

# 用光线矩阵元表达的光学传递函数

范 滇 元

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

## 提 要

从光线矩阵元表达的衍射积分出发,导出了复杂光学系统的光学传递函数。它们是用光线矩阵元  $ABCD$  表达的, 具有较大的普遍性: 系统内允许存在折射率和增益(或损耗)二次型分布的复数类透镜介质以及透过率(或反射率)为高斯函数的高斯光阑(高斯反射镜); 观察面允许处在系统内任何位置; 光阑的位置也是任意的。

## 一、引 言

J. W. Goodman 在“傅里叶光学导论”一书<sup>[1]</sup>总结了早期对光学传递函数的研究结果, 给出了自由空间的相干光学传递函数表达式

$$H(f_x, f_y) = e^{-i\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)}, \quad (1)$$

以及衍射受限制的光学系统的传递函数

$$H(f_x, f_y) = P(\lambda d_1 f_x, \lambda d_2 f_y). \quad (2)$$

但是, 一个实际的光学系统, 特别是激光传输系统要复杂得多, 不仅包括常规的光学元件, 而且往往存在折射

率和增益(或损耗)均为二次型分布的“复数类透镜介质”, 透过率为高斯函数的“高斯光阑”以及反射率为高斯函数的“高斯反射镜”等。本文将证明, 对于这种光学系统仍然可以求得解析形式的相干光学传递函数。基本的出发点是利用光线矩阵元表达的衍射积分

$$\psi(x, y) = -\frac{i}{\lambda B} e^{ik s_0} \iint_{\sigma} F(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2B} [A(\xi^2 + \eta^2) - 2(\xi x + \eta y) + D(x^2 + y^2)]} d\xi d\eta, \quad (3)$$

其中  $F(\xi, \eta)$  是系统入射面处场函数,  $\psi(xy)$  是观察面处衍射场,  $s_0$  是沿中心轴的光程,  $ABCD$  是系统的总光线矩阵元。作者在文献[2]中已经证明, 这个衍射积分是傍轴波动方程的准确解,  $ABCD$  允许是复数。因而对上述复杂光学系统普遍适用。在这个基础上, 本文导出了用光线矩阵元表达的相干传递函数及光学传递函数, 并对它的普遍性和实际应用进行了分析和讨论。

## 二、传递函数表达式

先考虑系统内不存在有效光阑的情形。如图 2 所示, 入射面处的场振幅为  $u_1(\xi, \eta)$ , 空

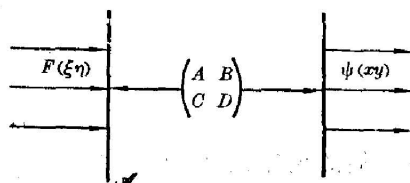


图1 用  $ABCD$  表征的光学系统

间频谱为  $G_1(f_x f_y)$ ; 观察面处的场振幅为  $u_2(xy)$ , 空间频谱为  $G_2(f_x f_y)$ 。按衍射积分式 (3),  $u_1$  和  $u_2$  的关系可表示为

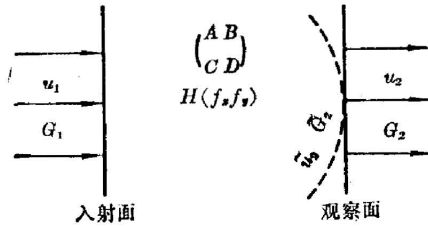


图2 光学系统的传递函数

$$u_2(xy, Z) = \iint u_1(\xi\eta) h(xy, \xi\eta) d\xi d\eta,$$

$$\text{其中: } h(xy, \xi\eta) = -\frac{i}{\lambda B} \exp \left\{ \frac{ik}{2B} [A(\xi^2 + \eta^2) - 2(\xi x + \eta y) + D(x^2 + y^2)] \right\}$$

是系统的脉冲响应。为求得传递函数, 必须把  $h$  化成空间不变形式。为此, 我们对  $h$  的指数项作配方, 得

$$h(xy, \xi\eta) = \frac{1}{i\lambda B} e^{ik \frac{c}{2A}(x^2+y^2)} \exp \left\{ \frac{ik}{2AB} [(A\xi - x)^2 + (A\eta - y)^2] \right\}. \quad (4)$$

