第1卷 第2期
1981年3月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 1, No. 2
March 1981

关于光线的两种弯曲的讨论

欧 发
(哈尔滨工业大学物理教研室)

提 要

本文讨论了光线在光学不均匀介质中的弯曲与在引力场中的弯曲在形式上的相似性，最后提出一个“光线的光学折射(弯曲)与引力弯曲的等价关系”，并且得到相应的证明。由此，进一步尝试建立上述两种效应都存在时光线的短程线方程。采取的方法是：仍以光线在引力场中的短程线方程为基础，但修正其中 Christoffel 符号 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 里所包含的四维时空的度规张量 $g_{\alpha\beta}$，修正后，让它们既能反映引力场，又能反映光线在光学不均匀介质中的弯曲。

在光学不均匀，即折射率不均匀的介质中，光线传播的轨迹要发生弯曲；在引力场中，光线同样地也要发生弯曲。后一种弯曲是爱因斯坦的广义相对论的著名的“三大实验验证”之一，已成为公认的事实。

光线的这两种弯曲，那怕是在形式上，有其共同之处吗？

首先我们得承认，产生这两种弯曲的物理本质是不同的。光本质上是电磁波(电磁场)，对光透明的物质具有电磁性质的微观结构，因此，光线在光学不均匀介质中的弯曲或折射是光和物质的相互作用的结果。另一方面，光子具有质量，因此光线在引力场中的弯曲是引力相互作用的结果。

虽然，这两种弯曲在本质上是不同的，但是，在这两种情况下弯曲的规律，具体地说，光线轨迹所服从的微分方程，在形式上确有其相似之处。

考虑光线在光学不均匀介质中的弯曲时，一般都不言而喻地认为充满光学不均匀介质的空间本身是平坦的。对于平坦的三维空间，我们总是可以采用笛卡尔坐标系将空间度规表示为

$$dl^2=\delta_{ik}dx^i dx^k,\quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3), \tag{1}$$

其中，dl 代表空间中线元，现在这里也就是光线轨迹上的一段线元。x^1, x^2, x^3 依次是通常所指的沿 x, y, z 三个坐标轴的坐标。等式右边的上标与下标相同者代表对该指标求和，以后均沿用此惯例。δ_{ik} 则代表单位张量元素。在认为空间是平坦的前提下，将费马原理

$$\delta\int n(x^i)dl=0 \tag{2}$$

纳入拉氏形式，不难导出光线在光学不均匀介质中的短程线方程[1]

$$\frac{dt^i}{dl}+\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x^m}(t^m t^i-\delta^{im})=0, \tag{3a}$$

收稿日期：1980年3月25日

其中 $t^i=\frac{dx^i}{dl}$ 代表光线轨迹上的切线单位矢量 $\boldsymbol{t}$ 的某一分量。由于光线轨迹上的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 与光线的切线方向一致，应有如下关系：

$$k^i=kt^i=nk^{(0)}t^i, \tag{3b}$$

其中 k 与 $k^{(0)}$ 依次是代表在介质中与在真空中的波矢的模。考虑到(3b)，不难将(3a)化为

$$dk^i=dk_i=\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x^i}kdl, \tag{4}$$

其中 k_i 是波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的协变分量，在笛卡尔坐标系中，矢量的逆变分量 k^i 与协变分量 k_i 本无区别，为了便于以后的对比，我们还是写成这样的形式。折射率 n 在空间分布不均匀，$\frac{\partial n}{\partial x^i}\neq 0$，则 $dk_i\neq 0$，说明波矢 k_i 在空间上是变化的，也就是说，光线是弯曲的，(3)或(4)代表光线弯曲的规律。在 n 均匀的介质中，$\frac{\partial n}{\partial x^i}=0$，则 $dk_i=0$，表示光线是直线进行的。

