第1卷 第4期
1981年7月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 1, No. 4
July, 1981

介质波导并矢格林函数的本征模展开式

范 俊 清
(中国科学院长春物理研究所)

提 要

本文对于任意形状阶梯折射率光波导和任意缓变折射率光波导，利用算符理论方法，推导出介质波导的并矢格林函数本征模展开式的通用表达式。得到的电型并矢格林函数表达式由包括九个并矢分量的本征模展开式和一个奇异项组成。根据这个表达式，只要给定介质波导的本征模，就可以得到该波导的并矢格林函数。

一、引 言

并矢格林函数在微波理论中早已有广泛应用[1~3]。近十年来，伴随微波、遥感、纤维光学和集成光学的发展，并矢格林函数的理论和应用也得到进一步的发展[4~7]。但是，目前有关波导并矢格林函数的工作大部分是针对微波波导的，有关介质波导的工作报导还很少。特别是，当介质波导具有渐变折射率分布时，目前还没有可用的结果。Felsen[8]和林为干[9]都曾指出需要进一步发展并矢格林函数的理论和应用。Felsen 认为，用并矢格林函数等工具处理任意形状和任意折射率分布介质波导的激励问题是有意义的，也是可能的。

要解决 Felsen 提出的课题，首先必须求得任意介质光波导的并矢格林函数。本文在介质光波导具有阶梯折射率分布或缓变型渐变折射率分布的假定下，求得了并矢格林函数本征模展开式的通用表达式，其特征与 Tai[3]对金属波导得到的完整解一致。与已有工作[3,4]使用的方法不同，我们把并矢格林函数分成纵横两部分，先用算符理论方法求得其横向部分，然后利用纵横两部分的关系推得纵向部分，并且在推导中只引用对波导横截面积分的通常正交归一化条件[10]，回避了引进对全空间积分的正交条件[3]。本文的结果适用于纤维光学和集成光学中的大部分波导。

二、波导算符及其谱表示

设介质光波导是由各向同性、非磁性、无损耗材料构成的，波导轴与坐标系的 z 轴重合，波导的折射率分布记为 $n=n(x, y)$。假定 $n(x, y)$ 是定义于区域($-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$)上的如下任何一种函数

(1) n 为逐段(片)常数型阶梯函数:

$$n(x, y)=\begin{cases} n_1 & (\text{当}(x, y)\text{在区域}\ \Omega\ \text{内}), \\ n_2 & (\text{当}(x, y)\text{在区域}\ \Omega\ \text{外}), \end{cases}$$

收稿日期: 1980年9月14日

式中 Ω 代表 xy 平面中任意形状的有界域(波导芯), n_1 和 n_2 是常数且 $n_1>n_2$。

(2) n 为逐段二次连续可微的缓变函数,在坐标原点 $n=n(0, 0)$ 取最大值,随着 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 的增大 $n(x, y)$ 单调减小(未必圆对称),且当 $r\to\infty$ 时 $n(x, y)\to n_c$, n_c 是常数。缓变指 n 的变化很平缓以致可认为 $\nabla n^2\approx 0$。

上面提到的 n_2、n_c 通常代表波导包层的折射率,包层可以是空气,也可以是其他介质。许多波导的折射率分布可归类为上述两种形式之一。例如,对称平板波导、矩形波导、圆形和椭圆形阶梯折射率光纤[10~12]属于第一类,缓变折射率光纤[12]属于第二类。以下假定 n 是上述任何一种函数。但要指出,以下的论述对非对称平板波导[10]、多层介质膜平板波导[13]以及任意渐变折射率波导用阶梯折射率近似[12]的情形也是成立的(因其本征模谱与下文叙述的相同)。

无源介质光波导中的电矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁矢量 $\boldsymbol{H}$ 满足以下 Helmholtz 方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+n^2k_0^2\boldsymbol{E}=0, \tag{1}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H}+n^2k_0^2\boldsymbol{H}=0, \tag{2}$$

