

# 存在位相随机起伏时胶片的全息信息容量

程 路  
(南开大学物理系)

## 提 要

对于前文<sup>[1]</sup>中从全息再现三维图象出发关于胶片的全息信息容量的推导, 加进了胶片的表面微观几何起伏量及折射率的微观起伏量, 讨论了这两种随机起伏对灰度阶数的影响。

前文<sup>[1]</sup>已从再现的三维图象出发, 推算了振幅型胶片的全息信息容量。实际胶片的片基与乳胶膜(特别在冲洗之后), 存在几何形状的微观(波长数量级)的随机起伏, 而且折射率也有微观随机起伏, 这就使再现波场附加一个随机位相起伏。

按照文献[2~4]的分析, 附有位相随机起伏的波场所造成的衍射光强分布, 等于理想波场的衍射光强分布加上一个随机散射场, 后者的统计性质随空间几乎不变。本文对一个简单的

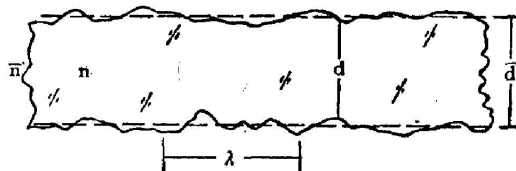


图 1

位相随机起伏模型运用概率论中的“随机行走”来推导胶片的全息信息容量。

将片基与乳胶层合起来视为一个薄板, 设厚度的统计平均值为  $\bar{d}$  (图 1), 折射率的统计平均值为  $\bar{n}$ , 则起伏量分别为  $\Delta d = d - \bar{d}$ ,  $\Delta n = n - \bar{n}$ , 其中  $d$ 、 $n$  分别为胶片各处的真实厚度和折射率。为推算简单计, 设  $\Delta d$  和  $\Delta n$  的概率密度皆在一定区间内呈均匀分布, 即:

$$P_{\Delta d}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\mathcal{D}}, & \text{当 } |x| \leq \mathcal{D}, \\ 0, & \text{当 } |x| > \mathcal{D}. \end{cases} \quad (1)$$

$$P_{\Delta n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\mathcal{N}}, & \text{当 } |x| \leq \mathcal{N}, \\ 0, & \text{当 } |x| > \mathcal{N}. \end{cases} \quad (2)$$

$\Delta d$  与  $\Delta n$  统计无关; 并且, 由于  $\Delta d$  和  $\Delta n$  的上限实际上满足下述条件:

$$\mathcal{D} \ll \lambda, \quad \mathcal{N} \bar{d} \ll \lambda, \quad (3)$$

故可认为在  $ds = \lambda^2$  的各个面元间  $\Delta d$ 、 $\Delta n$  亦分别统计独立。

## 一、 $\Delta d$ 与 $\Delta n$ 在象素上造成的光强偏差

胶片的尺寸、形状、黑粒大小及曝光条件皆取得与文献[1]一样, 只是加进了位相随机起伏。我们来求, 再现时从各个面元  $ds = \lambda^2$  出来的波在某一虚象点  $Q$  处相干迭加所造成的光强(图 2)。由于各处的透过率  $t$  在  $(1, 0)$  区间分布, 因而从  $ds$  出来的元波之振幅  $dt$  在  $(\lambda^2, 0)$

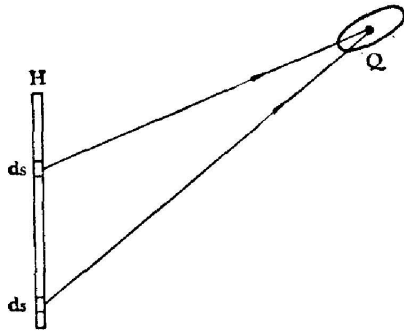


图 2

间分布。取其中值  $dt = \lambda^2/2$ 。

由于  $\mathcal{D} \ll \lambda$ ，而面元面积为  $\lambda^2$ ，所以应取在面元内  $\Delta d$  的平均值来计算厚度随机起伏对位相起伏的贡献。按照文献[2]的分析，此平均起伏量的最大值为  $\mathcal{D}^{3/2}/\lambda^{1/2}$ ，因而由它造成的位相起伏量  $\Delta\varphi_d$  的最大值为

$$\Delta\varphi_{dm} = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{n} (\mathcal{D}^{3/2}/\lambda^{1/2}) = 2\pi\bar{n} \left(\frac{\mathcal{D}}{\lambda}\right)^{3/2} \quad (4a)$$

同理，由  $\Delta n$  造成的位相起伏量之最大值为：

$$\Delta\varphi_{nm} = 2\pi\bar{d} \left(\frac{\mathcal{N}}{\lambda}\right)^{3/2} \quad (4b)$$

由于  $\Delta d$  与  $\Delta n$  无关，故它们在象点  $Q$  造成的总光强偏差等于分别造成的偏差之和。我们先来推导  $\Delta\varphi_d$  的效应。