考虑光线在引力场中的弯曲，空间的几何结构就显得非常重要。根据广义相对论或相对论性的引力论，引力场决定了四维时空的几何性质，后者集中地反映在四维时空的度规方程上：

$$-ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{5}$$

其中反映时空几何性质的度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 由引力场来决定。$x^0=ct$ 代表时间坐标（c——真空中的光速），$x^i(i=1,\ 2,\ 3)$ 代表空间坐标。以后我们这样约定：用小写希腊字母作上标或下标，例如，α, β 等代表 0, 1, 2, 3；用小写拉丁字母，例如，i, k 等代表 1, 2, 3；用 ds 代表四维时空中“轨迹”或世界线的线元。有引力场时三维空间的度规方程可写成

$$dl^2=\gamma_{ik}dx^i dx^k, \quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3), \tag{6}$$

其中 γ_{ik} 是三维空间的度规张量，它和四维时空的度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 的关系是[2]

$$\gamma_{ik}=g_{ik}-\frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}。 \tag{7}$$

在恒定引力场中 $g_{0i}=0$[2]，这时 $\gamma_{ik}=g_{ik}$，于是

$$dl^2=g_{ik}dx^i dx^k, \tag{8}$$

相应地此时(5)变为

$$-ds^2=g_{00}(dx^0)^2+dl^2=g_{00}c^2dt^2+dl^2。 \tag{9}$$

现在考虑在引力场中光线的方程。由于有引力场，四维时空是弯曲的。令 k^α 代表在这个弯曲的四维时空中的光的四维波矢量的逆变分量，k_α 是其协变分量。类时分量 $k_0=-\frac{\omega_0}{c}$（ω_0 是光的圆频率，相对选定的参照系中的时钟而言）。运用在弯曲空间中的协变微分概念[2]，不难建立光线在引力场中的微分方程（引力场中光线的短程线方程）

$$dk^\gamma=-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}k^\alpha dx^\beta, \tag{10}$$

其中 Christoffel 符号

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\gamma\eta}\left(\frac{\partial g_{\eta\alpha}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial g_{\eta\beta}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\eta}\right)。 \tag{11}$$

当空间是弯曲（有引力场）时，$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\neq 0$，相应地 $dk^\gamma\neq 0$，这说明光的传播路线是弯曲的；当空间是平坦（无引力场）时，$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}=0$，则 $dk^\gamma=0$，说明光线是直线。

将反映光线引力弯曲规律的方程(10)与反映光线由于折射率 n 不均匀引起的弯曲的规律方程(4)相比较，可以看出形式上有某些相似之处。必须注意，在方程(4)中的折射率在空间上的分布函数 $n(x^i)$ 类似于引力空间中度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 在方程(10)中所起的作用。

下面进一步论证：光线在光学不均匀介质中的弯曲，可以等效于光线在特定形式(由度规张量形式表达)的恒定引力场中的弯曲。这种等效有利于引导我们去进一步考虑有引力场存在时光线在光学不均匀介质中的短程线方程。这也是本文最后要讨论的一个问题。

我们已经知道，对于在恒定引力场中传播的光线，也存在一个以下形式的费马原理[2]：

$$\delta\int\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}dl=0。\tag{12}$$

前面已经指出，在恒定引力场中，时间指标与空间指标交叉的度规张量元素 g_{i0} 恒为零，于是在此情况下，四维时空度规就由(9)式来表示。又因为现在考虑的是光线在引力场中的传播过程，对应此过程的事件间隔，即世界线元 ds 为零，有

$$-g_{00}c^2dt^2=dl^2\tag{13a}$$

或

$$cdt=\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}dl。\tag{13b}$$

光线在引力场中从一点 P_1 到另一点 P_2 所经历的时间 t (相对于选定参照系的时标)应取极值：

$$\delta\int_{P_1}^{P_2}dt=0。\tag{14}$$

考虑到(13b)式，那就意味着(12)式的存在。将光线在恒定引力场中的费马原理的表达式(12)与光线在光学不均匀介质中的费马原理表达式(2)相比较，可以看出，两者之间是十分相似的。