式中 $k_0=\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ 是真空波数, ω 是电磁场的角频率, ϵ_0 和 μ_0 分别是真空介电常数和磁导率; $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 中已略去因子 $e^{i\omega t}$, $i=\sqrt{-1}$ 是虚数单位, t 是时间变量。对 n 为缓变函数的情形,(1)式和(2)式利用了近似 $\nabla n^2\approx 0$。$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 应满足的边界条件是

$$\begin{cases}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{E})_{s^+}=(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{E})_{s^-},\\(\boldsymbol{R}\times\nabla\times\boldsymbol{E})_{s^+}=(\boldsymbol{R}\times\nabla\times\boldsymbol{E})_{s^-},\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{H})_{s^+}=(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{H})_{s^-},\\\left(\dfrac{1}{n^2}\boldsymbol{R}\times\nabla\times\boldsymbol{H}\right)_{s^+}=\left(\dfrac{1}{n^2}\boldsymbol{R}\times\nabla\times\boldsymbol{H}\right)_{s^-},\end{cases} \tag{4}$$

式中 s 表示区域 $(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,\ -\infty<z<+\infty)$ 中不同介质的界面(波导边界), s 的上标+和−分别表示从界面不同两侧趋于 s 的极限; $\boldsymbol{R}$ 表示界面 s 的外法线矢量。我们还要求 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 于 z 的无穷远处满足辐射(出射波)条件[14]。

设满足(1)式和(2)式及边界条件(3)式和(4)式的波导本征模可表示为

$$\boldsymbol{E}_\nu^{(p)}(\boldsymbol{r})=\mathscr{E}_\nu^{(p)}(x, y)e^{-ip\beta_\nu z}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{H}_\nu^{(p)}(\boldsymbol{r})=\mathscr{H}_\nu^{(p)}(x, y)e^{-ip\beta_\nu z}, \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 表示变量 (x, y, z); 下标 ν 表示模式(某些波导需用双下标表示模式,为简化符号此处仅用一个下标表示); $\mathscr{E}_\nu^{(p)}$ 和 $\mathscr{H}_\nu^{(p)}$ 分别是 $\boldsymbol{E}_\nu^{(p)}$ 和 $\mathscr{H}_\nu^{(p)}$ 的横剖面分布; 上标 (p) 可取(+)和(−),对应的指数 p 取 $+1$ 和 -1,分别表示前行模和后行模; β_ν 是本征模传播常数。

把(5)式和(6)式代入(1)式和(2)式,可得到本征模横向分量满足的本征方程

$$\hat{N}\mathscr{E}_{\nu t}=\beta_\nu^2\mathscr{E}_{\nu t}, \tag{7}$$

$$\hat{M}\mathscr{H}_{\nu t}=\beta_\nu^2\mathscr{H}_{\nu t}, \tag{8}$$

式中 $\mathscr{E}_{\nu t}=\mathscr{E}_{\nu t}^{(+)}$, $\mathscr{H}_{\nu t}=\mathscr{H}_{\nu t}^{(+)}$, 下标 t 表示矢量的横向分量; $\hat{N}$ 和 $\hat{M}$ 都表示如下形式的二阶微分算符

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+n^2k_0^2。 \tag{9}$$

但(7)式要求满足边界条件(3)式,而(8)式要求满足边界条件(4)式。也就是形式相同而

要求不同边界条件的算符我们用不同的符号表示（见文献 [14], p. 175）。(7)式和(8)式表明，$\mathscr{E}_{\nu t}(\mathscr{H}_{\nu t})$和 β_ν^2 分别是 $\hat{N}(\hat{M})$的本征函数和本征值，且 $\hat{N}$ 和 $\hat{M}$ 是与 z 无关的线性微分算符，这一性质是以下使用算符分离变量法的基础。

根据微分方程理论[15]可以推断由 (7) 和 (8) 式所确定的本征模谱存在且只有离散谱和连续谱。因此，可设波导的本征模谱已知，并按光波导理论中的模式分类法将其分成三类：导模（离散谱）、辐射模（连续谱，β_ν 为正实值）和消失模（连续谱，β_ν 为纯虚数）。它们全体构成一完备正交系，我们设它们已按 Marcuse[10]叙述的规则正交归一化。

