

# 非相干光照明下有象差象的自由度

陶 纯 堪

(西安应用光学研究所)

## 提 要

非相干光照明下, 光学系统具有轴对称象差和非轴对称象差时导致象自由度改变, 解释了改变的原因, 推导了改变的表达式。

自从信息论的自由度概念被引入光学成象之后, 它对解释光学成象过程的本质起到了极为重要的作用。光学成象自由度, 或称结构信息, 是引用信息论中的 Котельников 抽样定理所得的结果。样点之间的间隔被该分布的上限频率所限制, 所以自由度的多少代表着该分布的精细程度, 或独立参数数目。它是比两点分辨更为深刻的概念。如果我们假设每个自由度是互相独立的, 且概率分布相同, 则物面或象面的总熵是每个自由度熵的  $N$  倍, 即

$$H = -N \int f(x) \log f(x) dx,$$

其中  $N$  为自由度数。由于自由度的重要性, 它一直为人们所关注。

近十年来相干光学系统成象自由度理论的发展经历了三个阶段。第一, G. T. di Francia<sup>[1]</sup> 引用 Slepian、Pollak、Ladau 所发展的扁长回转椭球波函数 (PSWF) 来解释相干光学系统成象自由度理论, 成功地研究了在理想无象差条件下象的本征理论。由于相干光学系统本征值  $\lambda_n$  的矩形性质, 理想象  $I_0(x)$  只有  $N_0$  个自由度, 且有下式:

$$\left\| I_0(x) - \sum_0^{N_0} c_n \lambda_n \varphi_n(x) \right\| \leq \varepsilon_0. \quad (1)$$

第二, M. Bendinelli<sup>[2]</sup> 等人研究了光学系统具有噪声时的有效自由度问题。认为  $n_0$  个自由度使此时的逼近误差达到最小, 即

$$s = \left\| I_0(x) - \sum_0^{n_0} [c_n \lambda_n \varphi_n(x) + \eta_n \varphi_n(x)] \right\| \rightarrow \min, \quad (2)$$

$n_0$  的本征值表示为

$$\lambda_{n_0} = \sigma_n^2 / \sigma_0^2, \quad (3)$$

也即是噪声和物面振幅分布的均方值的比例。第三, P. De Santis<sup>[3]</sup> 等人研究了当相干光学系统具有象差时的自由度问题, 得到了象差不影响相干光学系统成象自由度的结论。即

$$\left\| I(x) - \sum_0^{N_0} c_n \lambda_n g_n(x) \right\| \leq \varepsilon_0. \quad (4)$$

当有象差有噪声时, 只要在(2)式中把波函数  $\varphi_n(x)$  换为  $g_n(x)$  就是了, 自由度不变。

经由如上三个阶段, 至此相干光学系统成象自由度理论发展已较为完善。以下我们来讨论更为经常碰到的非相干照明下有象差光学系统成象自由度的有关问题。

### 一、非相干积分核的特点

非相干照明下,在等晕区内对强度而言是线性迭加的,即有方程:

$$I(x') = \int_A |S(x'-x)|^2 O(x) dx, \tag{5}$$

其中  $O(x)$  和  $I(x)$  为物和象的强度分布。 $|S(x)|^2$  为有象差条件下的点扩展函数。

$$|S(x'-x)|^2 = \int_{-\rho}^{\rho} \int_{-\rho}^{\rho} e^{ikW(\omega)} \exp[i\omega(x'-x)] e^{-ikW(\omega')} \exp[-i\omega'(x'-x)] d\omega d\omega',$$

$$|S^*(x-x')|^2 = \int_{-\rho}^{\rho} \int_{-\rho}^{\rho} e^{-ikW(\omega)} \exp[-i\omega(x-x')] e^{ikW(\omega')} \exp[i\omega'(x-x')] d\omega d\omega',$$