(2)式中的折射率在空间上的分布函数 $n(x^i)$ 与(12)式中的 $\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}$ 的地位完全相当(注意，对于恒定引力场，g_{00} 一般也应是空间坐标的函数，但与时间坐标 x^0 无关)。如果我们在两者之间划一个等号，将得到这样一个关系：

$$g_{00}=-\frac{1}{n^2}。\tag{15}$$

这个关系确实很有意思，它使得我们产生一个设想(或者说是判断)：光线在光学不均匀介质中的弯曲，可等效于光线在一种特定形式的恒定引力场中的弯曲。这种引力场的四维时空的度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 的具体表达式是：

$$g_{00}=-\frac{1}{n^2},\ g_{0i}=g_{i0}=0,\ g_{jk}=\delta_{jk},\tag{16a}$$

相应地有(略去简单的运算过程)

$$g^{00}=-n^2,\ g^{0i}=g^{i0}=0,\ g^{jk}=\delta^{jk}。\tag{16b}$$

由(16a)式和(16b)式表达的度规我们称之为光学不均匀介质与引力场等价的度规张量，简

称为"等价度规张量"(事实上也就是以后定义的"折合度规张量"的一个特例)。我们把上述的设想暂称为光学不均匀介质与引力场相等价的等价关系。

现在我们来证明这个关系。这个关系是否能够成立,就看将(16a)式与(16b)式表达的等价度规张量代入(10)式所表达的在引力场中光线的短程线方程后，是否能化成光线在光学不均匀介质中的短程线方程的一种表达式 (4)。为此，我们首先考察四维时空中的四波矢量 k_α(协变分量)与 k^α(逆变分量)的性质。我们知道[2],

$$k_\alpha k^\alpha = 0, \tag{17}$$

而且类时协变分量

$$k_0 = -\frac{\omega_0}{c}。 \tag{18}$$

考虑到(16b)式不难得到其逆变分量 k^0

$$k^0 = g^{0\alpha}k_\alpha = g^{0i}k_i + g^{00}k_0 = g^{00}k_0, \tag{19a}$$

即有

$$k^0 = g^{00}k_0 = -n^2 k_0 = n^2\frac{\omega_0}{c}。 \tag{19b}$$

在引力场中波矢量 $\boldsymbol{k}$ 必须与光线轨迹 l 的切线(单位矢量 $\boldsymbol{t}$)方向一致,即有

$$k^i = K k^{(0)}\frac{dx^i}{dl}, \tag{20}$$

必须注意,这里的 $k^{(0)}$, 相对于相对论性的引力理论而言，应理解为在平坦空间(没有引力场时)中的波矢的模；相对于经典的几何光学而言，应理解为真空中(没有介质)波矢的模，即有

$$k^{(0)} = \frac{\omega_0}{c}。 \tag{21}$$

利用(17), (18), (19a)及(20)诸式,不难定出(20)式中的常数 K

$$K = \sqrt{\frac{1}{-g_{00}}}。 \tag{22}$$

这样,(20)式就变成

$$k^i = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}k^{(0)}\frac{dx^i}{dl}。 \tag{23}$$

这里我们再次看到 $1/\sqrt{-g_{00}}$ 相当于折射率 n。

下一步骤是将上述诸关系式代入(10)式(引力场中光线的短程线方程)的类空分量式

$$dk^i = -\Gamma^i_{\alpha\beta}k^\alpha dx^\beta = -\Gamma^i_{jk}k^j dx^k - \Gamma^i_{0k}k^0 dx^k - \Gamma^i_{j0}k^j dx^0 - \Gamma^i_{00}k^0 dx^0。 \tag{24}$$

根据 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ 的表达式(11),并考虑到(16a)式与(16b)式,不难计算出

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{0k} = \Gamma^i_{j0} = 0,\ \Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}。 \tag{25}$$

以此代入(24)式,并考虑到(16a)式中的 $g_{00} = -\dfrac{1}{n^2}$ 及(19b)式与 $x^0 = ct$, 得

$$\begin{aligned} dk^i &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}k^0 dx^0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right]\left(n^2\frac{\omega_0}{c}\right)d(ct) \\ &= \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x^i}\left(n\frac{\omega_0}{c}\right)\frac{c}{n}dt = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x^i}k\,dl。 \end{aligned} \tag{26}$$

注意，这里 c/n 恰好代表在介质中的光速，故有 $\frac{c}{n}dt=dl$；并请注意式中的 k 是光在介质中的波矢 $\boldsymbol{k}$ 的模 $k=|\boldsymbol{k}|$。

