第1卷 第2期
1981年3月
光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA
Vol. 1, No. 2
March 1981

电子与电子相互作用辐射

王 之 江
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

波长比厘米波更长的相干电磁辐射通常都从自由电子的动能转变而来,但是,为了将自由电子的能量转变为更短的电磁波却长期未能成功。近年来,以自由电子通过交变磁场获得的磁阻尼辐射——所谓自由电子激光,引起人们广泛注意[1]。看来它是获得毫米波以至近红外波段的可行技术,但是,用能量不太高的电子(例如 MeV 以下)产生光频或 X 光波段的辐射,还缺乏可行的途径。本文建议用电子束"对撞"的方式,由电子与电子相互作用来解决这个问题。

设想一等速运动的电子束是聚束(bunch)的,密度分布是作空间调制的正弦分布。在随电子束运动的坐标系中,电荷分布如同正弦结构的光栅,按照慢波结构的概念(例如 Smith-Purcell 效应[2]),当另一电子穿过此周期结构时将产生辐射。另一种可能的观点是,正弦分布的电荷产生的库伦场也是正弦分布的[3],电子通过这个库伦场时,将经受加速减速而振荡辐射,这种情况与近年发展的自由电子激光中电子受周期磁场阻尼辐射相近。不同之点在于:电子形成的电场周期可以非常短,因而可望产生短波辐射。再若穿过周期结构的电子束本身也是聚束的,那么在预定频率的辐射将可望大为加强[3]。

按照德布洛意波相拍频的概念,将两束动量略有不同的相干的电子束合并,即可获得频率甚高的密度作正弦分布的电子束[4]。例如兆电子伏的电子束相应的波长为 0.01 Å,由此易于得到例如周期 1 Å 的密度分布。Schwartz 认为,此电子束即可辐射出这种波长的电磁波。由于电子束拍频并不引起加速,等速自由运动的电子,不管它的密度分布如何,除消散波 (evanescent wave) 外不能辐射[3]。故 Schwartz 的论断大概是不正确的。

动量为 p_1 和 p_2 的强度相等的电子束相迭加,其整体的波函数为

$$\psi=e^{i(\omega_a t-k_a x)}\cos(\omega_b t-k_b x), \tag{1}$$

其中

$$\begin{cases}\omega_a=(p_1^2+p_2^2)/4mh, & k_a=(p_1+p_2)/2h,\\ \omega_b=(p_1^2-p_2^2)/4mh, & k_b=(p_1-p_2)/2h。\end{cases} \tag{2}$$

将这个聚束的电子束再一分为二,对撞,则形成的波函数为

$$\psi=e^{i(\omega_a t-k_a x)}\cos(\omega_b t-k_b x)+e^{i(\omega_a t+k_a x)}\cos(\omega_b t+k_b x)。 \tag{3}$$

电子的密度分布 $\psi\psi^*$ 则为

$$\psi\psi^*=1+4\cos 4\omega_b t\cos 4k_b x+\cos 2k_a x(\cos 2\omega_b t+\cos 2k_b x)。 \tag{4}$$

所以密度分布可以分为三部分,即不随时间而变的部分以及以频率 $2\omega_b$ 及 $4\omega_b$ 振荡的部分:

收稿日期:1980年10月20日

$$\begin{cases}(\psi\psi^*)_1=1+\cos 2k_a x\cos 2k_b x, & (5)\\ (\psi\psi^*)_2=\cos 2k_a x\cos 2\omega_b t, & (6)\\ (\psi\psi^*)_3=\cos 4k_b x\cos 4\omega_b t。 & (7)\end{cases}$$

后二式表达的谐振子能辐射 $2\omega_b$ 及 $4\omega_b$ 的电磁波。

由(2)式，ω_b 为二电子束速度差形成的差频 $\Delta\omega$，而 ω_a 则为二电子束的平均频率 ω。对于相对论电子束，(2)式应修正为：

$$\begin{cases}\omega=\dfrac{mc^2}{h}\left[(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}-1\right]=\dfrac{E}{h},\\ k=\dfrac{mc}{h}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\beta=\sqrt{2Em\left(1+\dfrac{E}{2mc^2}\right)}。\end{cases} \tag{8}$$

因此

$$\begin{cases}\Delta\omega=\Delta E/h,\\ \Delta k=\Delta E/(hc\beta)。\end{cases} \tag{9}$$