上式表明, 一般说来  $h$  并不是空间不变的, 因而不存在直接联系  $G_1$  和  $G_2$  的相干传递函数。但是, 注意到  $e^{ik \frac{c}{2A}(x^2+y^2)}$  这一项仅仅是一个已知的二次位相项, 我们可以把它吸收到观察面场振幅  $u_2(xy)$  的表达式之内。二次位相项的并入并未改变光强的分布, 而  $h(xy, \xi\eta)$  余下的部分却成为空间不变的了。因此, 通过下述变换, 可以求得一个有效的相干传递函数:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\xi} &= A\xi, & \tilde{\eta} &= A\eta; \\ \tilde{u}_1(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) &= \frac{1}{A} u_1(\tilde{\xi}/A, \tilde{\eta}/A); \\ \tilde{u}_2(xy, Z) &= u_2(xy, Z) e^{-ik \frac{c}{2A}(x^2+y^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

变换后的场振幅  $\tilde{u}_1$ 、 $\tilde{u}_2$  满足下列关系:

$$\tilde{u}_2(xy, Z) = \iint \tilde{u}_1(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \tilde{h}(x-\tilde{\xi}, y-\tilde{\eta}) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta},$$

其中:

$$\tilde{h}(x-\tilde{\xi}, y-\tilde{\eta}) = \exp \left\{ \frac{ik}{2AB} [(x-\tilde{\xi})^2 + (y-\tilde{\eta})^2] \right\} / i\lambda AB. \quad (6)$$

$\tilde{h}$  是空间不变式,  $\tilde{u}_2$  是  $\tilde{u}_1$  和  $\tilde{h}$  的卷积, 即

$$\tilde{u}_2(xy, Z) = \tilde{u}_1(xy) * \tilde{h}(xy).$$

它们的傅里叶变换为

$$\tilde{G}_2(f_x, f_y) = \tilde{G}_1(f_x, f_y) \cdot \tilde{H}(f_x, f_y) = A G_1(Af_x, Af_y) \cdot \tilde{H}(f_x, f_y). \quad (7)$$

其中:

$$\tilde{H}(f_x, f_y) = \mathcal{L}\{\tilde{h}(x, y)\} = e^{-i\pi\lambda^2 B(f_x^2 + f_y^2)}. \quad (8)$$

这就是有效的相干传递函数。它是用光线矩阵元表达的, 普遍适用于无光阑的理想光学系统。对于自由空间, 矩阵元为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

传递函数(8)式就简化为(1)式。如果观察面处于像面位置, 按光线矩阵理论  $B=0$ 。此时  $\tilde{H}(f_x, f_y)=1$ , 这意味着入射面上的场函数不失真地传递到像面。从衍射积分(3)式看,  $B=0$  时似乎积分发散。实则不然, 不难证明, 此时被积函数变为  $\delta$  函数, 即

$$-\frac{i}{\lambda B} \exp \left\{ \frac{ik}{2B} [A(\xi^2 + \eta^2) - 2(\xi x + \eta y) + D(x^2 + y^2)] \right\} \xrightarrow{B \rightarrow 0} \delta \left( \xi - \frac{x}{A}, \eta - \frac{y}{A} \right) \quad (9)$$

因此  $\tilde{u}_2(xy) = \frac{1}{A} u_1 \left( \frac{x}{A}, \frac{y}{A} \right)$ , 即观察面上场函数是入射函数的无畸变放大(或缩小)。这和传递函数的结果一致。

有效场  $\tilde{u}_2$  和实际场  $u_2$  仅相差一个二次位相项, 所以  $\tilde{u}_2$  实质上是  $u_2$  在球面观察面上的表示式。球面曲率半径为  $R = A/C$ , 如图 2 中虚线所示。

下面进一步研究传输系统中存在光阑的情况。如图 3 所示, 光阑前、后面都有光学元件, 相应的光线矩阵分别为  $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$ , 总矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_2 + C_1 B_2 & B_1 A_2 + D_1 B_2 \\ A_1 C_2 + C_1 D_2 & B_1 C_2 + D_1 D_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

为求出系统的传递函数, 我们先导出脉冲响应的表达式。从  $\sigma_1$  面到  $\sigma_2$  面的脉冲响应为

$$h_{12}(\xi\eta, x_2 y_2) = \frac{1}{i\lambda B_1} \exp \left\{ \frac{ik}{2B_1} [A_1(\xi^2 + \eta^2) - 2(\xi x_2 + \eta y_2) + D_1(x_2^2 + y_2^2)] \right\}$$