根据文献[2]的分析， $\Delta\varphi_d$  的效应相当于如下的“随机行走”问题：步数为  $m = \pi a^2/\lambda^2$ ，步长为图 3 中小圆(等效圆)之半径  $\rho$ ；等效圆与大圆的弓形  $AA$  面积相等，大圆之半径为  $dt = \frac{\lambda^2}{2}$ 。因而

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{dt}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\Delta\varphi_{dm} - \frac{1}{2} \sin(2\Delta\varphi_{dm})} \\ &= \frac{\lambda^2}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{2\pi\bar{n} \left(\frac{\mathcal{D}}{\lambda}\right)^{3/2} - \frac{1}{2} \sin\left[4\pi\bar{n} \left(\frac{\mathcal{D}}{\lambda}\right)^{3/2}\right]} \quad (5) \end{aligned}$$

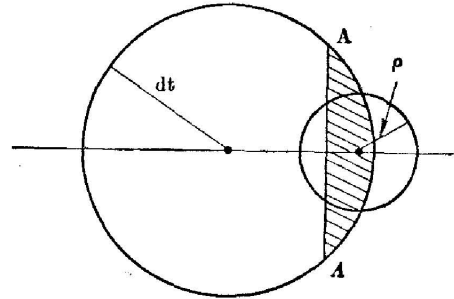


图 3

在象素  $Q$  处造成的光强起伏量的数学期望值为(见文献[1]，第二节)：

$$\varepsilon' = 2m\rho^2 = \frac{a^2\lambda^2}{2} \left\{ 2\pi\bar{n} \left(\frac{\mathcal{D}}{\lambda}\right)^{3/2} - \frac{1}{2} \sin\left[4\pi\bar{n} \left(\frac{\mathcal{D}}{\lambda}\right)^{3/2}\right] \right\} \quad (6)$$

与此同理，在推导由  $\Delta n$  造成的效应时，只须将以上推导中的  $\Delta\varphi_{dm}$  换为  $\Delta d_{nm}$ ，即(6)式中的  $\bar{n}(\mathcal{D}/\lambda)^{3/2}$  换为  $\bar{d}(\mathcal{N}/\lambda)^{3/2}$ 。从而得出  $\Delta n$  造成的光强偏差期望值为

$$\varepsilon'' = \frac{a^2\lambda^2}{2} \left\{ 2\pi\bar{d} \left(\frac{\mathcal{N}}{\lambda}\right)^{3/2} - \frac{1}{2} \sin\left[4\pi\bar{d} \left(\frac{\mathcal{N}}{\lambda}\right)^{3/2}\right] \right\} \quad (7)$$

由不等式(3)可知，

$$4\pi\bar{n} \left(\frac{\mathcal{D}}{\lambda}\right)^{3/2} < 1, \quad 4\pi\bar{d} \left(\frac{\mathcal{N}}{\lambda}\right)^{3/2} < 1,$$

因而可近似地取

$$\begin{aligned} \sin\left[4\pi\bar{n} \left(\frac{\mathcal{D}}{\lambda}\right)^{3/2}\right] &\doteq 4\pi\bar{n} \left(\frac{\mathcal{D}}{\lambda}\right)^{3/2} - \frac{1}{3!} \left[4\pi\bar{n} \left(\frac{\mathcal{D}}{\lambda}\right)^{3/2}\right]^3, \\ \sin\left[4\pi\bar{d} \left(\frac{\mathcal{N}}{\lambda}\right)^{3/2}\right] &\doteq 4\pi\bar{d} \left(\frac{\mathcal{N}}{\lambda}\right)^{3/2} - \frac{1}{3!} \left[4\pi\bar{d} \left(\frac{\mathcal{N}}{\lambda}\right)^{3/2}\right]^3. \end{aligned}$$

总的光强偏差期望值为  $\varepsilon_p = \varepsilon' + \varepsilon''$ ，即

$$\varepsilon_p = \frac{8}{3} \pi^3 a^2 \lambda^{-5/2} [\bar{n}^3 \mathcal{D}^{9/2} + \bar{d}^3 \mathcal{N}^{9/2}] \quad (8)$$

## 二、灰度阶数 $K$ 及信息容量 $I$

在文献[1]中灰度阶数  $K$  的表达式为

$$K = \frac{J}{\varepsilon}, \quad (9)$$

其中  $J$  为一个像素的信号光强,  $J = \pi^5 a^4 r^4 \alpha^2 M A^4 / 16$ 。由于  $A^2 = 4 / \pi^2 r^2 \alpha M$ , 所以

$$J = \frac{\pi a^4}{M}; \quad (10)$$

而

$$\varepsilon = \frac{1}{16} \pi^4 a^2 r^4 \alpha M A^2 = \frac{1}{4} \pi^2 a^2 r^2. \quad (11)$$