将(26)式与(4)式比较，可见结果完全一致。本关系的证明到此完毕。

光学折射与引力弯曲相等价的等价关系也可以这样来表述：光线在光学不均匀介质中的短程线方程(4)，可以纳入光线在引力场中的短程线方程(10)，等价的度规张量如(16a)式与(16b)式所示。

最后，必须强调一点：我们这里所指的等价关系是指光线在光学不均匀介质中的弯曲等价于一种特定的恒定引力场的效应；不能由(12)式与(2)式这两个费马原理在形式上的完全相似，误解为恒定引力场与光学不均匀介质对光线的弯曲效应完全等价，因为(12)与(2)这两个式子中 dl 的空间度规是不同的，前者一般是弯曲的，应由(8)式来表达(即 $dl^2=g_{ik}dx^i dx^k$)，后者是平坦的，应由(1)式(即 $dl^2=\delta_{ik}dx^i dx^k$)来表达。(1)式也只能看成是(8)式的一个特例。

下面我们讨论最后一个问题：在光线既受到引力场的弯曲，又受到光学不均匀介质的折射(弯曲)的情况下如何建立光线的短程线方程。由于上述等价关系的启发，建立这个方程的基本想法是，仍以光线在引力场中的短程线方程为基础，但考虑到介质的折射率 n 不均匀引起的弯曲效应同时存在，有必要对反映引力场的四维时空的度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 进行修正，修正后的度规张量我们暂称为“折合度规张量”，并以符号 $\bar{g}_{\alpha\beta}$ 来标志。同时，附带要说明一下，这里所指的引力场应包含两部分贡献：一部分是充满光学不均匀介质的空间以外的物体(例如，质量相当大的某种天体)所产生的引力场；另一部分是光学不均匀介质本身对引力场也有贡献。

如果我们只考虑上面所指的引力场，这时四维时空的度规方程为

$$ds^2=-g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta=-g_{00}c^2dt^2-g_{0k}c\,dt\,dx^k-g_{i0}c\,dt\,dx^i-g_{ik}dx^i dx^k。\tag{27}$$

必须注意，这里的 c 是光在真空中传播的速度。而现在空间中充满折射率不均匀的光学介质，光(假设是频率为 ω_0 的单色光)的传播速度应为 c/n，若我们以 c/n 代替上式中的 c，这本身就意味着我们同时也考虑了光学不均匀介质对光线引起的弯曲。于是新的度规方程就变成

$$ds^2=-\bar{g}_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta=-\bar{g}_{00}(dx^0)^2-\bar{g}_{0k}dx^0dx^k-\bar{g}_{i0}dx^i dx^0-\bar{g}_{ik}dx^i dx^k,\tag{28}$$

其中 $x^0=ct$；而

$$\bar{g}_{00}=g_{00}/n^2,\quad \bar{g}_{0k}=g_{0k}/n,\quad \bar{g}_{i0}=g_{i0}/n,\quad \bar{g}_{ik}=g_{ik}。\tag{29a}$$

以上就是我们前面所提出的四维时空折合度规张量的表达式，并且其中的 n 应理解为“原”(proper)折射率。在没有引力场时($g_{00}=-1$, $g_{i0}=g_{0i}=0$, $g_{ik}=\delta_{ik}$)，则(29a)式变为

$$\bar{g}_{00}=-\frac{1}{n^2},\quad \bar{g}_{0k}=0,\quad \bar{g}_{i0}=0,\quad \bar{g}_{ik}=\delta_{ik}。\tag{29b}$$

这一点事实上就是(16a)式所表达的光学不均匀介质的“等价度规张量”。如果空间中所充满的透明介质的折射率 n 是与空间坐标无关的常数，则这时光在介质中的速度 c/n 仍然是一个常数，或者说，这时不过是给原来的真空中的光速常数 c 换一个单位，即光线的弯曲完全由反映(真正)引力场的度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 来决定。如果说这时透明介质对光线弯曲也有贡献的话，那只是取决于均匀透明介质本身的引力场。