根据本征模集合的完备性，利用模式的正交归一化条件[10]，容易验证在广义函数相等[16]意义下成立关于算符 $\hat{N}$ 的如下并矢谱表示（又称算符 $\hat{N}$ 的谱分解）

$$\overleftrightarrow{I}_t\delta(x-x')\delta(y-y')=-\frac{1}{2p}\sum_\nu\frac{|\beta_\nu|}{S_\nu\beta_\nu^*}\mathscr{E}_{\nu t}(x,\ y)[\boldsymbol{k}\times\mathscr{H}_{\nu t}^*(x',\ y')],\tag{10}$$

式中 $\overleftrightarrow{I}_t=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}$ 是二维单位并矢；$\delta(x)$代表 Dirac δ 函数；星号表示复数共轭；P 是模归一化功率；对导模和辐射模 $S_\nu\equiv1$；对消失模 $S_\nu=1$ 或 -1，由归一化条件[10]决定；求和号是对本征模的各种波型和每种波型的所有模式求和，并且对连续谱的求和理解为积分[10]。与(10)式相似，我们也容易验证关于算符 $\hat{M}$ 的并矢谱表示

$$\overleftrightarrow{I}_t\delta(x-x')\delta(y-y')=-\frac{1}{2P}\sum_\nu\frac{|\beta_\nu|}{S_\nu\beta_\nu}\mathscr{H}_{\nu t}(x,\ y)[\mathscr{E}_{\nu t}^*(x',\ y')\times\boldsymbol{k}]。\tag{11}$$

(10)式和(11)式是微波波导理论中类似结果[1]在介质波导情形的变形，它们分别等价于介质波导中任一功率有限的电磁场的横向电矢量 $\boldsymbol{E}_t$ 和横向磁矢量 $\boldsymbol{H}_t$ 可按本征模展开[10]。但要注意，这种展开与有源波导中整个电矢量 $\boldsymbol{E}$ 按本征模 $\boldsymbol{E}_\nu^{(p)}$ 展开是有区别的（见下文(45)式）。

三、介质波导的并矢格林函数

有源介质波导中的电磁场所满足的 Maxwell 方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=i\omega\epsilon_0n^2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J},\tag{12}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-i\omega\mu_0\boldsymbol{H},\tag{13}$$

式中 $\boldsymbol{J}$ 是电流密度矢量（在光波导理论中 $\boldsymbol{J}$ 多半是由激励或微扰等因素构成的某种等效电流密度）。为求解(12)式和(13)式，我们可考虑如下并矢 Maxwell 方程

$$\nabla\times\overleftrightarrow{G}_m=i\omega\epsilon_0n^2\overleftrightarrow{G}_e+\overleftrightarrow{I}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\tag{14}$$

$$\nabla\times\overleftrightarrow{G}_e=-i\omega\mu_0\overleftrightarrow{G}_m,\tag{15}$$

式中已略去因子 $e^{i\omega t}$；$\overleftrightarrow{I}=\overleftrightarrow{I}_t+\boldsymbol{kk}$ 是单位并矢（三维的）；$\overleftrightarrow{G}_e$ 和 $\overleftrightarrow{G}_m$ 分别是电型并矢格林函数和磁型并矢格林函数*；$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$。同上节一样，我们考虑的区域仍为$(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,\ -\infty<z<+\infty)$，要求 $\overleftrightarrow{G}_e$ 和 $\overleftrightarrow{G}_m$ 在无穷远处满足

* 此处定义的并矢格林函数与文献 [3] 定义的差一个因子，文献 [3] 是利用式 $\nabla\times\overleftrightarrow{G}_e=\overleftrightarrow{G}_m$ 和 $\nabla\times\overleftrightarrow{G}_m=k^2\overleftrightarrow{G}_e+\overleftrightarrow{I}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$来定义 $\overleftrightarrow{G}_e$ 和 $\overleftrightarrow{G}_m$（见文献[3]，(1)式和(2)式），其中 $k=nk_0$。

