第1卷 第2期
1981年3月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 1, No. 2
March 1981

谐振腔的感度

方 洪 烈
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

本文由谐振腔的正则理论分析了腔的敏感度，并得到了一些理论结果。这些结果表明适当选择腔的参数可以降低腔的敏感度。

固态激光介质在工作过程中发生的热畸变一般说来是比较复杂的，它与工作物质的光学、力学均匀性、光泵系统的结构以及激光束本身的特性有关。但对理想的圆柱形工作介质，在良好设计的光泵系统中，光泵引起的热形变可以用一个透镜等效，这对实际的工作条件是一个相当好的近似。

由于这一透镜出现在谐振腔内，并且焦距是随时间变化的，因而直接影响到激光器的模式结构和输出光束质量，无疑，设计一种对这种透镜效应不敏感的谐振腔是很有意义的。在文献[1]中，我们讨论了几个对热透镜型形变不敏感的谐振腔，本文给出有关不敏感腔判别条件的理论推导。

工作物质的形变将使腔发生模畸变。不敏感腔的模，不因工作物质的热形变而变化。因此不敏感腔应当满足

$$\frac{d}{df}u(x, y)=0, \tag{1}$$

其中 f 是形变后工作物质等效于一个透镜时的焦距，$u(x, y)$ 是谐振腔的本征模。如果不满足(1)式，量 $du(x, y)/df$ 仍可用来描写谐振腔的感度。

由谐振腔的衍射理论可以知道，任何谐振腔的模式(用它在谐振腔反射面上的场分布 $u(x, y)$ 来描写)均满足如下的积分方程

$$bu(x, y)=\int_{(S)}K(x, y; x', y')u(x', y')dx'dy', \tag{2}$$

其中 b 是本征值，它与腔的衍射损失和共振频谱有关；$u(x, y)$ 是本征函数，它决定了场的空间分布与角分布；$K(x, y; x', y')$ 是与谐振腔结构有关的积分核。当工作物质等效一个薄透镜时(其焦距 f 是时间 t、泵功率 P 等因素的函数)，积分核 $K(x, y; x', y')$ 和本征函数 $u(x, y)$ 都只是 f 的函数。从(1)式我们看到，当本征函数 $u(x, y)$ 与 f 无关时(此时满足(1)式)谐振腔是不敏感的。如果 $u(x, y)$ 与 f 有关，但在某个 f_0 点，满足(1)式时，称 f_0 为该谐振腔的不敏感点。

为了弄清楚 $u(x, y)$ 是怎样随 f 而变化的，我们对方程式(2)两端求微商：

收稿日期：1980年8月14日

$$u(x,\ y)\,\frac{db}{df}+b\,\frac{d}{df}\,u(x,\ y)=\int_{(S)}\left[\frac{d}{df}\,K(x,\ y;\ x',\ y')\right]u(x',\ y')dx'dy'$$
$$+\int_{(S)}K(x,\ y;\ x',\ y')\,\frac{d}{df}\,u(x',\ y')dx'dy'。\tag{3}$$

上式中(db/df)项只影响谐振腔损失的变化和共振频谱的变化。对于不敏感腔来说，除满足条件(1)之外，还要求下式成立。

$$\frac{db}{df}=0。\tag{4}$$

这样不敏感腔条件变为

$$\frac{d}{df}\,K(x,\ y;\ x',\ y')=0。\tag{5}$$

当形变后的工作物质可视为一个透镜时，谐振腔至少是包含一个透镜的复杂腔。对于具有任意多个光学元件的复杂谐振腔来说，它的积分方程可写为[2]:

$$bU(x,\ y)=\frac{ik\exp(-ikL_0)}{2\pi\sqrt{BB'}}\iint_{-\infty}^{\infty}U(x',\ y')\exp\Big\{-ik\frac{1}{2B}\,(Cx^2+Ax'^2-2xx')$$
$$-ik\,\frac{1}{2B'}\,(C'y^2+A'y'^2-2yy')\;-ik[S(x,\ y)-S(x',\ y')]\Big\}dx'dy'。\tag{6}$$

