Delta x)^{\lambda-1} f(y) dy - \int_c^b (y-c)^{\lambda-1} f(y) dy \\ &= \int_b^{b+\Delta x} (\eta-c)^{\lambda-1} f(\eta-\Delta x) d\eta + \int_c^{c+\Delta x} (\eta-c)^{\lambda-1} [f(\eta-\Delta x) - f(\eta)] d\eta. \end{aligned}$$

而当 $\Delta x \rightarrow 0_+$ 时

$$\begin{aligned} \left| \int_b^{b+\Delta x} (\eta-c)^{\lambda-1} f(\eta-\Delta x) d\eta \right| &\leq \frac{(b+\Delta x-c)^\lambda - (b-c)^\lambda}{\lambda} \max_{c \leq y < b} |f(y)| \rightarrow 0, \\ \left| \int_{c+\Delta x}^b (\eta-c)^{\lambda-1} [f(\eta-\Delta x) - f(\eta)] d\eta \right| &\leq \frac{(b-c)^\lambda - (\Delta x)^\lambda}{\lambda} \max_{c+\Delta x \leq \eta < b} |f(\eta-\Delta x) - f(\eta)| \rightarrow 0, \\ \left| \int_c^{c+\Delta x} (\eta-c)^{\lambda-1} [f(\eta-\Delta x) - f(\eta)] d\eta \right| &\leq \frac{(\Delta x)^\lambda}{\lambda} \{ \max_{a \leq y < c} |f(y)| + \max_{c \leq y < b} |f(y)| \} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

这就证明了命题 1。

命题 2 的证明 当 $x \geq c$ 时

$$\begin{aligned} DD^{-\lambda} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} D \int_x^b (y-x)^{\lambda-1} f(y) dy = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} D \left\{ \frac{1}{\lambda} (y-x)^\lambda f(y) \Big|_x^b - \frac{1}{\lambda} \int_x^b (y-x)^\lambda f'(y) dy \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left\{ 0 - \frac{1}{\lambda} D \int_x^b (y-x)^\lambda f'(y) dy \right\} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_x^b (y-x)^{\lambda-1} f'(y) dy = D^{-\lambda} Df(x); \end{aligned}$$

当 $x < c$ 时, 由于

$$\begin{aligned} \int_x^b (y-x)^{\lambda-1} f(y) dy &= \int_x^c (y-x)^{\lambda-1} f(y) dy + \int_c^b (y-x)^{\lambda-1} f(y) dy = \frac{1}{\lambda} (y-x)^\lambda f(y) \Big|_x^c - \frac{1}{\lambda} \int_x^c (y-x)^\lambda f'(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} (y-x)^\lambda f(y) \Big|_c^b - \frac{1}{\lambda} \int_c^b (y-x)^\lambda f'(y) dy \\ &= \frac{1}{\lambda} (c-x)^\lambda [f(c_-) - f(c_+)] - \frac{1}{\lambda} \int_x^b (y-x)^\lambda f'(y) dy. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} DD^{-\lambda} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} D \left\{ \frac{1}{\lambda} (c-x)^\lambda [f(c_-) - f(c_+)] - \frac{1}{\lambda} \int_x^b (y-x)^\lambda f'(y) dy \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left\{ \frac{1}{(c-x)^{1-\lambda}} [f(c_+) - f(c_-)] + \frac{1}{\lambda} (y-x)^\lambda f'(y) \Big|_{y=x} + \int_x^b (y-x)^{\lambda-1} f'(y) dy \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \frac{f(c_+) - f(c_-)}{(c-x)^{1-\lambda}} + D^{-\lambda} Df(x). \end{aligned}$$

命题 3 的证明 只需就 $x < c$ 证明。依 D^λ 之定义及命题 2

$$\begin{aligned} D^{-\lambda} D^\lambda f(x) &= D^{-\lambda} DD^{-(1-\lambda)} f(x) \\ &= \frac{f(c_+) - f(c_-)}{\Gamma(\lambda) \Gamma(1-\lambda)} \int_x^c (y-x)^{\lambda-1} (c-y)^{-\lambda} dy + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_x^b (y-x)^{\lambda-1} D^{-(1-\lambda)} f'(y) dy. \end{aligned}$$

注意到

$$\int_x^c (c-y)^{-\lambda} (y-x)^{\lambda-1} dy = \Gamma(\lambda) \Gamma(1-\lambda),$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_x^b (y-x)^{\lambda-1} D^{-(1-\lambda)} f'(y) dy &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_x^b (y-x)^{\lambda-1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \int_y^b (\xi-y)^{-\lambda} f'(\xi) d\xi \right\} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda) \Gamma(1-\lambda)} \int_x^b f'(\xi) d\xi \int_x^\xi (y-x)^{\lambda-1} (\xi-y)^{-\lambda} dy \\ &= \int_x^b f'(\xi) d\xi = f(b) - f(c_+) + f(c_-) - f(x), \end{aligned}$$