辐射条件及如下边界条件

$$\begin{cases}(\boldsymbol{R}\times\overleftrightarrow{G}_e)_{s^+}=(\boldsymbol{R}\times\overleftrightarrow{G}_e)_{s^-},\\(\boldsymbol{R}\times\nabla\times\overleftrightarrow{G}_e)_{s^+}=(\boldsymbol{R}\times\nabla\times\overleftrightarrow{G}_e)_{s^-},\end{cases}\tag{16}$$

$$\begin{cases}(\boldsymbol{R}\times\overleftrightarrow{G}_m)_{s^+}=(\boldsymbol{R}\times\overleftrightarrow{G}_m)_{s^-},\\\left(\frac{1}{n^2}\boldsymbol{R}\times\nabla\times\overleftrightarrow{G}_m\right)_{s^+}=\left(\frac{1}{n^2}\boldsymbol{R}\times\nabla\times\overleftrightarrow{G}_m\right)_{s^-}。\end{cases}\tag{17}$$

容易证明(文献[3]的(35)式和(36)式)，如果$\overleftrightarrow{G}_e$和$\overleftrightarrow{G}_m$是(14)式和(15)式的解，则(12)和式(13)式的解为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\int\overleftrightarrow{G}_e(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}',\tag{18}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\int\overleftrightarrow{G}_m(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}',\tag{19}$$

式中$d\boldsymbol{r}'=dx'\,dy'\,dz'$。

显然，若将$\overleftrightarrow{G}_e$和$\overleftrightarrow{G}_m$写成

$$\overleftrightarrow{G}_e=\boldsymbol{E}^{(x)}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{E}^{(y)}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{E}^{(z)}\boldsymbol{k},\tag{20}$$

$$\overleftrightarrow{G}_m=\boldsymbol{H}^{(x)}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{H}^{(y)}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{H}^{(z)}\boldsymbol{k},\tag{21}$$

则$\boldsymbol{E}^{(i)}$和$\boldsymbol{H}^{(i)}$恰为电流密度为$\boldsymbol{a}_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$的"源"所激励的场，此处$i=x$、$y$、$z$; $\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$。我们将$\overleftrightarrow{G}_e$和$\overleftrightarrow{G}_m$按以下方式分成纵横两部分

$$\overleftrightarrow{G}_e=\overleftrightarrow{G}_{et}+\overleftrightarrow{G}_{ez},\tag{22}$$

$$\overleftrightarrow{G}_m=\overleftrightarrow{G}_{mt}+\overleftrightarrow{G}_{mz},\tag{23}$$

式中

$$\overleftrightarrow{G}_{et}=\boldsymbol{E}_t^{(x)}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{E}_t^{(y)}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{E}_t^{(z)}\boldsymbol{k},\tag{24}$$

$$\overleftrightarrow{G}_{ez}=\boldsymbol{E}_z^{(x)}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{E}_z^{(y)}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{E}_z^{(z)}\boldsymbol{k},\tag{25}$$

$$\overleftrightarrow{G}_{mt}=\boldsymbol{H}_t^{(x)}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{H}_t^{(y)}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{H}_t^{(z)}\boldsymbol{k},\tag{26}$$

$$\overleftrightarrow{G}_{mz}=\boldsymbol{H}_z^{(x)}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{H}_z^{(y)}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{H}_z^{(z)}\boldsymbol{k},\tag{27}$$

其中下标z表示矢量的纵向分量，t仍表示横向分量。把(22)式和(23)式代入(14)式和(15)式，比较两端分量相同的项，可得到

$$\nabla_t\times\overleftrightarrow{G}_{mt}=i\omega\epsilon_0n^2\overleftrightarrow{G}_{ez}+\overleftrightarrow{I}_z\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\tag{28}$$

$$\nabla_t\times\overleftrightarrow{G}_{et}=-i\omega\mu_0\overleftrightarrow{G}_{mz},\tag{29}$$

式中$\nabla_t=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}$，$\overleftrightarrow{I}_z=\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}$。由(28)式和(29)式可知，若能先求得$\overleftrightarrow{G}_{et}$和$\overleftrightarrow{G}_{mt}$，则立即可得到$\overleftrightarrow{G}_{ez}$和$\overleftrightarrow{G}_{mz}$，从而由(22)式和(23)式得到$\overleftrightarrow{G}_e$和$\overleftrightarrow{G}_m$。以下，我们就根据这个性质去推导$\overleftrightarrow{G}_e$和$\overleftrightarrow{G}_m$。