上式中出现的 $A,\ B,\ C,\ A',\ B',\ C',\ \varphi$ 和 φ' 等符号均是传播矩阵 Γ_x 和 Γ_y 的元素，即

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_x&=\begin{pmatrix}A & B\\ \varphi & C\end{pmatrix},\\ \Gamma_y&=\begin{pmatrix}A' & B'\\ \varphi' & C'\end{pmatrix},\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

其它符号与文献[2]相同。传播矩阵 $\Gamma(\Gamma_x,\ \Gamma_y)$ 与光线在谐振腔内往返一周的变换矩阵 D (见文献[3])有如下关系

$$\Gamma=R^{-1}D,\tag{8}$$

其中 R 是建立方程(6)时所取的参考面处的反射面面形矩阵(不包括反射效应)。这里需要说明的是在(6)式的建立过程中曾把谐振腔考虑为周期元件序列。此时没有反射发生。当所考虑的问题有反射发生时，R 的形式将稍有不同。S 是参考平面处反射面的面形方程。对于实际上有意义的结果是，S 为二次曲面。此时近似为抛物面。即

$$S(x,\ y)=-\frac{x^2}{2r}-\frac{y^2}{2r'},\tag{9}$$

其中 $r,\ r'$ 分别为反射面在 $x,\ y$ 方向的曲率半径。

上面我们所讨论的情况，虽然具有象散，但对 x 方向与 y 方向的处理，在形式上却完全相同。为了简便起见，我们只讨论一个二维问题，此时积分核可写为

$$\sqrt{\frac{ik}{2\pi B}}\exp\Big(-i\,\frac{kL_0}{2}\Big)\exp\Big\{-ik\frac{1}{2B}(Cx^2+Ax'^2-2xx')-ik[S(x)-S(x')]\Big\}。\tag{10}$$

当考虑到光线反射时，对于参考面来说入射光线与出射光线是不同的，故 S 的形式也略有差异。即

$$S=-\frac{x^2}{2r},\quad S(x')=\frac{x'^2}{2r}。\tag{11}$$

将(11)式代入(10)式得

$$\sqrt{\frac{ik}{2\pi B}}\exp\left(-i\frac{kL_0}{2}\right)\exp\left\{-ik\frac{1}{2B}\left[\left(C-\frac{B}{r}\right)x^2+\left(A-\frac{B}{r}\right)x'^2-2xx'\right]\right\}。\tag{12}$$

下面我们指出：对于驻波腔来说，$C=A$。Γ 矩阵建立时没有考虑反射的发生。因为当存在反射时，Γ 中必然含有偶数个反射矩阵。那么矩阵

$$\Gamma=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Gamma=\begin{pmatrix}A & B\\ -\varphi & -C\end{pmatrix}\tag{13}$$

中便只含有一个反射矩阵(或奇数个反射矩阵)，因此它是一个反射矩阵的相似矩阵，并且是自伴的[4]。因为反射矩阵的行列式为 -1，即 $\mathrm{Det}(\Gamma)=-1$，那么 Γ 的伴随矩阵是

$$\Gamma^*=\begin{pmatrix}C & B\\ -\varphi & -A\end{pmatrix}。$$

由此得出

$$A=C。\tag{14}$$

如果我们取

$$G=C-\frac{B}{r}=A-\frac{B}{r},\tag{15}$$

(12)式变为

$$\sqrt{\frac{ik}{2\pi B}}\exp\left(-i\frac{kL_0}{2}\right)\exp\left\{-ik\frac{1}{2B}\left[G(x^2+x'^2)-2xx'\right]\right\}。\tag{16}$$

因为矩阵 Γ 中已含有偶数个反射矩阵，故

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{r} & 1\end{pmatrix}\Gamma=\begin{pmatrix}A & B\\ \varphi-\frac{2A}{r} & C-\frac{2B}{r}\end{pmatrix}。\tag{17}$$

最后求得

$$G=\frac{1}{2}S_p(D)。\tag{18}$$

上式中 S_p 表示求矩阵的迹。

这样，不敏感条件便可以最后写为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dB}{df}=0,\\ \frac{dG}{df}=0。\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