从  $\sigma_2$  面到  $\sigma_3$  面之间的脉冲响应为

$$h_{23}(x_2 y_2, xy) = \frac{1}{i\lambda B_2} \exp \left\{ \frac{ik}{2B_2} [A_2(x_2^2 + y_2^2) - 2(x_2 x + y_2 y) + D_2(x^2 + y^2)] \right\}$$

若  $\sigma_2$  面上的光瞳函数为  $P(x_2, y_2)$ , 则总的脉冲响应为

$$h_{13}(\xi\eta, xy) = \iint_{\sigma_2} P(x_2, y_2) h_{12}(\xi\eta, x_2 y_2) \cdot h_{23}(x_2 y_2, xy) dx_2 dy_2 \quad (11)$$

对应的场振幅之间的关系为

$$u_3(x, y) = \iint_{\sigma_1} u_1(\xi, \eta) \cdot h_{13}(\xi\eta, xy) d\xi d\eta \quad (12)$$

为了把  $h_{13}$  变换成空间不变形式, 我们将其中包含的三个二次位相项分别吸收到  $u_1$ 、 $u_2$  及  $P(x_2, y_2)$  中去, 得

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_1(\xi, \eta) &= u_1(\xi, \eta) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \frac{A_1}{B_1} (\xi^2 + \eta^2) \right\}, \\ \tilde{u}_2(x, y) &= u_2(x, y) \exp \left\{ -i \frac{k}{2} \frac{D_2}{B_2} (x^2 + y^2) \right\}, \\ \tilde{P}(x_2, y_2) &= P(x_2, y_2) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \left( \frac{D_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} \right) (x_2^2 + y_2^2) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

同时, 引入符号  $M = -B_2/B_1$ , 并作下列变数变换:

$$\tilde{\xi} = M\xi, \quad \tilde{\eta} = M\eta, \quad \tilde{x}_2 = x_2/\lambda B_2, \quad \tilde{y}_2 = y_2/\lambda B_2.$$

则(12)式变换为

$$\tilde{u}_3(xy) = \iint_{\sigma_1} \frac{1}{M} \tilde{u}_1(\tilde{\xi}/M, \tilde{\eta}/M) \tilde{h}_{13}(x - \tilde{\xi}, y - \tilde{\eta}) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \quad (14)$$

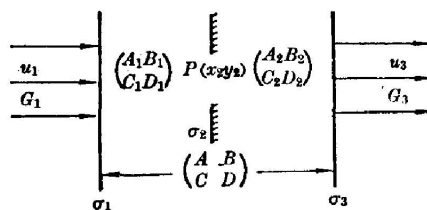


图 3 有光阑情况下的传递函数

其中

$$\tilde{h}_{13}(x-\tilde{\xi}, y-\tilde{\eta}) = \iint_{\sigma_2} \tilde{P}(\lambda B_2 \tilde{x}_2, \lambda B_2 \tilde{y}_2) e^{-i2\pi[(x-\tilde{\xi})\tilde{x}_2 + (y-\tilde{\eta})\tilde{y}_2]} d\tilde{x}_2 d\tilde{y}_2 \quad (15)$$

$\tilde{h}_{13}$  具有空间不变形式。对(14)式作傅里叶变换, 得到频谱函数之间的关系式为

$$\tilde{G}_3(f_x, f_y) = M \tilde{G}_1(Mf_x, Mf_y) \cdot \tilde{H}(f_x, f_y), \quad (16)$$

式中的相干传递函数  $\tilde{H}$  是用光线矩阵元表达的, 即

$$\tilde{H}(f_x, f_y) = \tilde{P}(-\lambda B_2 f_x, -\lambda B_2 f_y) = P(-\lambda B_2 f_x, -\lambda B_2 f_y) e^{-i\pi \lambda M B (f_x^2 + f_y^2)}. \quad (17)$$