对(14)式和(15)式作散度运算，得到

$$i\omega\epsilon_0\nabla\cdot n^2\overleftrightarrow{G}_e+\nabla\cdot\overleftrightarrow{I}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=0, \tag{30}$$

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{G}_m=0。 \tag{31}$$

注意到此二式，由(14)式和(15)式经矢量运算可推得 $\overleftrightarrow{G}_{et}$ 和 $\overleftrightarrow{G}_{mt}$ 所满足的方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\hat{N}\right)\overleftrightarrow{G}_{et}=-\left[-i\omega\mu_0\overleftrightarrow{I}_t\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')+\frac{1}{i\omega\epsilon_0}\nabla_t\left(\frac{1}{n^2}\nabla\cdot\overleftrightarrow{I}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right)\right], \tag{32}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\hat{M}\right)\overleftrightarrow{G}_{mt}=-\left[\nabla_t\times\overleftrightarrow{I}_z\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')+\boldsymbol{k}\times\overleftrightarrow{I}_t\frac{\partial}{\partial z}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\right. \tag{33}$$

式中对 Dirac δ 函数的导数指广义函数导数[14]；算符 $\hat{N}$ 和 $\hat{M}$ 对应的边界条件现在分别为(16)式和(17)式。

为求解(32)式和(33)式，我们先来求解如下两个算符方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\hat{N}\right)\overleftrightarrow{g}_e=-\overleftrightarrow{I}_t\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z'), \tag{34}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\hat{M}\right)\overleftrightarrow{g}_m=-\overleftrightarrow{I}_t\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')。 \tag{35}$$

形式地视 $\hat{N}$ 为常数，由算符分离变量法(见文献[14]，§5.3，§5.4，§5.13)，可将(34)式的解写成

$$\overleftrightarrow{g}_e(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}')=\frac{1}{2i\sqrt{\hat{N}}}e^{-i\sqrt{\hat{N}}|z-z'|}\overleftrightarrow{I}_t\delta(x-x')\delta(y-y')。 \tag{36}$$

把(10)式代入(36)式，并注意到(7)式及算符函数 $\varphi(\hat{N})$ 作用于 $\mathscr{E}_{\nu t}$ 时 $\varphi(\hat{N})\mathscr{E}_{\nu t}=\varphi(\beta_\nu^2)\mathscr{E}_{\nu t}$，可得到

$$\overleftrightarrow{g}_e(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}')=-\frac{1}{4iP}\sum_\nu\frac{1}{S_\nu|\beta_\nu|}\mathscr{E}_{\nu t}(x,\ y)\left[\boldsymbol{k}\times\mathscr{H}^*_{\nu t}(x',\ y')\right]e^{-i\beta_\nu|z-z'|}。 \tag{37}$$

类似地，利用(11)式可推得(35)式的解为

$$\overleftrightarrow{g}_m(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}')=-\frac{1}{4iP}\sum_\nu\frac{|\beta_\nu|}{S_\nu\beta_\nu^2}\mathscr{H}_{\nu t}(x,\ y)\left[\mathscr{E}^*_{\nu t}(x',\ y')\times\boldsymbol{k}\right]e^{-i\beta_\nu|z-z'|}。 \tag{38}$$

应当指出，我们推导(37)式和(38)式时没有使用边界条件，这是由于本征模是满足边界条件的，因而它们的组合构成的(37)式和(38)式必然满足边界条件。

利用(37)式把(32)式的解表示成积分形式后，应用分部积分并注意到 $i\omega\mu_0(\boldsymbol{k}\times\mathscr{H}^*_{\nu t})=\nabla_t\cdot\mathscr{E}^*_{\nu z}-i\beta^*_\nu\mathscr{E}^*_{\nu t}$ 和 $\frac{\partial}{\partial z'}e^{-i\beta_\nu|z-z'|}=i\beta_\nu[F(z-z')-F(z'-z)]e^{-i\beta_\nu|z-z'|}$，可推得

