

从再现三维图象论胶片的全息信息容量

程路 李正明 张炳泉
(南开大学 物理系)

提 要

从全息再现的三维图象出发, 提出一个推算全息照相信息容量的方法。信息容量为

$$I = - \sum_{j=1}^M \log P_j(K_j),$$

或当 $P_j(u) = \text{常量} = 1/K$ 时, $I = M \log K$, 其中 M 为总的立体像素数, K 为每一像素可区分的灰度阶数。 M 可从衍射算出, 它仅由底片面积决定; K 与底片上析出的黑粒密度的随机起伏有关。本文以振幅型“简化胶片”为模型, 以等步长的“随机行走”为数学近似, 对 K 进行了推算, 并由此指出在一定要求下如何选取胶片的黑粒尺寸及密度。

一、导 言

当人们说全息照相的信息容量比普通照相大得多时, 一般的理由是: 全息术把物波场的振幅和位相都记录下来, 而普通照相则只记录振幅; 或者说, 全息术能再现三维图象, 而普通照相得到的只是二维图片。然而这只是定性的说法, 尚缺乏定量分析, 特别是对缺乏全息照相信息量的分析。

F. T. S. Yu 在书^[1]中经过初步讨论, 得出全息照相的信息含量 C_h 小于普通照相之信息含量 C 的结论, 但是我们认为, Yu 的分析只涉及到底片或图象的自由度数, 并未对每个自由度上取值的阶数进行讨论(即假定每个自由度上只取 0, 1 两阶)。还有不少作者^[2~3]讨论了无噪声和有噪声情况下图象的自由度数的问题, 但也是对每个自由度上的灰度阶数缺乏讨论。然而从信息量的观点出发, 当仅仅自由度数有限而灰度可连续取值时, 信息量仍是无限大; 只有当自由度数 M 和灰度阶数 K 皆为有限时, 信息量才为有限^[7]。

Yu 在计算全息底片的自由度数时, 是从底片上可区分的 Fresnel 带的数目来获得的。他也提到: “一个全息底片的信息量之确定, 是尚待解决的困难问题。”我们认为, 既然全息术能够再现立体空间的景物, 就可以从再现的三维图象出发来推算信息量。

二、预备知识和“简化胶片”的模型

1. 信息量的定义

在信息论中关于信息量的定义可表述为^[8]: 若在进行某项实验之前, 事件 a 的事先 (a priori) 概率为 $P(a)$, 在进行实验之后, 由实验结果 b 得知 a 出现的事后 (a posteriori) 概率为 $P(a|b)$, 则此项实验所提供的信息量为

收稿日期: 1980年3月30日

$$I(a|b) = \log \frac{P(a|b)}{P(a)}. \quad (1)$$

现将此定义用于事件为图象的一种简单情况。事件 a 是由按一定顺序排列的 M 个整数所决定:

$$a: k_1, k_2, \dots, k_M, \quad (2)$$

其中 $k_j (j=1, 2, \dots, M)$ 取自然数 $1, 2, \dots, K$ 中某一值。对于不同的 j , k_j 的取值相互独立。若以 $P_j(u)$ 表示 k_j 取值为 u 的事先概率 ($u=1, 2, \dots, K$), 则图象 a 出现的事先概率为

$$P_1(a) = \prod_{j=1}^M P_j(k_j). \quad (3)$$

假定通过实验后, 确知图象 a 出现, 即 a 的事后概率 $P_2(a) = 1$, 则由(1)式可知, 此实验所提供的信息量为

$$I(a) = \log \frac{P_2(a)}{P_1(a)} = -\log \left[\prod_{j=1}^M P_j(k_j) \right] = -\sum_{j=1}^M \log P_j(k_j). \quad (4)$$

当 $P_j(u) = \text{常量} = 1/K$ 时 ($1 \leq u \leq K$), 得

$$I = M \log_2 K \quad (\text{单位: bit}), \quad (5)$$

这里称 M 为图象之象素数, K 为每一象素之灰度阶数。

2. 随机行走

一人在 XY 平面上从原点 O 出发行走 Z 步, 每步之长皆为 l , 每步的方向在 $(0, 2\pi)$ 范围内作等概率分布, 则其终点坐标 x, y 的概率密度为^[9]:

$$p(x) = \frac{1}{l\sqrt{\pi Z}} e^{-x^2/l^2 Z}, \quad p(y) = \frac{1}{l\sqrt{\pi Z}} e^{-y^2/l^2 Z}, \quad (6)$$

且 x, y 统计无关。

由(6)式推知, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的数学期望值为:

$$E(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2} p(x)p(y) dx dy = \frac{1}{2} l\sqrt{\pi Z}. \quad (7)$$

r^2 的期望值为

$$E(r^2) = E(x^2 + y^2) = E(x^2) + E(y^2) = 2E(x^2) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = Zl^2. \quad (8)$$