(9)式是不存在随机位相起伏时的表达式。当存在位相起伏时, 应为

$$K = \frac{J}{\varepsilon + \varepsilon_p}.$$

将(9)、(10)、(11)式代入上式, 得:

$$K = \frac{a^2}{M} / \left\{ \frac{8}{3} \pi^2 \lambda^{-5/2} [\bar{n}^3 \mathcal{D}^{9/2} + \bar{d}^3 \mathcal{N}^{9/2}] + \frac{1}{4} \pi r^2 \right\}, \quad (12)$$

其中  $M$  为全息再现的立体象素(爱里椭圆)数。信息容量为

$$I = M \log_2 K = M \log_2 \left\{ \frac{a^2 / M}{\frac{8}{3} \pi^2 \lambda^{-5/2} [\bar{n}^3 \mathcal{D}^{9/2} + \bar{d}^3 \mathcal{N}^{9/2}] + \frac{1}{4} \pi r^2} \right\}. \quad (13)$$

## 三、数据实例

表达式(13)中的  $M$  跟无位相起伏情况下的相同, 所不同者, 只是在灰度阶数的分母上多了两项, 这两项分别与胶片厚度起伏量的上限  $\mathcal{D}$  和折射率起伏量的上限  $\mathcal{N}$  有关。当

$$q_p \equiv \frac{8}{3} \pi^2 \lambda^{-5/2} [\bar{n}^3 \mathcal{D}^{9/2} + \bar{d}^3 \mathcal{N}^{9/2}] \quad (14)$$

与

$$q_0 \equiv \frac{1}{4} \pi r^2 \quad (15)$$

为同数量级时, 灰度阶数较之无位相起伏时之值下降不多。但当  $q_p \gg q_0$  时, 灰度阶数(因而信息容量)将下降很多。令

$$\frac{8}{3} \pi^2 \lambda^{-5/2} \bar{n}^3 \mathcal{D}^{9/2} = \frac{1}{4} \pi r^2,$$

得:

$$\mathcal{D} = \left[ \frac{3}{32} \frac{r^2 \lambda^{5/2}}{\pi \bar{n}^3} \right]^{2/9}; \quad (16)$$

令

$$\frac{8}{3} \pi^2 \lambda^{-5/2} \bar{d}^3 \mathcal{N}^{9/2} = \frac{1}{4} \pi r^2,$$

得:

$$\mathcal{N} = \left[ \frac{3}{32} \frac{r^2 \lambda^{5/2}}{\pi \bar{d}^3} \right]^{2/9}. \quad (17)$$

作为具体例子, 取  $\lambda=0.6328 \times 10^{-3} \text{ mm}$ ,  $r=3 \times 10^{-5} \text{ mm}$ ,  $\bar{n}=1.5$ ,  $\bar{d}=10^{-3} \text{ mm}$ 。由(16)式得  $\mathcal{D}=5.7 \times 10^{-5} \text{ mm}$ , 即, 当胶片表面的微观几何起伏量超过 0.06 微米时, 胶片的全息信息量将主要由此几何随机起伏所决定, 粒度  $r$  取得比  $3 \times 10^{-5} \text{ mm}$  再小已无大用处。 $\mathcal{D}=0.06$  微米相当于表面光洁度级次为  $\nabla 13C$ , 可见对全息胶片的表面光洁度的要求是相当高的。采用液门时对液门夹片的光洁度要求也如此。由(17)式得:  $\mathcal{N}=0.00435$ , 即, 当折射率的微观起伏量超过 0.00435 时, 胶片粒度  $r$  取得比  $3 \times 10^{-5} \text{ mm}$  再小亦无多大意义。

由(16)式得出的  $r$  与  $\mathcal{D}$  的若干对应值如表 1 所示。由(17)式得出的  $r$  与  $\mathcal{N}$  的若干对应值如表 2 所示。

表 1 ( $\lambda=0.6328$  微米,  $\bar{n}=1.5$ )

$r$ (微米)	0.01	0.02	0.03	0.04	0.06	0.10
$\mathcal{D}$ (微米)	0.035	0.048	0.057	0.065	0.078	0.097

表 2 ( $\lambda=0.6328$  微米,  $\bar{d}=1$  微米)

$r$ (微米)	0.01	0.02	0.03	0.04	0.06	0.10
$\mathcal{N}(10^{-3})$	2.67	3.63	4.35	4.94	5.92	7.43

### 参 考 文 献

- [1] 程路, 李正明, 张炳泉;《光学学报》, 1981, 1, No. 2(Mar), 143.
- [2] 程路;《物理学报》, 1978, 27, No. 6 (Nov), 651.
- [3] 程路;《物理学报》, 1979, 28, No. 4 (July), 470.
- [4] 程路, 张炳泉;《物理学报》, 1980, 29, No. 12 (Dec), 1570.

## The holographic information capacity of films in the existence of random phase fluctuations

CHENG LU

(Department of Physics, Nankai University, Tianjin)

(Received 18 April 1980)

### Abstract

The effects due to random geometrical fluctuations of the surface of films and the random fluctuations of the index of refraction of the films are considered in the deduction of the holographic information capacity of films from the point of view of reconstructed 3-dimensional images in the previous paper<sup>[1]</sup>.