这就是二电子束有能量差 ΔE 时，拍频电子束的 ω_b 和 k_b 之值。

为了讨论(6)、(7)二式表示的电子密度函数产生的辐射，可以先对下式的电子密度作一般的讨论。当

$$\rho(x,\ t)=\rho_0\cos\omega t\cos kx \tag{10}$$

时，它的电流密度按连续性方程应为

$$j(x,\ t)=\frac{\rho_0\omega}{k}\sin\omega t\sin kx。 \tag{11}$$

从偶极辐射理论[5]，可以得到这个电流各局部点所产生的辐射功率的角分布为：

$$p(x,\ \theta)=\frac{1}{8\pi}\frac{\rho_0^2\omega^4}{c^3k^2}\sin^2 kx\sin^2\theta, \tag{12}$$

式中 p 是单位立体角内的光功率，θ 是辐射方向与 x 轴的夹角。

为了计算单位立体角内的总辐射功率，须将全部电子束的辐射贡献求和，即对电子束所在空间作积分。对于沿 x 方向运动，在 xy 面内，厚度 Δz 的一层电流而言，在方向$(\theta,\ \varphi)$的辐射总功率为：

$$p=\frac{\rho_0^2\omega^4\sin^2\theta}{8\pi c^3k^2}(\Delta z)^2\left[\iint\sin kx\cos\frac{\omega}{c}(x\cos\theta+y\cos\varphi)\,dx\,dy\right]^2。 \tag{13}$$

(13)式的积分与正弦光栅衍射积分相同(附录)，存在积分极大，即 ±1 级谱。但正弦光栅仅在光栅间距大于波长时方有相干增强的 ±1 级谱，光栅积分极大值的条件是：

$$k=\pm\frac{\omega}{c}\cos\theta, \tag{14}$$

也就是要求

$$ck/\omega\leqslant 1。 \tag{15}$$

由于 ck_a 一般比 ω_b 大得多，因此(6)式表示的电荷密度辐射而相干增强的可能性很小。对于(7)式所示的辐射源，由(9)式有：

$$\frac{ck_b}{\omega_b}=\frac{c\Delta k}{\Delta\omega}=\frac{1}{\beta}。\tag{16}$$

因此对频率 $4\omega_b$ 的辐射而言，(15)式一般也不满足。

对于超光速运动的电子 $\beta>1$, (15)式可以满足，这与 Cerenkov 辐射条件类似，但又与 Cerenkov 辐射有所不同，(15)式不满足导致不能相干增强，但可设想仅取 $\sin kx$ 为正的部分积分(挡去其余部分的辐射)，则(13)式将积分迭加增强。例如当 $\Delta x=\pi/k$ 与晶格间距相等，则透过晶格沟道的辐射将相干增强。

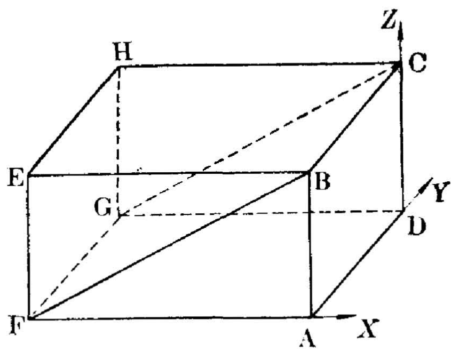

图 1

由于电子束扫过的空间区域(电子波函数不为零的空间)并非如 (13) 式那样的 Δz 很小的一层，在这一层内不相干增强时，仍然可能存在相干增强的辐射区域。图 1 表示沿 x 方向运动的电子束，其波面 $ABCD$ 及波函数不为零的空间区 $ABCDEFGH$。(13) 式表示的是 $ADGF$ 面辐射总和。若取另一平面 $BCGF$，它与坐标面 xy 的夹角为 ψ，并和 xz 面垂直，则此面辐射总和为：

$$p=\frac{\rho^2\omega^4\sin^2\theta}{8\pi c^3k^2}(\Delta z)^2I^2;\tag{17}$$

$$I=\iint\sin kx\cos\frac{\omega}{c}\left(x\frac{\sin\left(\psi-\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\psi}+y\cos\varphi\right)dx\,dy。$$

这和正弦光栅间距变长$(\cos\psi)^{-1}$倍相同，并使相干增强成为可能。如取 $\theta=\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\sin\theta=1$, 则由正弦光栅积分可知，当

$$k=\pm\omega\tan\psi/c\tag{18}$$

时，(17)式的积分为极大，其值为积分区面积之半。由(16)式，条件(18)也就是：

$$\beta\tan\psi=\pm1。\tag{19}$$

由于 $\tan\psi$ 可以是任意值，条件(19)总能满足，也就是说，总可以找到一个截面，在此截面内的电子辐射是相干增强的。对于相对论电子束 $\beta\sim1$, $\psi\sim\pi/4$。