由于本文中的“简化胶片”跟实际胶片还有一定差异, 因而作严格的概率推算已无必要, 所以凡属如下变步长的行走问题皆用定步长行走近似代替, 即一人行走, 步长 $l_j (j=1, 2, \dots, l)$ 有时相等, 有时变大, 其中步长为 l_j 的步数为 z_j , 则用下述问题近似: 定步长 $L = (l_1 + l_l)/2$, 步数 $Z = \sum_{j=1}^l z_j$ 。

3. 简化胶片模型

为了分析简单起见, 在不失基本意义的情况下, 将全息胶片的性质简化如下:

- ① 析出银粒子(下称黑粒)为等半径的球, 半径皆为 r ;
- ② 黑粒的平均面密度 \bar{N} 正比于单位面积上的曝光量 J :

$$\bar{N} = \begin{cases} \alpha J & \left(\text{当 } J \leq \frac{1}{\pi r^2 \alpha} \right), \\ \frac{1}{\pi r^2} & \left(\text{当 } J > \frac{1}{\pi r^2 \alpha} \right). \end{cases} \quad (9)$$

当 $J=1/\pi r^2 \alpha$ 时, 单位面积全为黑粒所占, 底片黑度已达饱和, 故有不等式之限制;

③ 全息再现时振幅透过率

$$t = \begin{cases} 1 - \pi r^2 N & \left(\text{当 } N \leq \frac{1}{\pi r^2} \right), \\ 0 & \left(\text{当 } N > \frac{1}{\pi r^2} \right), \end{cases} \quad (10)$$

其中 N 为真实黑粒面密度;

④ 胶片为纯振幅型, 即厚度与折射率不随位置而变。

由统计学可知^[10], 若在面元 Δs 上黑粒数的平均值为 \bar{n} , 则黑粒数起伏量的均方根值为

$$\sigma = \sqrt{(n - \bar{n})^2} = \sqrt{\bar{n}}. \quad (11)$$

因此, 若将面积为 S 的底片分为 m 等份, 则某一面元 Δs 处的 σ 值为

$$\sigma = \sqrt{\frac{S\bar{N}}{m}}, \quad (12)$$

其中 \bar{N} 为该面元处的黑粒平均面密度。

三、全息再现三维图象的像素数 M

作为初步探讨, 本文只研究由于底片上黑粒密度起伏而导致的有限信息量, 并且暂时将光波场视为连续电磁场, 亦即, 略去参考光及携带物信息的物光本身的光子密度起伏。当光场足够强时——即射在底片单位面积上的光子数远大于黑粒密度 \bar{N} 时 (实际情况确是如此), 这种看法是成立的。

当全息再现时, 由于底片上存在不可避免的黑粒密度起伏, 所以再现的物波场乃是真实物场 (一个确定函数) 加上一个振幅随机分布的噪声场 (随机变量的函数), 且后者与前者统计无关。作者之一在文献 [11, 12] 中曾阐明, 这样的合成场强乃是分别求和, 即无起伏下的理想光强分布乘以小于 1 的因子, 再加上一个噪声场强, 后者的期望值几乎不随位置而变。

欲求再现的立体图象的像素数 M , 须先求出由于底片面积有限而因衍射所造成的可分辨体元的大小, 其概念跟平面图象上的可分辨面元——爱里斑类似, 不过是一个立体“爱里斑” (下称爱里椭球)。根据以上所述, 此椭球之几何尺寸不因存在噪声而变, 可按无噪声的全息再现求出。这相当于一个纯衍射问题: 设全息底片是一圆片, 半径为 a , 光波长为 λ , 在极坐标位置为 ρ, θ 处 (图 1) 爱里椭球之体积可按一个屏 Σ 上开一个半径为 a 的圆孔, 从孔域露出一个以 $Q(\rho, \theta)$ 为中心的球面波 W , 而求 Q 点附近的衍射强度分布。为描写此分布, 以 Q 为原点作一直角坐标系 x, y, z , z 轴与 OQ 一致, x 轴在 OQ 与光轴 OO 所决定的平面内, y 轴垂直于该平面。

从屏上圆孔露出的以 Q 为中心的球面波一般相当于从一椭圆开孔露出, 该椭圆沿 y 方向的半轴长为 a , 沿 x 方向半轴长为 $b = a \cos \theta$ 。取一组简约坐标 u, v, w 如下:

$$u = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ab}{\rho^2} z = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a^2 \cos \theta}{\rho^2} z, \quad v = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{\rho} x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a \cos \theta}{\rho} x, \\ w = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{\rho} y.$$