上式中  $W(\omega)$  为光学系统波象差函数,  $\omega$  为孔径坐标。比较以上二式可知  $|S^*(x-x')|^2 = |S(x-x')|^2$ , 而判别(5)式积分核是否为 Hermitian 的条件为

$$|S^*(x-x')|^2 = |S(x'-x)|^2. \tag{6}$$

在非相干条件下积分核是强度量,从而复共轭的关系反应不出,所以 Hermitian 条件转化为对称条件

$$|S(x-x')|^2 = |S(x'-x)|^2. \tag{7}$$

由此,笔者认为:非相干条件下应当区分为两种情况加以研究,当光学系统具有轴对称象差时,积分核为 Hermitian,物和象空间具有共同的正交本征函数组,用以展开物和象强度分布函数;当光学系统具有非轴对称象差时,积分核为 non-Hermitian,物和象空间不存在共同的正交本征函数组。

### 二、光学系统具有轴对称象差时成象自由度

这时积分核不单是 Hermitian 的而且是对称的,存在如下本征方程:

$$\lambda_{s,n} \varphi_{s,n}(x') = \int_A |S(x'-x)|^2 \varphi_{s,n}^{(T)}(x) dx. \tag{8}$$

此时  $|S(x)|^2$  为具有各阶轴对称象差时的点扩展函数。由积分方程理论知道,本征值  $\lambda_{s,n}$  仅取决于积分核的性质,即取决于轴对称象差的分布,且显然  $\lambda_{s,n}$  低于无象差时的  $\lambda_{n,0}$ 。

物强度分布为

$$O(x) = \sum_0^{\infty} o_n \varphi_{s,n}(x), \tag{9}$$

象强度分布为

$$I(x') = \sum_0^{\infty} o_n \lambda_{s,n} \varphi_{s,n}^{(T)}(x'). \tag{10}$$

这与无象差时的(34)式比较,由于  $\lambda_{s,n}$

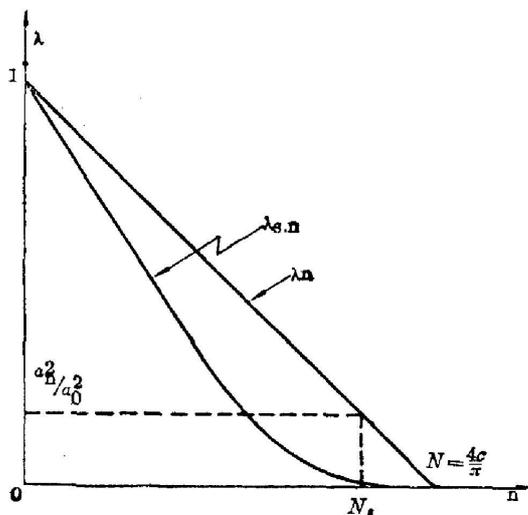


图 1

较之  $\lambda_n$  下降, 由  $\lambda_{s,n} \rightarrow 0$  来判断, 自由度已明显改变, 已经不是  $N_0$  而是  $N_s$ , 且  $N_s < N_0$ , 即满足下式:

$$\left\| I(x') - \sum_0^{N_s} o_n \lambda_{s,n} \varphi_{s,n}(x) \right\| \leq \varepsilon_0 \quad (11)$$

的最小项数已不是  $N_0$  而是  $N_s$ 。这时自由度的改变也可以类似地从后面差时的 (35) 式到 (42) 式来考察。

如果光学系统具有噪声, 每一自由度迭加噪声强度项  $N_n \varphi_{s,n}(x)$ , 则  $n$  项的部分和为

$$\sum_0^n [o_n \lambda_{s,n} \varphi_{s,n}(x') + N_n \varphi_{s,n}(x')]$$

满足下式

$$s = \left\| I(x') - \sum_0^n [o_n \lambda_{s,n} \varphi_{s,n}(x') + N_n \varphi_{s,n}(x')] \right\| \rightarrow \min \quad (12)$$