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{G}_{zt}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}')&=-i\omega\mu_0\overleftrightarrow{g}_e(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}')+\frac{1}{i\omega\epsilon_0}\int\overleftrightarrow{g}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\cdot\nabla_{t''}\left[\frac{1}{n^2}\nabla\cdot\overleftrightarrow{I}\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}')\right]d\boldsymbol{r}''\\&=-\frac{1}{4P}\sum_\nu\frac{1}{S_\nu|\beta_\nu|}\mathscr{E}_{\nu t}(x,\ y)\left[\beta^*_\nu\mathscr{E}^*_{\nu t}(x',\ y')\right.\\&\quad\left.+\beta_\nu\mathscr{E}^*_{\nu z}(x',\ y')(F(z-z')-F(z'-z)\right]e^{-i\beta_\nu|z-z'|},\end{aligned} \tag{39}$$

式中 $F(z)$ 是单位阶跃函数。

类似地，利用(38)式把(33)式的解表成积分形式后，并注意到 $\nabla_t\cdot\mathscr{E}^*_{\nu t}=-i\beta^*_\nu\mathscr{E}^*_{\nu z}$ (对缓

变折射率利用了近似 $\nabla n^2\approx 0$),可推得

$$\overleftrightarrow{G}_{mt}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\int\overleftrightarrow{g}_m(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\cdot\left[\nabla_{t''}\times\overleftrightarrow{I}_z\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}')+\boldsymbol{k}\times\overleftrightarrow{I}_t\frac{\partial}{\partial z''}\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}')\right]d\boldsymbol{r}''$$
$$=-\frac{1}{4P}\sum_\nu\frac{|\beta_\nu|}{S_\nu\beta_\nu^2}\mathscr{H}_{\nu t}(x,y)[\beta_\nu^*\mathscr{E}_{\nu z}^*(x',y')$$
$$+\beta_\nu\mathscr{E}_{\nu t}^*(x',y')(F(z-z')-F(z'-z))]e^{-i\beta_\nu|z-z'|}。\tag{40}$$

把(39)式和(40)式分别代入(28)式和(29)式,容易得到 $\overleftrightarrow{G}_{ez}$ 和 $\overleftrightarrow{G}_{mz}$ 的表达式

$$\overleftrightarrow{G}_{ez}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{4P}\sum_\nu\frac{|\beta_{\nu t}|}{S_\nu\beta_\nu^2}\mathscr{E}_{\nu z}(x,y)[\beta_\nu^*\mathscr{E}_{\nu z}^*(x',y')+\beta_\nu\mathscr{E}_{\nu t}^*(x',y')(F(z-z')$$
$$-F(z'-z))]e^{-i\beta_\nu|z-z'|}-\frac{1}{i\omega\epsilon_0 n^2}\overleftrightarrow{I}_z\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\tag{41}$$

$$\overleftrightarrow{G}_{mz}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{4P}\sum_\nu\frac{1}{S_\nu|\beta_\nu|}\mathscr{H}_{\nu z}(x,y)[\beta_\nu^*\mathscr{E}_{\nu t}^*(x',y')$$
$$+\beta_\nu\mathscr{E}_{\nu z}^*(x',y')(F(z-z')-F(z'-z))]e^{-i\beta_\nu|z-z'|}。+\tag{42}$$

为了得到 $\overleftrightarrow{G}_e$ 和 $\overleftrightarrow{G}_m$ 的表达式,我们把(39)式和(41)式代入(32)式,把(40)式和(42)式代入(23)式,然后进行归并整理,整理时利用式 $e^{-i\beta_\nu|z-z'|}=F(z-z')e^{-i\beta_\nu(z-z')}+F(z'-z)e^{i\beta_\nu(z-z')}$ 和对实数与纯虚数有 $\beta_\nu^*/\beta_\nu^2=1/\beta_\nu^*$,并利用本征模的对称性[10]和(5)式与(6)式,得到(14)式和(15)式的解为