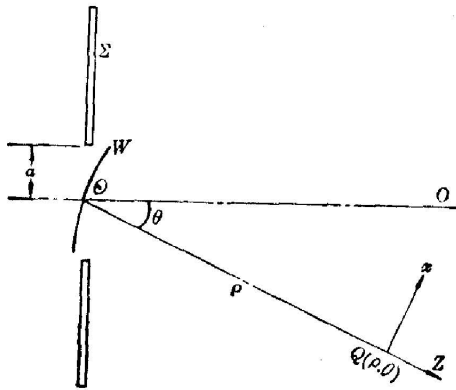


图 1

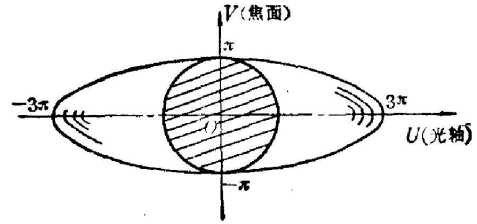


图 2

对于 Q 点在光轴上 ($\theta=0$) 的情况, Wolf^[13] 已经求出了 Q 点附近的三维光强分布, 并绘出等强度线。由等强度线看出, 立体爱里斑接近于一个回转椭球 (图 2), 其长短半轴分别约为 3π 和 π , 即 $u = \pm 3\pi$, $v = w = \pm \pi$ 。当 $\theta \neq 0$ 时, 立体爱里斑是一般椭球。在上述简约坐标下, 可认为爱里椭球的三个半轴仍由 $u = \pm 3\pi$, $v = w = \pm \pi$ 所决定, 即椭球的三个半轴分别为

$$\Delta z = \frac{3}{2} \frac{\lambda \rho^2}{a^2 \cos \theta}, \quad \Delta x = \frac{1}{2} \frac{\lambda \rho}{a \cos \theta}, \quad \Delta y = \frac{1}{2} \frac{\lambda \rho}{a}.$$

从而求出椭球之体积为:

$$\Delta V(\rho, \theta) = \frac{\pi}{2 \cos^2 \theta} \lambda^3 \left(\frac{\rho}{a}\right)^4. \quad (13)$$

由 ΔV 随 ρ, θ 的分布便可求出全息底片 H 再现的右半空间中某立体区域 G 中的象素数 M_G :

$$M_G = \int_{G_1} \frac{dv}{\Delta V}.$$

若我们取 G 为这样一个区域:

$$\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \quad 0 \leq \theta \leq \Theta,$$

则积分体元可取这样一个环 (图 3), 它是由面元 $\rho d\theta d\rho$ 绕 OO 回转一周而成, 故体元 dv 为

$$dv = 2\pi \rho \sin \theta \rho d\theta d\rho.$$

于是上述三维区域中的象素数为:

$$M(\rho_1, \rho_2, \Theta) = \frac{2a^4}{\pi \lambda^3} \int_0^\Theta \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{2a^4}{3\pi \lambda^3} (1 - \cos^3 \Theta) \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2}. \quad (14)$$

四、灰度阶数 K 的求法

为求全息再现后空间各个象素处的可区分灰度阶数, 须对全息片的拍摄和再现两个过程都从统计观点加以分析。

1. 拍摄过程

相干光波照射在三维连续分布的物上, 由物反射出的光(物光)与参考光在胶片上发生

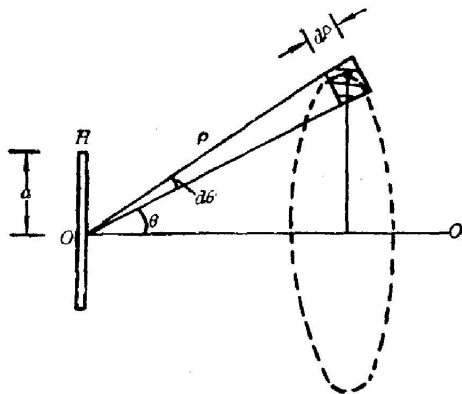


图 3

干涉, 胶片记录干涉强度。物上各点对入射光的反射率在事先是随机分布的, 因此, 将连续物用分立点物之集合近似代替后, 即可用随机行走来处理光波之相干迭加。为此, 将每个象素用其中一个点 Q_j 代表 ($j=1, 2, \dots, M$)。于是, 对于胶片 H (图 4) 上的某点 B 而言, 光程 $Q_j B$ 所对应的位相角 $\varphi_j = \frac{2\pi}{\lambda} Q_j B$ 可认为是在 0 到 2π 区间的取值 (除去 2π 之整数倍外) 是随机的且作等概率分布。假定在入射场照射下各物点 Q_j 发出的元物波到达 H 上的振幅在 $(0, A)$ 间分布, 则 B 点处所有元物波的相干合成对应于下述随机行走: 步长范围为 0 到 A , 每步朝各方向等概率, 各步长所走步数之总和为 M , 按照前面所述, 此问题用定步长 $l=A/2$ 、步数为 M 近似, 于是按 (7) 式求出:

$$E(r) = \frac{1}{4} A \sqrt{\pi M}。$$

我们近似地认为 B 点处的物波场是振幅为 $E(r)$ 、位相在 $(0, 2\pi)$ 间等概率分布的随机场。此场与参考场发生干涉。为充分利用胶片的线性范围, 取参考场在 H 上的振幅为