的项数就是此时的有效自由度数。设物强度和噪声强度的相关函数分别为

$$\langle O(x) O^*(x') \rangle = a_0^2 \delta(x - x'), \quad (13)$$

$$\langle N(x) N^*(x') \rangle = a_N^2 \delta(x - x'). \quad (14)$$

把 (12) 式展开并取系综平均得到

$$\lambda_{s,n} = a_N^2 / a_0^2 \quad (15)$$

由轴对称象差的分布决定  $\lambda_{s,n}$  曲线, 再考虑 (15) 式就确定了此时的有效自由度。由图 1 可知轴对称象差和噪声都使自由度降低。可见对非相干光学系统设计, 为了保持成象自由度, 应该从消象差和改进接收器的信噪比两方面入手才是有效的, 单纯消象差是无益的。

### 三、光学系统具有非轴对称象差时成象自由度

这时物和象空间没有共同的正交本征函数组展开物和象强度分布, 我们不能直接利用如前本征函数的方法去处理。为此

第一, 我们采取构成二次叠核的办法。此时积分核  $|S(x' - x)|^2$  虽然是 non-Hermitian, 我们可构成二次叠核  $U(x'_1, x'_2) = \int |S(x'_1 - x)|^2 |S(x - x'_2)|^2 dx$ , 它却是 Hermitian 的, 且存在如下本征方程:

$$\int U(x'_1, x'_2) \psi_n(x'_1) dx'_1 = \lambda_n \psi_n(x'_2). \quad (16)$$

如果令

$$\alpha_n g_n^-(x) = \int |S(x'_1 - x)|^2 \psi_n(x'_1) dx'_1, \quad (17)$$

又令

$$\alpha_n g_n^+(x) = \int |S(x - x'_2)|^2 \psi_n(x'_2) dx'_2, \quad (18)$$

以上二方程 (17) 和 (18) 式的系数显然是相等的, 为  $\alpha_n$ , 从而有

$$\alpha_n = \left[ \frac{\lambda_n}{\int g_n^+(x) g_n^-(x) dx} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

利用叠核性质<sup>[45]</sup>有

$$\alpha = (\lambda_n)^{1/2}. \quad (20)$$

可以证明  $\{\psi_n(x)\}$  构成了物方的正交归一函数组用以展开物分布,  $g_n^+(x)$  满足以

$$U^+(x_1, x_2) = \int |S(x' - x_1)|^2 |S(x_2 - x')|^2 dx'$$

为二次叠核的本征方程, 即

$$\int U^+(x_1, x_2) g_n^+(x_1) dx_1 = \lambda_n g_n^+(x_2). \quad (21)$$

对  $g_n^-(x)$  有相应公式, 不再重述。

因为  $U(x'_1, x'_2)$  是 Hermitian 的, 所以  $(U\psi_n, \psi_n) = (\psi_n, U\psi_n)$ 。利用此式容易证明(20)和(21)式。 $\{g_n^+(x)\}$ 和 $\{g_n^-(x)\}$ 都分别构成象方的正交归一函数组, 可以分别用以展开象分布。非轴对称象分布一定, 则核  $|S(x')|^2$  一定, 构成两个二次叠核  $U^+$  和  $U^-$ , 解(16)或(21)式便得  $\lambda_n$ 。由(20)式可计算得到我们最为关心的由物方到象方的方程(17)和(18)式的系数  $\alpha_n$ 。因为若物分布  $O(x) = \sum_0^\infty o_n \psi_n(x)$ , 则象分布为  $I(x') = \sum_0^\infty o_n \alpha_n g_n^+(x')$ , 所以  $\alpha_n$  正代表物方的自由度经有非轴对称象差系统之后的衰减情况。

第二, 我们也可用抽样定理来处理这种情况。因为它除了有上限频率的限制外, 对点扩展函数的性质没有别的任何限制。理想象强度分布为

$$I_0(x') = \sum_0^\infty I_0 \left( \frac{n}{2F} \right) \frac{\sin 2\pi F x' - n\pi}{2\pi F x' - n\pi}, \quad (22)$$

其中  $F$  为强度分布的上限频率。实际上只要  $N_0 = \frac{4c}{\pi}$  ( $c$  为回转椭球参量) 个自由度就可保证

$$\left\| I_0(x') - \sum_0^{N_0} I_0 \left( \frac{n}{2F} \right) \frac{\sin 2\pi F x' - n\pi}{2\pi F x' - n\pi} \right\| \leq \epsilon_0. \quad (23)$$