(17)式推广了 Goodman<sup>[4]</sup> 给出的结果, 普遍适用于包含单个有效光阑的复杂光学系统。它的普遍性在第三部分中再进行讨论, 这里仅对单透镜系统作一验算。此时光阑和透镜重合。若入射面  $\sigma_1$  和透镜相距  $d_0$ , 观察面  $\sigma_3$  距离透镜  $d_i$ , 且为  $\sigma_1$  的共轭像面, 那么存在下列关系,  $1/d_0 + 1/d_i = 1/f$ 。相应的光线矩阵分别为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & d_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-d_i/f & d_i \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-d_i/f & d_0+d_i-d_0d_i/f \\ -1/f & 1-d_0/f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-d_i/f & 0 \\ -1/f & 1-d_0/f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以,  $B=0$ ,  $B_2=d_i$ 。代入(17)式, 得

$$\tilde{H}(f_x, f_y) = P(-\lambda d_i f_x, -\lambda d_i f_y),$$

和(2)式完全一致。

对于非相干照明系统, 我们也能够导出一个用光线矩阵元表达的光学传递函数。按定义, 光学传递函数表达式为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f_x, f_y) &= \iint_{\sigma_2} |\tilde{h}_{13}(x, y)|^2 e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy / \iint_{\sigma_2} |\tilde{h}_{13}(x, y)|^2 dx dy \\ &= \iint \tilde{H}\left(\xi' + \frac{f_x}{2}, \eta' + \frac{f_y}{2}\right) \cdot \tilde{H}^*\left(\xi' - \frac{f_x}{2}, \eta' - \frac{f_y}{2}\right) d\xi' d\eta' / \\ &\quad \iint |H(\xi', \eta')|^2 d\xi' d\eta'. \end{aligned} \quad (18)$$

将相干传递函数  $\tilde{H}$  的表达式(17)代入上式, 得

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f_x, f_y) &= \frac{\iint P\left(\xi' - \frac{\lambda B_2 f_x}{2}, \eta' - \frac{\lambda B_2 f_y}{2}\right) \cdot P^*\left(\xi' + \frac{\lambda B_2 f_x}{2}, \eta' + \frac{\lambda B_2 f_y}{2}\right) \cdot e^{-i2\pi B/B_1 \cdot (f_x \xi' + f_y \eta')} d\xi' d\eta'}{\iint |P(\xi', \eta')|^2 d\xi' d\eta'}. \end{aligned} \quad (19)$$

若系统存在像差, 上面的公式需作修正。为此, 定义光阑平面上的象差函数为  $e^{ikW(x, y)}$ , 并引入广义光瞳函数

$$\mathcal{P}(x, y) = P(x, y) e^{ikW(x, y)}, \quad (20)$$

$W(x, y)$  是光阑处实际波面和理想参考球面之间的波像差。参考球面是以傍轴条件下的高斯像点为球心。重复前面的推导, 不难得到有像差情况下的相干传递函数和光学传递函数为

$$\begin{aligned} \tilde{H}(f_x, f_y) &= P(-\lambda B_2 f_x, -\lambda B_2 f_y) e^{ikW(-\lambda B_2 f_x, -\lambda B_2 f_y) - i\pi\lambda MB(f_x^2 + f_y^2)}, \\ \mathcal{H}(f_x, f_y) &= \frac{\iint P\left(\xi - \frac{\lambda B_2 f_x}{2}, \eta - \frac{\lambda B_2 f_y}{2}\right) P\left(\xi + \frac{\lambda B_2 f_x}{2}, \eta + \frac{\lambda B_2 f_y}{2}\right) \cdot e^{-i2\pi B/B_1(f_x \xi + f_y \eta) + ikV(\xi, \eta, f_x, f_y)} d\xi d\eta}{\iint |P(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta}, \end{aligned} \quad (21)$$

式中  $V$  是波差差分函数, 即

$$V(\xi, \eta, f_x, f_y) = W\left(\xi - \frac{\lambda B_2 f_x}{2}, \eta - \frac{\lambda B_2 f_y}{2}\right) - W\left(\xi + \frac{\lambda B_2 f_x}{2}, \eta + \frac{\lambda B_2 f_y}{2}\right). \quad (22)$$

### 三、对结果的讨论

如前所述, 用光线矩阵元表达的传递函数普遍适用于包含单个有效光阑的复杂光学系统。它的普遍性主要体现于下列几方面:

#### 1. 观察面可处在系统中任何位置

由于衍射积分(3)对入射面和观察面的位置没有限制, 所以由此导出的传递函数表达式适用于任何位置的观察面。这个性质十分便于研究聚焦误差的影响。

当观察面处于像面位置时, 根据光线矩阵理论  $B=0$ , 此时(17)式化为  $\tilde{H}(f_x, f_y) = P(-\lambda B_2 f_x, -\lambda B_2 f_y)$ 。当观察面离焦时  $B \neq 0$ , 它所引起的波像差由光瞳函数  $P$  的变换式(13)确定, 即

$$W(x, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{D_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} \right) (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \frac{B}{B_1 B_2} (x^2 + y^2). \quad (23)$$