$$A_R = E(r) = \frac{1}{4} A \sqrt{\pi M}。$$

由于物场位相的随机性, B 点处的干涉光强 J 将在 $[A_R - E(r)]^2$ 到 $[A_R + E(r)]^2$ 间分布, 即 J 在区间 $(0, \pi M A^2/4)$ 内分布。进而按照 (9) 式可知, B 点处的平均黑粒面密度 \bar{N} 的分布范围是

$$\bar{N}: \left(0, \frac{\pi}{4} \alpha M A^2\right), \quad (15)$$

并要求

$$J_{\max} = \frac{\pi}{4} M A^2 \leq \frac{1}{\pi r^2 \alpha}。 \quad (16)$$

2. 再现过程

将底片分为 m 个等份, 则每份面积为 $\Delta s = \pi a^2/m$ 。从 (15) 式可知, Δs 内的平均黑粒数 \bar{n} 在 $(0, \pi^2 a^2 \alpha M A^2/4m)$ 间分布。进而由 (11) 式可知, Δs 内黑粒数起伏量的均方根值 σ 的分布区间为:

$$\sigma: \left(0, \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{\alpha M}{m}} A\right)。 \quad (17)$$

不妨设再现时参考光振幅为 1。于是按照 (10) 式, 通过底片上 Δs 面元而出来的元波场对某一象素点 Q_j 作衍射贡献时, 其振幅 $t\Delta s$ 的均方偏差 σ_i 的分布范围是

$$\sigma_i: \left(0, \pi r^2 \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{\alpha M}{m}} A\right)。 \quad (18)$$

当推算 Q_j 处的可辨灰度阶数 K 时, 只须考虑各面元 Δs 的随机偏差 σ_i 对 Q_j 衍射合成的总效果。由于偏差量与 Δs 的位置统计无关, 而各面元 Δs 到 Q_j 点的光程所对应的位相角可认为是从 0 到 2π 间的均匀分布, 所以上述衍射合成对应于变步长行走: 步长从 0 到 $\pi r^2 \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{\alpha M}{m}} A$, 总步数为 m 。用定步长 $l = \frac{1}{2} \pi r^2 \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{\alpha M}{m}} A$ 近似代替, 得 [见 (8) 式]:

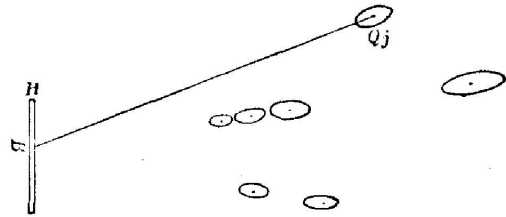


图 4

$$\varepsilon \equiv E(x^2 + y^2) = mI^2 = \frac{1}{16} \pi^4 r^4 a^2 \alpha M A^3. \quad (19)$$

此即由于底片上黑粒密度起伏在全息再现时在某一象素处造成的光强误差量。对于每个象素皆为此值。

3. 无噪声时一个点物的再现强度

有了(19)式的 ε 值之后, 再求出在同样的拍摄光场与再现光场条件下, 对于一个物点(象素)的无噪声再现强度 F , 则

$$K = \frac{F}{\varepsilon} \quad (20)$$

就是可分辨的灰度阶数。

这是一个非随机问题。设在入射场照明下 Q_j 点发出的振幅在 H 上为 A , 拍摄时参考场振幅仍为 $A_R = \frac{1}{4} \sqrt{\pi M} A$, 则在胶片上形成的 Fresnel 带的光强最大值为

$$N_{\max} = \alpha \left(\frac{1}{4} \sqrt{\pi M} + 1 \right)^2 A^2, \quad (21)$$

最小值为

$$N_{\min} = \alpha \left(\frac{1}{4} \sqrt{\pi M} - 1 \right)^2 A^2. \quad (22)$$

令再现时参考波的振幅仍为 1, 于是从底片上各面元 Δs 出来的元波对 Q_j 点衍射贡献的振幅透过率最大者和最小者分别为:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{\pi a^2}{m} (1 - \pi r^2 N_{\min}), \\ \tau_{\min} &= \frac{\pi a^2}{m} (1 - \pi r^2 N_{\max}). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

由于 τ_{\max} 与 τ_{\min} 分别有规律地处于底片上 Fresnel 带的最亮处与最暗处, 且亮带与暗带各自的总面积近似各为底片总面积之半, 所以 Q_j 点的衍射总效果相当于下述规则行走: 以 $\tau_{\max}/2$ 为步长朝正 x 轴方向走 $m/2$ 步, 以 $\tau_{\min}/2$ 为步长朝负 x 轴走 $m/2$ 步。因而终点的坐标为

$$X = \frac{m}{2} \left(\frac{1}{2} \tau_{\max} - \frac{1}{2} \tau_{\min} \right).$$