考虑到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi F x' - n\pi}{2\pi F x' - n\pi} \cdot \frac{\sin 2\pi F x' - n'\pi}{2\pi F x' - n'\pi} dx' = \frac{1}{2F} \delta_{n,n'}, \quad (24)$$

(23)式变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| I_0 \left( \frac{n}{2F} \right) \right|^2 \frac{1}{2F} \leq \epsilon_0, \quad (25)$$

但  $n$  阶样点处强度为

$$I_0 \left( \frac{n}{2F} \right) = \int_A \left| h \left( \frac{n}{2F} - x \right) \right|^2 O(x) dx,$$

其中  $|h(x)|^2$  为理想点扩展函数。取系综平均

$$\left\langle \left| I_0 \left( \frac{n}{2F} \right) \right|^2 \right\rangle = \int_A \int_A \left| h \left( \frac{n}{2F} - x \right) \right|^2 \left| h^* \left( \frac{n}{2F} - x' \right) \right|^2 \langle O(x) O^*(x') \rangle dx dx'.$$

设物面强度分布的自相关函数为

$$\langle O(x) O^*(x') \rangle = a_0^2 \delta(x - x'), \quad (26)$$

其中  $a_0^2$  为物面强度分布的均方值。但是

$$\left| h \left( \frac{n}{2F} - x \right) \right|^2 = \int_0^{s_0} R_0(s) e^{is \left( \frac{n}{2F} - x \right)} ds,$$

其中  $s$  为空间频率坐标, 所以有

$$\left\langle I_0\left(\frac{n}{2F}\right)^2 \right\rangle = a_0^2 \int_0^{s_0} |R_0(s)|^2 ds_0. \quad (27)$$

同理对有象差成象有如下相应公式:

$$\left\| I(x') - \sum_0^{N'} I\left(\frac{n}{2F}\right) \frac{\sin 2\pi F x' - n\pi}{2\pi F x' - n\pi} \right\| \leq \varepsilon_0, \quad (28)$$

$$\sum_{N'+1}^{\infty} \left| I\left(\frac{n}{2F}\right) \right|^2 \frac{1}{2F} \leq \varepsilon_0 \quad (29)$$

和

$$\left\langle \left| I\left(\frac{n}{2F}\right) \right|^2 \right\rangle = a_0^2 \int_0^{s_0} |R(s)|^2 ds_0. \quad (30)$$

对(25)和(29)式取系综平均之后, 认为有象差条件下需要  $N'$  个自由度才能达到与理想无象差成象有相同程度逼近, 并设  $N''$  为实际分布的零点, 自由度降低量  $\Delta_{dof} = N_0 - N'$ , 则有

$$\Delta_{dof} = \left[ \frac{\int_0^{s_0} |R_0(s)|^2 ds}{\int_0^{s_0} |R(s)|^2 ds} - 1 \right] \times [N'' - (N_0 + 1)]. \quad (31)$$

这是非相干照明下有任何类型象差光学系统成象自由度改变的表达式。在(31)式中我们最关心的是与传递函数  $R(s)$  有关的因子。式中光学成象自由度实际上是被  $|R(s)|^2$  在整个频率域的积分所限制。之所以是二次方积分是由于我们是从限制函数逼近误差来决定自由度, 因此  $R(s)$  的相位并不影响成象自由度。基于以上考虑, 有象差光学系统成象自由度的损失也和熵损失  $\int_0^{s_0} \log |R(s)|^2 ds$  角度考虑是一致的。

#### 四、有象差光学系统成象自由度改变的原因

在相干有象差光学系统条件下自由度保持不变的原因在于象差只引起相位推移, 而物方每个波函数与对应的象方的波函数仍具有相等的能量, 即有内积等式  $(\varphi_n(x), \varphi_m(x)) = (g_n(x), g_m(x))$ , 对非相干有象差光学系统却不然。设无象差条件下物强度分布为

$$O(x) = \sum_0^{\infty} o_n \varphi_n^{(T)}(x), \quad (32)$$

且有本征方程

$$\lambda_n \varphi_n(x') = \int_A |h(x' - x)|^2 \varphi_n^{(T)}(x) dx, \quad (33)$$