这就是普遍的不敏感条件，它包括了条件(1)和(4)。因为 b 是 G 的函数，由(19)式我们看出普遍的不敏感条件包括两个部分，即等效腔长 B 的变化部分与 G 因子的变化部分。

引入一个量

$$N_{eq}=\frac{a^2}{\lambda B},\tag{20}$$

其中 a 是谐振腔口径的一半。N_{eq} 称为有效菲涅耳数，如果我们用相对坐标 x/a 代替 x，那么(12)式可写为：

$$\sqrt{iN_{eq}}\ \exp\{-i\pi N_{eq}[G(x^2+x'^2)-2xx']\},\tag{21}$$

式中略去了常数因子 $\exp(-ikL_0/2)$。将上式与简单对称球面腔积分核

$$\sqrt{iN}\ \exp\{i\pi N[g(x^2+x'^2)-2xx']\}\tag{22}$$

对比可知：B 只影响有效菲涅耳数的变化。对于几何近似适用的情况，有效菲涅耳数 N_{eq} 一般都很大，此时 N_{eq} 的变化对 $u(x,\ y)$ 和 b 的影响都很小，从而可以忽略。因此，只要考虑条件

$$\frac{dG}{df}=0\tag{23}$$

便已足够精确了，下面我们来讨论一些具体情况。

对于由两个均匀反射的球面镜构成的谐振腔来说，它的变换矩阵 D 等于

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2p & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \varphi & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2q & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\varphi & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix},\tag{24}$$

其中 $p=r_1^{-1}$，$q=r_2^{-1}$ 分别是两反射镜曲率半径的倒数，$\varphi=f^{-1}$ 是工作物质的光焦度，$a,\ b$ 分别为工作物质到两反射镜的距离。那么它的迹等于

$$2G=S_p(D)=4ab(1-ap-bq+abpq)\varphi^2$$
$$-4L\left[1-ap-bq+2abpq-\frac{ab}{L}(p+q)\right]\varphi+2[1-2L(p+q)+2L^2pq]。\tag{25}$$

如果我们引入量

$$\alpha=1-ap-bq+abpq,\tag{26}$$

$$\beta=\frac{ab}{L}(p+q)-abpq,\tag{27}$$

在上面诸式中 $L=a+b$ 是腔长，则(25)式可写为

$$G=2ab\alpha\varphi^2-2L(\alpha-\beta)\varphi-\frac{2L^2}{ab}\beta+1。\tag{28}$$

由(28)式我们看到 G 是 φ 的二次函数，这一点是普遍的。因为光束在腔内往返一周时穿过工作物质两次，因此 G 一定是 φ 的二次函数。由(28)式我们还看到，当 $\alpha=0$, $\beta=0$ 时，即 G 与 φ(即 f)无关时腔是不敏感的。

在一般情况下，上述腔一定存在一个不敏感点。这是因为 G 是 φ 的二次函数，它一定有一个 φ_0，使 $dG/d\varphi=0$，即 $dG/df=0$。因此适当选取一个初始光焦度 φ_0，将降低腔的感度。

对于不均匀反射的腔来说，由文献[5]可知，此时 α 和 β 均为复数，故不敏感条件将难以满足。但经过仔细选择的反射率分布将不影响腔的感度。

关于如何设计一个不敏感腔的问题，可参看文献[1]。

此工作得到了王之江同志的指导和有益的讨论。在此表示感谢！

参 考 文 献

[1] 方洪烈;《物理》, 1980, **9**, No. 5 (Oct), 391.
[2] 方洪烈;《物理学报》, 1979, **28**, No. 4 (Aug), 430.
[3] 方洪烈;《激光》, 1978, **5**, No. 5~6 (May~Jun), 145.
[4] 方洪烈;《激光》, 1979, **6**, No. 4 (Apr), 17.
[5] 方洪烈;《激光》, 1979, **6**, No.7 (Jul), 19.

Sensitivity of resonators

FANG HONGLIE
(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)

(Received 14 Aug. 1980)

Abstract

The problem about the sensitivity of resonators was analyzed in the canonical theory of resonators, and some theoretical results on the sensitivity were obtained. They show that the sensitivity can be lowered by choosing some appropriate parameters of resonators.