将(21)~(23)式代入上式, 得

$$X = \frac{1}{4} \pi^2 a^2 r^2 \alpha \sqrt{\pi M} A^2.$$

此 X 值即为 Q_j 点处再现的合成振幅, 于是 Q_j 的光强为:

$$F = X^2 = \frac{1}{16} \pi^5 a^4 r^4 \alpha^2 M A^4.$$

再从(19)、(20)式得出灰度阶数 K 为:

$$K = \pi a a^2 A^2. \quad (24)$$

按照不等式(16)的要求我们取最大的 A 值:

$$A^2 = \frac{4}{\pi^2 r^2 \alpha M}.$$

代入(24)式, 最后得到灰度阶数为:

$$K = \frac{4a^2}{\pi r^2 M \alpha}. \quad (25)$$

五、数据结果与分析

[例 1] $\rho > 10a$ 的全部右半空间的信息量。按照(14)式,

$$M(10a, \infty, \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{30} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^3。$$

由(25)式得

$$K = \frac{30}{\pi} \frac{\lambda^3}{r^2 a}。$$

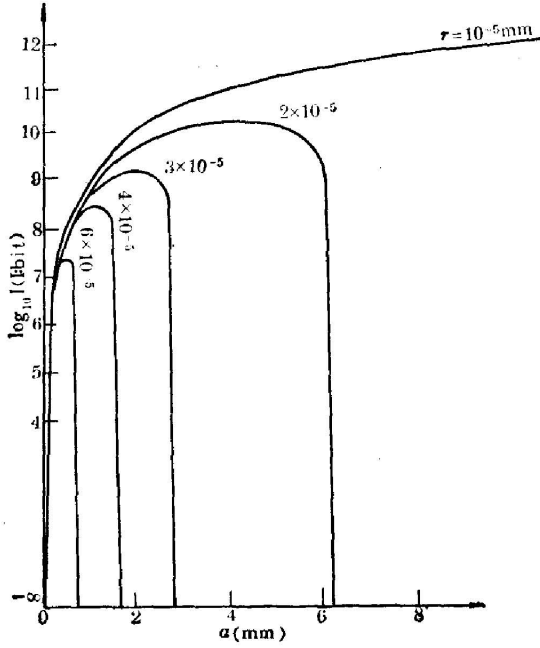


图 5

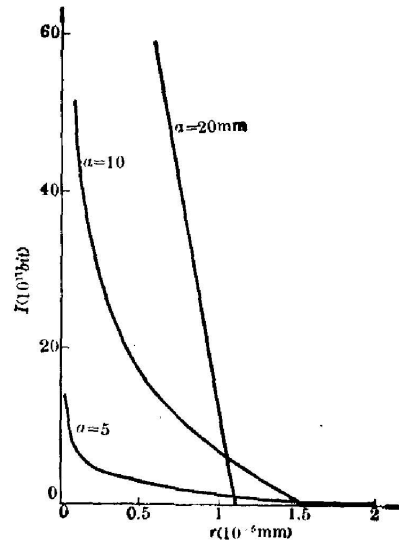


图 6

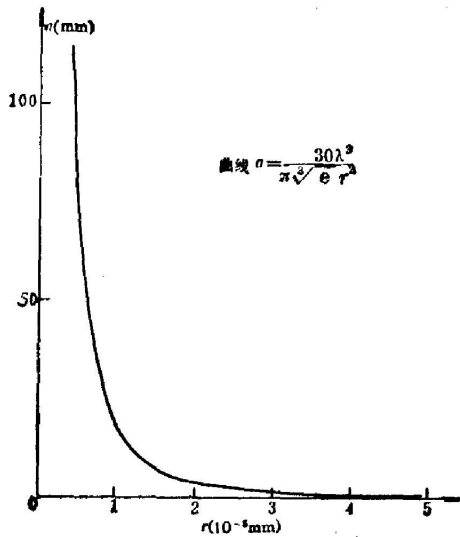


图 7

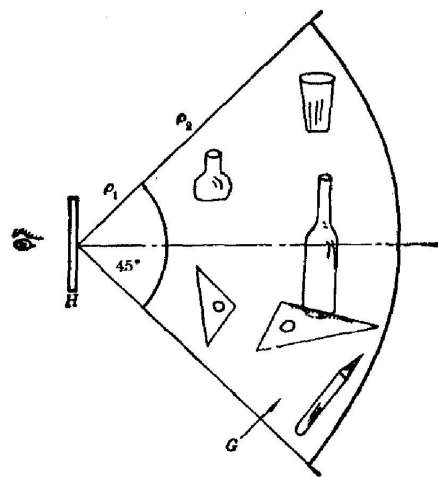


图 8

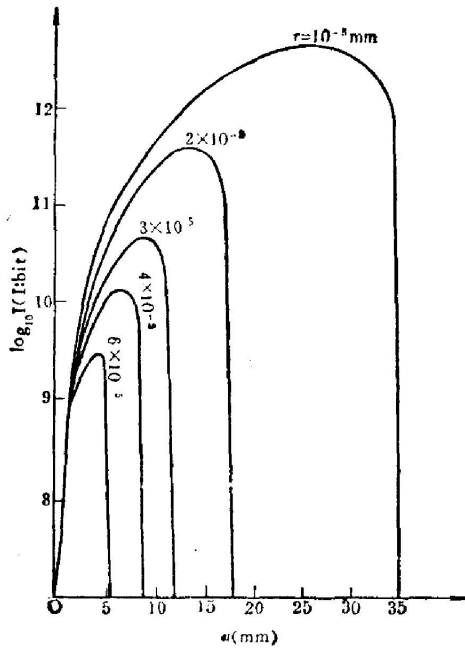


图 9

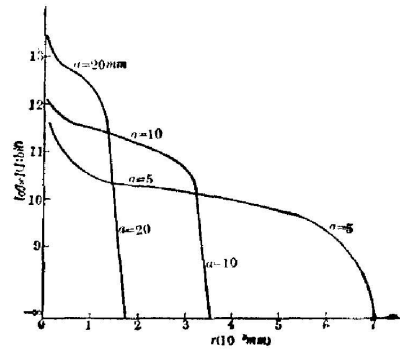


图 10

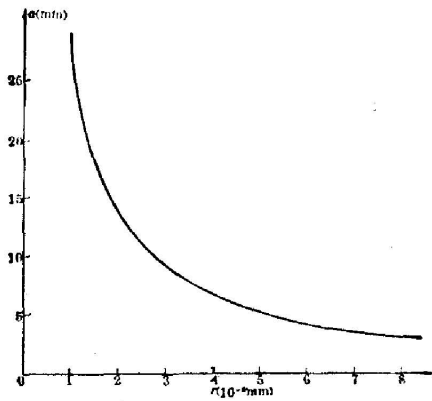


图 11

于是信息量为:

$$I = M \log_2 K = \frac{4}{30} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^3 \log_2 \left(\frac{30}{\pi} \frac{\lambda^3}{r^2 a} \right) \quad (26)$$

取 $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 。对于一系列固定的 r , I 随 a 的变化曲线如图 5 所示; 对于一系列固定的 a 值, I 随 r 的变化曲线如图 6 所示。在图 5 中, I 具有极大值。在 I 取极大条件下, a 与 r 的关系可由 $\partial I / \partial a = 0$ 求得, 为:

$$a = \frac{30\lambda^3}{\pi \sqrt[3]{e} r^2}$$

此曲线如图 7 所示。

[例 2] $\rho_1 = 250 \text{ mm}$, $\rho_2 = 1000 \text{ mm}$, $\Theta = 45^\circ$, 这相当于图 8 所示的空间区域 G 。由 (14) 及 (25) 式得

$$M = 2.6 \times 10^{-3} \frac{a^4}{\lambda^3},$$

$$K = 4.9 \times 10^2 \frac{\lambda^3}{r^2 a^2}.$$

从而

$$I = 2.6 \times 10^{-3} \frac{a^4}{\lambda^3} \log_2 \left(4.9 \times 10^2 \frac{\lambda^3}{r^2 a^2} \right).$$

I 对 a 的曲线、 I 对 r 的曲线以及在 I 取极值条件下 a 对 r 的曲线分别如图 9、图 10 和图 11 所示。

六、讨 论

本文中的公式给出的是下述理想条件下的信息量：假定观测再现图象的仪器之解象能力足够高，以致于能够分辨再现的任一象素体元，也能区别开再现的每一灰度阶。当接收仪器（例如眼睛）的能力低于上述要求时，计算实际观察的信息量时应将接收仪器的限制考虑进去。以眼睛为例，这种分析可提示我们对全息底片的尺寸与粒度要求的原则。

首先讨论象素的分辨。

1. 横向分辨 图 12 中，沿 x 方向相距 Δx 的两个爱里椭球是由全息底片 H 再现的。

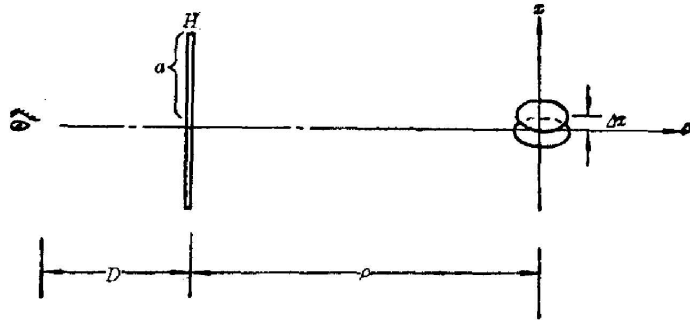


图 12

因而

$$\Delta x = \frac{1}{2} \frac{\lambda \rho}{a} \quad (27)$$

设此 Δx 亦刚为人眼所分辨，则由人眼的角分辨率约为 $1'$ 可知，

$$\Delta x = 2.9 \times 10^{-4} (D + \rho) \quad (28)$$

由 (27)、(28) 式得：

$$a = \frac{10^4 \lambda \rho}{5.8 (D + \rho)} \text{ 度}$$

取 $D = 250 \text{ mm}$, $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3} \text{ mm}$ ，则得下表：

| | | | |
|-------------------|------|------|----------|
| $\rho(\text{mm})$ | 250 | 1000 | ∞ |
| $a(\text{mm})$ | 0.54 | 0.87 | 1.1 |