象强度分布为

$$I_0(x') = \sum_0^{\infty} o_n \lambda_n \varphi_n(x'). \quad (34)$$

如果光学系统有象差, 成象方程为(5)式。设

$$g'_n(x') = \int_A |S(x' - x)|^2 \varphi_n^{(T)}(x) dx, \quad (35)$$

有象差的象强度分布为

$$I(x') = \sum_0^{\infty} o_n g'_n(x'). \quad (36)$$

对(33)和(35)式两边取傅氏变换经比较得

$$G'_n(s) = \lambda_n R(s) / R_0(s) \phi_n(s), \quad (37)$$

其中  $R_0(s)$  和  $R(s)$  为无象差和有象差时的传递函数,  $\phi_n(s)$  和  $G'_n(s)$  为  $\varphi_n(x)$  和  $g'_n(x)$  的频谱。设

$$R(s) / R_0(s) = M(s) e^{i\theta(s)}, \quad (38)$$

$$g_n(x') = \frac{1}{\lambda_n} g'_n(x'), \quad (39)$$

有

$$G_n(s) = M(s) e^{i\theta(s)} \phi_n(s). \quad (40)$$

(36)式变为

$$I(x') = \sum_0^{\infty} o_n \lambda_n g_n(x'), \quad (41)$$

此时  $(G_n(s), G_m(s)) = \int_0^{s_0} |M(s)|^2 \phi_n(s) \phi_m^*(s) ds \neq (\phi_n(s), \phi_m(s))$ 。

从而由 Parseval 定理知

$$(g_n(x), g_m(x)) \neq (\varphi_n(x), \varphi_m(x)). \quad (42)$$

(42)式说明了自由度的改变。所谓用一种正交函数组去展开物方和象方的某种分布,以寻求自由度,实际上也就是把它所携带的能量划分为互相独立、互不交叉的能量元,这就是一个一个的自由度。由于光学系统的相对调制传递函数  $M(s) \neq 1$ , (42)式的等式建立不起来,在物方存在的某些自由度,在象方则可能已不复存在了。或者更具体地说,由于有象差时  $R(s)$  较之  $R_0(s)$  在幅度上越接近高频越降低,从而象的频谱的幅度越接近高频越降低,因而把它展开为傅氏级数时越是高阶分量幅度降低越大,由下式知越是高阶样点  $I\left(\frac{n}{2F}\right)$  降低越多。

$$\begin{cases} I(s) = \sum_0^{\infty} c_n e^{i s \frac{n}{2F}}, \\ c_n = \frac{1}{2F} I\left(\frac{n}{2F}\right), \end{cases} \quad (43)$$

从而导致自由度降低。

归结起来,研究非相干照明下有象差象自由度应分为轴对称象差和非轴对称象差两种情况。前者积分核为 Hermitian, 可用通常本征函数方法; 后者积分核为 non-Hermitian, 可用构成二次叠核或抽样定理方法。象差使自由度降低, 原因在于  $|M(s)|^2 \neq 1$ 。

### 参 考 文 献

- [1] G. Toraldo di Francia; *J. O. S. A.*, 1969, **59**, No. 7 (Jul), 799.
- [2] M. Bendinelli, A. Consortin *et al.*; *J. O. S. A.*, 1974, **64**, No. 11 (Nov), 1493.
- [3] P. DeSantis, C. Palma; *Opt. Acta*, 1976, **64**, No. 9 (Sep), 743.
- [4] H. Gamo; «*progreii in optics*», Vol. **3** (Amsterdam, North-Holland, 1964)
- [5] И. М. Гедьфанд, 刘亦珩译; «*线性代数学*», 115.

---

**Degrees of freedom of aberrated images under  
the illumination of incoherent light**

TAO CHUNKAN

*(Xian Institute of Applied Optics)*

(Received 19 June 1980)

**Abstract**

The degrees of freedom of imaging will change when an optical system under the illumination of incoherent light suffers from symmetrical and unsymmetrical aberrations. The reason of this change is given and the equations are derived.