这是用光线矩阵元表达的离焦波像差函数。对于单透镜构成的光学系统,  $B_1 = d_0$ ,  $B_2 = d_i$ ,  $B = d_0 + d_i - d_0 d_i / f$ , 所以(23)式化为  $W(x, y) = \frac{1}{2} (1/d_0 + 1/d_i - 1/f) (x^2 + y^2)$ , 这是熟知的结果。离焦对传递函数的影响由式(17)和(19)中的指数项描述。

#### 2. 光阑的位置是任意的

在导出传递函数的过程中对光阑位置未加任何限制, 不一定要和透镜重合, 也不一定是系统的出射光瞳, 因而可方便地用来研究光阑位置对系统频率特性的影响。光阑移动时, 系统的总光线矩阵元  $B$  不变, 但光阑前后部分的光线矩阵元  $B_1$ 、 $B_2$  发生变化。由(17)式可知, 相干传递函数的截止频率将随之改变, 同时在通带内的位相发生畸变。高功率激光系统中常用的真空空间滤波器就可用上述方法分析。

#### 3. 允许存在某些透过率不均匀的元件

传输系统内除常规光学元件外, 也允许存在增益(或损耗)二次型分布的介质、透过率为高斯函数的高斯光阑, 反射率为高斯函数的高斯反射镜等。文献[2]已经证明, 衍射积分(3)式仍然适用, 因而传递函数的表达式(17)、(19)式亦适用。此时矩阵元  $ABCD$  为复数, 它将显著改变系统的频率特性。例如, 相距为  $d_0 + d_i$  的入射面

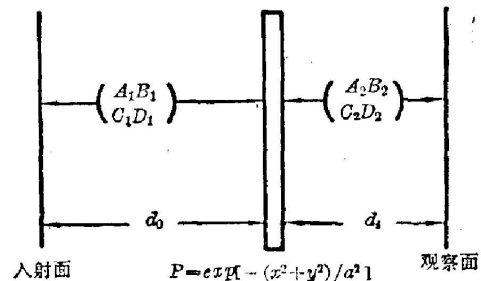


图4 高斯光阑对传递函数的影响

此时矩阵元  $ABCD$  为复数, 它将显著改变系统的频率特性。例如, 相距为  $d_0 + d_i$  的入射面

和观察面之间若为自由空间,传递函数为

$$H(f_x, f_y) = e^{-i\pi\lambda(d_0+d_i)(f_x^2+f_y^2)}。$$

若在  $d_0$  处插入一高斯光阑,如图 4 所示,则光瞳函数为  $P(x, y) = \exp[-(x^2+y^2)/a^2]$ , 其中  $a$  是正实数。高斯光阑本身的光线矩阵为<sup>[2]</sup>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix}, \quad F = ik a^2/2。$$

所以系统的光线矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-d_i/F & d_i \\ -1/F & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-d_i/F & d_0+d_i-\frac{d_0d_i}{F} \\ -1/F & 1-d_0/F \end{pmatrix}。$$

代入(17)式,得

$$H(f_x, f_y) = e^{-\frac{2\lambda^2 d_i}{a^2}(f_x^2+f_y^2)} \cdot e^{i\pi\lambda \frac{d_i}{d_0}(d_0+d_i)(f_x^2+f_y^2)}。$$

可见,高斯光阑的引入使通带变窄,相位畸变。

最后,我们认为用光线矩阵元表达的传递函数也为光学系统的综合提供了方便。

### 参 考 文 献

- [1] J. W. Goodman 著,詹达三译;《傅里叶光学导论》(科学出版社,1976), § 3~7。  
 [2] 范滇元;《激光》, 1980, 7, No. 8 (Aug), 26。

## Optical transfer function in terms of ray matrix elements

FAN DIANYUAN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 7 January, 1981)

### Abstract

Starting from the diffraction integration in terms of ray matrix elements, the optical transfer functions have been derived for complicated optical system. They are also represented by the ray matrix elements and have the following generality: All are permitted in the system that there are complex lenslike media with quadratic index and gain(or loss) and Gaussian aperture (or Gaussian mirror) with Gaussian transmissivity (or reflectivity); the observation plane can be located at any plane; the location of aperture can be arbitrary.