即：若仅须适应眼睛的横向分辨，底片之半径取 1.1 mm 即够；对于图 8 中的区域 G ， a 取 0.87 mm 即够， a 再大已无补益。

2. 纵深分辨 纵深分辨是由双目视觉引起的。视深公式为^[14]：

$$\Delta \rho = \frac{\eta}{d} D'^2 \quad (29)$$

其中 d 为双目节点距离，对人眼而言 $d = 65 \text{ mm}$ 。 D' 为物到人眼距离，由图 13 知

$$D' = D + \rho$$

η 为视差角，对人眼而言 $\eta = 10''$ 。于是

$$\Delta \rho = \frac{4.8 \times 10^{-5}}{65} (D + \rho)^2 \quad (30)$$

图 13 中沿 ρ 方向相距为 $\Delta\rho$ 的两个爱里椭球是全息底片所再现的, 因而

$$\Delta\rho = \frac{3}{2} \lambda \left(\frac{\rho}{a} \right)^2. \quad (31)$$

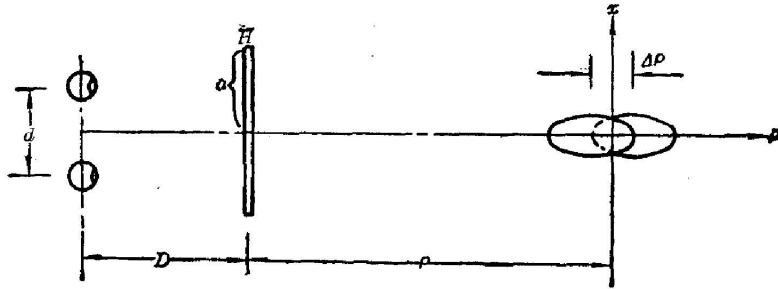


图 13

设此 $\Delta\rho$ 恰为双目所分辨, 则由 (30)、(31) 式得:

$$a = 36.5 \frac{\rho}{D + \rho}.$$

得表如下 (D 仍取 250 mm):

| | | | |
|-------------|------|------|----------|
| ρ (mm) | 250 | 1000 | ∞ |
| a (mm) | 18.2 | 29.2 | 36.5 |

即: 欲使全息再现现象之纵向分辨率赶上人的双目视觉, 底片半径应为 36.5 mm; 对于图 8 的区域 G , 底片半径须取 29.2 mm。 a 再大亦无必要。

由此可见, 对于目视而言, 全息底片之尺寸主要决定于纵深视觉的需要; 换言之, 若只须再现平面图象, 则底片尺寸可大大减小。

最后用一个例子来说明考虑眼睛视觉之后如何计算全息信息量。设底片粒度为 $r = 3 \times 10^{-5}$ mm, $D = 250$ mm, 图象区域如例 2 所定。并取底片半径 $a = 29.2$ mm, 则底片所能再现的象素数为

$$M = 2.6 \times 10^{-3} \frac{a^4}{\lambda^3} = 7.46 \times 10^{12}. \quad (32)$$

灰度阶数为

$$K = 4.9 \times 10^2 \frac{\lambda^3}{r^2 a^2} = 0.162. \quad (33)$$

于是

$$I = 7.46 \times 10^{12} \log_2 0.162 < 0.$$

信息量呈负值是因为 $K < 1$, 即噪声大于信号。这时计算信息量的公式已不适用*。由图 11 可以看出, 当 $r = 3 \times 10^{-5}$ mm 时, 最大信息量发生在 $a = 9.2$ mm。当 a 超过 9.2 mm 时, I 迅速下降以致成为负值(见图 10)。其物理意义是, 当 $a > 9.2$ mm, 由于再现的爱里椭球过小, 也就是说在拍摄过程中代表椭球的点 Q_j 对入射场的反射振幅过小, 从而单由一个物点在底片上产生的 Fresnel 带的黑粒密度小得与底片上黑粒平均起伏同量数级, 甚至更低, 因而已谈不上灰度阶, 犹如用显微镜去看一幅油画的一点点细节, 反而倒看不出图形。

但是当用眼睛观察上述全息再现景物时, 由于人眼分辨的 Δx 为 [见 (28) 式, 取区域 G 的平均 ρ 值 $\rho = 625$ mm]:

* 信息量定义式 $I = M \log K$, 仅当 $K \geq 1$ 时才有意义; $K < 1$ 时无定义。

$$\Delta x = 2.9 \times 10^{-4} (250 + 625) = 0.254,$$

比理想再现的 $\Delta x = \frac{1}{2} \frac{\lambda \rho}{\alpha} = 6.77 \times 10^{-3}$ [见(27)式]大 37.5 倍, 故人眼分辨开的体元数为 (32)式的 $1/37.5^2 = 1/1408$, 即现在 $M' = M/1408 = 5.23 \times 10^9$ 。这时用(25)式计算 K 时, M_G 应代之以 M'^* , 得:

$$K' = 228。$$

从而信息量为

$$I' = 5.23 \times 10^9 \log_2 228 = 4.17 \times 10^{10}。$$

但人眼又不能分辨出 228 个灰度阶; 设只能分辨 8 个灰度阶, 则最后计算出人眼实际得到的信息量为

$$I'' = 5.23 \times 10^9 \log_2 8 = 1.57 \times 10^{10},$$

即用理想仪器观测时虽已无信息可言 ($I < 0$), 但用解象力低一些的眼睛观看, 信息量还相当高。但此 I'' 值仍未达到与此 r 对应的 $I_{\max} = 5.2 \times 10^{10}$ (见图 9)。

进而, 对于人眼的 8 个灰度阶, 由(33)式可知, r 只须取

$$r = \sqrt{\frac{4.9}{8} \times 10^2 \frac{\lambda^3}{\alpha^2}} = 1.9 \times 10^{-4} (\text{mm}),$$

而不必取 $3 \times 10^{-5} \text{mm}$ 。

最后必须指出, 关于全息底片理想信息量的表达式 [例如 (26) 式] 是以充分利用不等式(16)为前提的, 即拍照时物光与参考光的振幅要选得充份利用到黑粒密度的全部范围, 即

$$\bar{N}: (0, \bar{N}_{\max}),$$

其中

$$\bar{N}_{\max} = \frac{1}{\pi r^2}。 \quad (34)$$

七、结 论

本文从再现的立体而非平面景物讨论信息量。若限于平面景物, 则在平面 xy 上(图 1)再现的可辨面元数与 F. T. S. Yu^[4]讨论的底片上可辨 Fresnel 带数是相当的。但平面 x, y 上两点在底片上对应的 Fresnel 带只是平移关系, 而沿着 z 轴的两点在底片上对应的 Fresnel 带却是另外一种关系(近似为缩放关系)。在这种关系下可区分的 Fresnel 带也携有信息, 所以应该讨论。可辨爱里椭球即可认为是将所有可辨 Fresnel 带都考虑进去了。

由于本文所用的“简化胶片”模型可能失之粗糙, 兼以概率推演中多次用到近似, 所以算出的数据不会很准确, 但毕竟表明了从再现立体图象观点讨论全息信息量是有意义的。

* 式(25)为一普遍公式, 其中 M_G 为所考虑的区域 G 中能分辨的象素数, 该数与用何种仪器接收有关。故用人眼直接观看时, $M_G = M'$ 。

参 考 文 献

- [1] F. T. S. Yu; *Introduction to Diffraction, Information Processing and Holography* (MIT Press, 1973), 197.
- [2] G. Toraldo di Francia; *J. O. S. A.*, 1969, **59**, No.7(Jul), 799.
- [3] C. K. Rushforth, R. W. Harris; *J. O. S. A.*, 1968, **58**, No. 4(Apr), 539.
- [4] M. Bendinelli, A. Consortini *et al.*; *J. O. S. A.*, 1974, **64**, No. 11(Nov), 1498.
- [5] F. Gori, G. Guttari; *J. O. S. A.*, 1974, **64**, No. 4(Apr), 453.
- [6] Bahaa Saleh; *J. O. S. A.*, 1977, **67**, No. 1(Jan), 71.
- [7] D. Gabor; *Light and Information*, in E. Wolf(ed.), *Progress in Optics*, Vol. 1(Amsterdam, 1961), 112.
- [8] Robert Ash; *Information Theory* (John Wiley & Sons, 1965), 23.
- [9] 王梓坤; 概率论基础及其应用(科学出版社, 1976), 130 页。
- [10] 王竹溪; 统计物理学导论(人民教育出版社, 1956), 153 页。
- [11] 程路; 物理学报, 1978, **27**, No.6(Nov), 651.
- [12] 程路; 物理学报, 1979, **28**, No.4(Jul), 470.
- [13] M. Born, E. Wolf; *«Principles of Optics»* (Pergamon Press, 1975), 8. 8-1.
- [14] 久保田広等; 光学技术ハンドブック(朝仓书店, 1968), 769.

On the holographic information capacity of film in terms of 3-dimensional reconstructed image

CHENG LU LI ZHENGMING ZHANG BINGQUAN

(Department of Physics, Nankai University)

(Received 30 March 1980)

Abstract

The holographic information capacity of film is analysed in terms of 3-dimensional reconstructed image. Information capacity I is defined by two factors M and K , being $I = M \log K$ in simple case, where M is the number of image elements and K the number of gray levels. In the case of holography the image elements are 3-dimensional. The number M of 3-d. image elements is deduced from diffraction, and it merely depends upon the film size. But the number K of gray levels depends upon the fluctuation of grain density in the film. The value of K is deduced with a model of "simplified film", using twice the "random walk" method. Then I is given as a function of a (the radius of film) and r (radius of grains in the film). The curve of I vs a and of I vs r are given. It is discussed about how to chose the size and density of the grains under certain conditions.