即得

$$D^{-\lambda} D^\lambda f(x) = -f(x).$$

命题 4 的证明 仍然只需就 $x < c$ 证明 (i) 和 (ii)。由于 $0 < \alpha \leq \lambda < 1$, 积分

$$\int_x^c (y-x)^\lambda g'(y) dy$$

和

$$\int_x^c (y-x)^{\lambda-1} g'(y) dy$$

都有意义。于是

$$\begin{aligned} DD^{-\lambda} g(x) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} D \int_x^b (y-x)^{\lambda-1} g(y) dy = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} D \left\{ \frac{1}{\lambda} (y-x)^{\lambda} g(y) \Big|_x^b - \frac{1}{\lambda} \int_x^b (y-x)^{\lambda-1} g'(y) dy \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left\{ \frac{1}{\lambda} (y-x)^{\lambda} g'(x) \Big|_{y=x} + \int_x^c (y-x)^{\lambda-1} g'(y) dy + \int_c^b (y-x)^{\lambda-1} g'(y) dy \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_x^b (y-x)^{\lambda-1} g'(y) dy = D^{-\lambda} Dg(x). \end{aligned}$$

这就证明了 (i)。又当 $x < c$ 时,

$$\begin{aligned} D^{-\lambda} Dg(x) - D^{-\lambda} Dg(c) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left\{ \int_x^b (y-x)^{\lambda-1} g'(y) dy - \int_c^b (y-c)^{\lambda-1} g'(y) dy \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_x^c (y-x)^{\lambda-1} g'(y) dy + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_c^b [(y-x)^{\lambda-1} - (y-c)^{\lambda-1}] g'(y) dy, \end{aligned}$$

显然当 $x \rightarrow c_-$ 时

$$\left| \int_c^b [(y-x)^{\lambda-1} - (y-c)^{\lambda-1}] g'(y) dy \right| \leq \frac{|(b-x)^{\lambda-1} - (b-c)^{\lambda-1}|}{\lambda} \max_{c < y < b} |g'(y)| \rightarrow 0,$$

又因 $y \rightarrow c_-$ 时

$$|g'(y) - K(c-y)^{-\alpha}| < \varepsilon K(c-y)^{-\alpha},$$

$$\varepsilon \rightarrow 0,$$

故当 $x \rightarrow c_-$ 时

$$\left| \int_x^c (y-x)^{\lambda-1} g'(y) dy - \int_x^c (y-x)^{\lambda-1} K(c-y)^{-\alpha} dy \right| < \varepsilon K \int_x^c (y-x)^{\lambda-1} (c-y)^{-\alpha} dy \rightarrow 0.$$

但是, 当 $\alpha < \lambda$ 时

$$\left| \int_x^c (y-x)^{\lambda-1} (c-y)^{-\alpha} dy \right| < |c-x|^{\lambda-\alpha} \Gamma(\lambda) \Gamma(1-\lambda) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow c_-);$$

而当 $\alpha = \lambda$ 时

$$\int_x^c (y-x)^{\lambda-1} (c-y)^{-\lambda} dy = \Gamma(\lambda) \Gamma(1-\lambda).$$

这又证明了 (ii)。

参 考 文 献

- [1] F. D. Bennett *et al.*; *J. A.P.*, 1952, **23**, No. 4 (Apr), 453.
- [2] R. W. Ladenberg; «*Physical Measurements in Gas Dynamic and Combustion*» (Oxford University Press, 1955).
- [3] R. 柯朗, D. 希伯特; «*数学物理方法*» 卷 I (科学出版社, 1958).
- [4] R. Courant; «*Differential and Integral Calculus*» Vol. 2, (New York 1936).
- [5] 丁培柱, 潘守甫; «*吉林大学自然科学学报*» (待发表)。

The Abel transformation of Mach-Zehnder interferogram analysis supersonic encircling flow

DING PEIZHU AND PAN SHOUFU

(Institute of Atomic and Molecular Physics, Jilin University, Changchun)

(Received 2 January 1981)

Abstract

This paper deals with the Abel transformation of Mach-Zehnder interferogram analysis of supersonic airflow about cylindrical or spherical symmetric projectiles containing shock wave. We have investigated some properties of the solution with finite discontinuous points of the first kind for general Abel's integral equation; applied to the Abel transformation between interference fringe shift $\delta(x)$ and density $\rho(r)$ in Mach-Zehnder interferogram, three conclusions having clear physical meaning are obtained. 1. interference fringe shift $\delta(x)$ laying in straight line perpendicular to the symmetric axis of the interferogram of the flow field is a continuous function of x ; 2. $\delta'(x) \sim L/\sqrt{c-x}$ at $x \rightarrow c-$, if the circle $r=c$ which is in the section $I-I$ is shock wave; 3. if the interference fringe shift $\delta(x)$ is smooth except for one sharp point c and limit $\lim_{x \rightarrow c} \delta'(x)$ exists and $\delta'(x) \sim L/\sqrt{c-x}$ at $x \rightarrow c-$, the shock wave appears at circle $r=c$ in the section in the flow field, the density jump quantity at the shock wave $\Delta\rho = \lambda^* L/K \sqrt{2c}$ and the transformation from $\delta(x)$ to $\rho(r)$ is the usual Abel transformation for $r \geq c$ and for $r < c$. So that, we present a simple and accurate method of numerical calculation, this method is used for the calculation of $\rho(r)$ from $\delta(x)$ and the calculation of the density jump quantity at shock wave.