为了把光线在引力场中的短程线方程写成常见的形式，这里必须补充一点。先把四波矢量表达成比较一般的形式[2]：

$$k^{\alpha}=\frac{dx^{\alpha}}{dp},\tag{30}$$

其中 p 是沿光线轨迹变化的任一参量，即有

$$p=p(l)。$$

相应地有

$$dp=\frac{dp}{dl}dl=p'\,dl,\tag{31}$$

于是，k^{α} 的类空分量 k^{i} 为

$$k^{i}=\frac{1}{p'}\frac{dx^{i}}{dl},\tag{32}$$

(23)式正是(32)式的一个具体表达式。这样一来，(10)式就可以写成

$$\frac{dk^{\gamma}}{dp}+\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}k^{\alpha}k^{\beta}=0,\tag{33}$$

或写成

$$\frac{d^{2}x^{\gamma}}{dp^{2}}+\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{dp}\frac{dx^{\beta}}{dp}=0。\tag{34}$$

这就是光线在引力场中的短程线方程的通常形式。

如果同时又计及光学不均匀介质对光线的折射，那就要修正引力场的度规张量，实际上也就是要修正(34)式中的 Christoffel 符号 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$，修正后的该符号用 $\bar{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 来标志。即有

$$\bar{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\bar{g}^{\gamma\eta}\left(\frac{\partial\bar{g}_{\eta\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial\bar{g}_{\eta\beta}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial\bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\eta}}\right),\tag{35}$$

其中折合度规张量 $\bar{g}_{\alpha\beta}$ 如(29a)式所示，其逆变张量 $\bar{g}^{\gamma\eta}$ 可按一定法则由其协变分量 $\bar{g}_{\alpha\beta}$ 来决定[3]。

于是最后我们得到光线在引力场中同时又计及介质折射效应的短程线方程

$$\frac{d^{2}x^{\gamma}}{dp^{2}}+\bar{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{dp}\frac{dx^{\beta}}{dp}=0,\tag{36}$$

或者叫做“有引力场时光线在光学不均匀介质中的短程线方程”。

将光线的这两种性质上(引力相互作用与电磁相互作用)完全不同的弯曲都统一到四维时空的度规上来解决弯曲的规律问题，如果我们的设想和所采取的具体方法有些可取之处的话，那末，这里也许还有值得进一步思考和探讨的问题。

作者感谢洪晶教授对本文在工作上的热情支持。

参 考 文 献

[1] 欧发；哈尔滨工业大学学报，1980年第1期。
[2] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц; *Теория поля*, *Физматгиз*, 1960, 285, 302, **304**, **298**, 308, **298**.
[3] E. G. Harris; *Introduction to Modern Theoretical Physics*, 1973, Vol. I, 25.

Discussion on the two kinds of deflection of the light ray

OU FA
(*Department of Physics, Haerbin Institute of Technology*)

(Received 25 March 1980)

Abstract

In this paper the formal analogue between deflections of light due to the optically inhomogeneous medium and due to gravitational field is disscussed. It has been shown that there exists a "relation of equivalence" about these two kinds of deflection. In the last part of this paper, an attempt was made to modify the equation of the light ray geodesics in the gravitational field with the consideration of the effect due to the optically inhomogeneous medium. Essentially this modification is to transform the gravitational space-time metric tensor $g_{\alpha\beta}$ to a new metric tensor $\bar{g}_{\alpha\beta}$ which can apply both for the gravitational field and for the optically inhomogeneous medium.

"生物医学科学的光学"讨论会(ICO-12 分会议)

"生物医学科学的光学"讨论会作为"第十二届国际光学年会(ICO-12)"的一个分会议，将于 1981 年 9 月 7 日～9 月 11 日在奥地利格拉茨举行。会议两主席为匈牙利的 P. Greguss 和西德的 G. VonBally。

会议主要讨论下列专题范围内的生物医学的应用：

1．图象处理；
2．全息术；
3．干涉计量术；
4．斑纹技术；
5．光谱学；
6．莫尔技术；
7．不可见辐射的图象形成；
8．改进视力缺陷的光学技术；
9．电子显微镜；
10．超声显微术；
11．激光显微术。

会议的目的是促使从事光学研究的科学家在生物医学研究中应用的光学技术与临床诊断相结合；同样，要求光学和生物医学工业中的产品工程师与这一技术的使用者即医生和生物学家合作。会议将有助于这些专家之间沟通消息，并进一步活跃这些领域。

会议学术交流期间的同时将拟组织有关工业产品展览。

(黎风)