$$\overleftrightarrow{G}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\sum_\nu\frac{1}{4PS_\nu}\left\{\boldsymbol{E}_\nu^{(+)}(\boldsymbol{r})\left[\frac{|\beta_\nu|}{\beta_\nu}\boldsymbol{E}_{\nu t}^{(+)*}(\boldsymbol{r}')+\frac{|\beta_\nu|}{\beta_\nu^*}\boldsymbol{E}_{\nu z}^{(+)*}(\boldsymbol{r}')\right]F(z-z')\right.$$
$$\left.+\boldsymbol{E}_\nu^{(-)}(\boldsymbol{r})\left[\frac{|\beta_\nu|}{\beta_\nu}\boldsymbol{E}_{\nu t}^{(-)*}(\boldsymbol{r}')+\frac{|\beta_\nu|}{\beta_\nu^*}\boldsymbol{E}_{\nu z}^{(-)*}(\boldsymbol{r}')\right]F(z'-z)\right\}$$
$$-\frac{1}{i\omega\epsilon_0 n^2}\overleftrightarrow{I}_z\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\tag{43}$$

$$\overleftrightarrow{G}_m(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\sum_\nu\frac{1}{4PS_\nu}\left\{\boldsymbol{H}_\nu^{(+)}(\boldsymbol{r})\left[\frac{|\beta_\nu|}{\beta_\nu}\boldsymbol{E}_{\nu t}^{(+)*}(\boldsymbol{r}')+\frac{|\beta_\nu|}{\beta_\nu^*}\boldsymbol{E}_{\nu z}^{(+)*}(\boldsymbol{r}')\right]F(z-z')\right.$$
$$\left.+\boldsymbol{H}_\nu^{(-)}(\boldsymbol{r})\left[\frac{|\beta_\nu|}{\beta_\nu}\boldsymbol{E}_{\nu t}^{(-)*}(\boldsymbol{r}')+\frac{|\beta_\nu|}{\beta_\nu^*}\boldsymbol{E}_{\nu z}^{(-)*}(\boldsymbol{r}')\right]F(z'-z)\right\}。\tag{44}$$

(43)式和(44)式就是我们最终得到的介质波导并矢格林函数本征模展开式的通用表达式。(43)式表明,电型并矢格林函数 $\overleftrightarrow{G}_e$ 由两部分组成:一部分是每项含有九个并矢分量的按本征模展开的和,另一部分是奇异项 $-\frac{1}{i\omega\epsilon_0 n^2}\overleftrightarrow{I}_z\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$。而由(44)式表示的磁型并矢格林函数 $\overleftrightarrow{G}_m$ 不含奇异项。$\overleftrightarrow{G}_e$ 与 $\overleftrightarrow{G}_m$ 的这种特征与 Tai[3]得到的完整解一致,也就是说(43)式和(44)式表示的解是完整的。

作为(43)式的一个应用例子,我们把(43)式代入(18)式,直接得到有源介质波导中电矢量 $\boldsymbol{E}$ 的展开式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\sum_\nu[a_\nu^{(+)}\boldsymbol{E}_\nu^{(+)}(\boldsymbol{r})+a_\nu^{(-)}\boldsymbol{E}_\nu^{(-)}(\boldsymbol{r})]-\frac{1}{i\omega\epsilon_0 n^2}\boldsymbol{J}_z(\boldsymbol{r}),\tag{45}$$

式中 $\boldsymbol{J}_z$ 是 $\boldsymbol{J}$ 在 z 方向的分量，而

$$a_\nu^{(+)}=-\frac{1}{4PS_\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z}\left[\frac{|\beta_\nu|}{\beta_\nu}\boldsymbol{E}_{\nu t}^{(+)*}(\boldsymbol{r}')+\frac{|\beta_\nu|}{\beta_\nu^*}\boldsymbol{E}_{\nu z}^{(+)*}(\boldsymbol{r}')\right]\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}', \quad (46)$$

$$a_\nu^{(-)}=-\frac{1}{4PS_\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{z}^{\infty}\left[\frac{|\beta_\nu|}{\beta_\nu}\boldsymbol{E}_{\nu t}^{(-)*}(\boldsymbol{r}')+\frac{|\beta_\nu|}{\beta_\nu^*}\boldsymbol{E}_{\nu z}^{(-)*}(\boldsymbol{r}')\right]\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'。 \quad (47)$$

把(45)～(47)式与 Collin[17] 的金属波导相应公式加以比较可以看出，两者的特征完全一致，即在有源区需在 $\boldsymbol{E}$ 的本征模展开式上附加一项源的贡献 $-\frac{1}{i\omega\epsilon_0 n^2}\boldsymbol{J}_z$。

由于我们是在 n 为第二节所述的阶梯函数或缓变函数的假定下推导出(43)式和(44)式的，因此它们适用于具有阶梯折射率的任意形状波导和具有缓变折射率分布的任意光纤。平板波导、多层介质膜平板波导、矩形波导、圆形或椭圆形阶梯折射率光纤以及缓变折射率光纤等都可以由(43)式和(44)式得到其并矢格林函数的本征模展开式。按照(43)式和(44)式，只要给定波导的本征模，就可得到相应的并矢格林函数。关于波导本征模表达式可在文献[10]～[12]中找到。当然，对某些波导来说，我们还没有推导出其全部本征模，有的甚至不能用已知函数表示。对于能求得全部本征模精确解的情形，必要时应求出其全部本征模，代入(43)式和(44)式以得到严格的解。对于不能求得本征模精确解的情形，仍然可以利用本文的结果去研究有关激励、传输、耦合等问题，在推导末尾用本征模近似解代入，也能得到一定的数值结果。

最后指出，本方法也可用于推导金属波导的并矢格林函数本征模展开式。不同点仅在于算符 $\hat{N}$ 和 $\hat{M}$ 对应的边值问题成为：在 xy 平面的有界区域上满足金属波导边界条件的问题。这时，波导只有离散谱本征模，对应的 $\overleftrightarrow{G}_e$ 和 $\overleftrightarrow{G}_m$ 的本征模展开式部分只有级数和的项，而没有连续谱积分部分。

参 考 文 献

[1] R. E. 柯林;《导波场论》(上海科学技术出版社, 1966, 中译本)。
[2] 黄宏嘉;《微波原理》(科学出版社, 1963)。
[3] C. T. Tai; *«On the Eigen-Function Expansion of Dyadic Green's Functions»*, (Univ. Michigan. Ann. Arbor. Tech. Rep., Apr. 1973)
[4] Y. Raxmat-Samii; *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1975, **MTT-23**, No. 9 (Sep), 762.
[5] C. T. Tai, P. Roxenfeld; *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1976, **MTT-24**, No. 9 (Sep), **597**.
[6] A. D. Yaghjian; *Proc. IEEE*, 1980, **68**, No. 2 (Feb), 248.
[7] V. Danniele, R. Zich *et al*; *Radio Science*, 1977, **12**, No.8, (Jul-Aug), 625.
[8] L. B. Felsen; *Opt. & Quant. Electron.*, 1979, **11**, No. 4 (Jul), 283.
[9] 林为干;《电子科学技术》, 1979, No. 8, 4.
[10] D. Marcuse; *«Theory of Dielectric Optical Waveguides»* (Academic Press, New York and London, 1974)
[11] N. S. Capany, J. J. Burke; *«Optical Waveguides»* (Academic Press, New York and London, 1972)
[12] 大越孝敬;光ファイバの基础(オーム社,1977),
[13] A. S. Belanov; *Sov. J. Q. E.*, 1977, **7**, No. 2 (Feb), 219.
[14] B. 弗里特曼;《应用数学原理与方法》(高等教育出版社, 1966, 中译本),
[15] E. C. Tichmarsh; *«Eigen Function Expansion Associated with Second-Order Differential Equations»*, Part I, Part II, (Oxford at the Clarendon Press, 1958)。
[16] M. J.莱特希尔;《富里叶分析与广义函数引论》(科学出版社, 1965, 中译本)。
[17] R. E. Collin; *Canad. J. Phys.*, 2973, **51**, No. 11 (1 Jun), 1135.

The eigen-mode expansions of dyadic Green's functions for dielectric waveguides

FAN JUNQING
(*Changchun Institute of Physics, Academia Sinica*)

(Received 14 September 1980)

Abstract

For dielectric waveguides of arbitrary profile with step-index and gradient-index, the universal expressions of eigen mode expansions of dyadic Green's functions for dielectric waveguides have been found by using the approach of operator theory. It is shown that the expression of electric-type dyadic Green's function is the sum of an eigen-mode expansion containing nine dyadic components and a singular term. From these expressions the dyadic Green's function for a dielectric waveguide can be obtained if the eigen-mode of the waveguide are given.