为了使长方体 $ABCDEFGH$ 内的总辐射都相干增强，就要求各个夹角 ψ 的截面在 z 方向的间距恰好等于波长，这就要求电子束不单在 x 方向聚束，而且也恰当地在 z 方向聚束。这一点可能由电磁波作驻波反馈而达到[3]。

估计 1 MeV 的电子束产生 X 光的功率。设电流密度为 $1\,\mathrm{A/cm^2}$, 则电荷密度 ρ_0 约为 $0.1\,\mathrm{esu/cm^3}$, 由于 $\omega/ck=\beta\sim1$, 故厚度 $\Delta z=1\,\mathrm{\AA}$、面积 $1\,\mathrm{cm^2}$ 的一层电子在单位立体角内的辐射功率由 (17) 式约为 10 W, 辐射频率 $\omega\sim10^{19}\,\mathrm{sec^{-1}}$, 亦即辐射似乎是显著的。

上述估计未计及立方体内各薄层的辐射可能的相干增强，但却假定电子束的全部都对 ρ_0 有贡献，亦即都调制到所须频率上，并处在所须空间模式中。无论电子束源的速度色散或发散角分布都将影响 ρ_0 下降。

* * *

从电子被晶格衍射的实验以及电子显微镜的实践，都可以判定物质波的波长，对于物质波的频率似乎还没有适当的实验判断。上面建议的辐射频率则由物质波的频率决定。因此，对于判断物质波频率也许会有一点意义。

虽然晶格衍射早就由实验证实，但是电子拍频也许是不容易的，它要求电子束源的速度色散在一定范围内，否则，各不同速度的电子拍频后 $\Delta\omega$ 虽一致（ΔE 相同时），Δk 却不一致，拍频信号清晰的空间区会很窄。另外，由于拍频电子束带着交变的库伦场，这种电子束和物质相互作用时，例如入射金属箔、栅网、等离子体也可能产生高频辐射。

* * *

电子与电子相互作用辐射的逆过程也就是自由电子吸收光子而加速，基于能量守恒和动量守恒，自由电子吸收单个光子是不可能的，但若是两个电子吸收两个光子，则守恒易于满足。这在光的驻波场中可以达到，光子动量为零，两个电子吸收两个光子后向相反方向运动时，能量和动量守恒均可满足，如图 2 所示。Lampre 等曾报导了电子吸收多光子的实验[6]。但未测量另一方向的加速电子，也没有故意加入反向传播的光束。看来，变更反向光束的强度和偏振，测量二方向的加速电子可以验证上述猜测的正误。

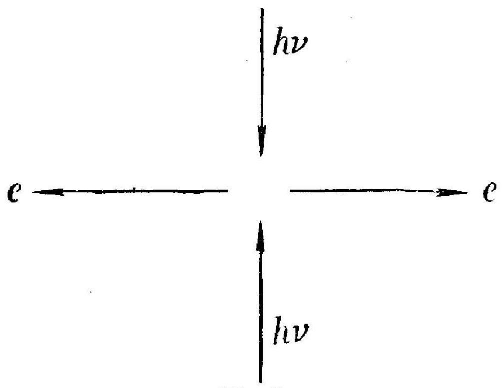

图 2

附录：正弦光栅衍射

光束垂直入射于透过率作正弦分布的光栅表面，则透过光栅的光束的衍射角分布为：

$$\int_{-a}^{a}\cos(2\pi x/d)\cos(2\pi x\cos\theta/\lambda)dx$$

$$=\frac{\sin 2\pi\left(\frac{1}{d}+\frac{\cos\theta}{\lambda}\right)a}{2\pi\left(\frac{1}{d}+\frac{\cos\theta}{\lambda}\right)}+\frac{\sin 2\pi\left(\frac{1}{d}-\frac{\cos\theta}{\lambda}\right)a}{2\pi\left(\frac{1}{d}-\frac{\cos\theta}{\lambda}\right)}。$$

当 $a\gg d$ 时，上式仅在

$$d\sin\theta=\pm\lambda$$

时有较大的值，亦即正弦光栅有 ±1 级衍射谱。从 $\sin cx=\sin x/x$ 的性质（图 3），可知，不满足衍射条件时衍射积分将是比积分面积小得多的值。

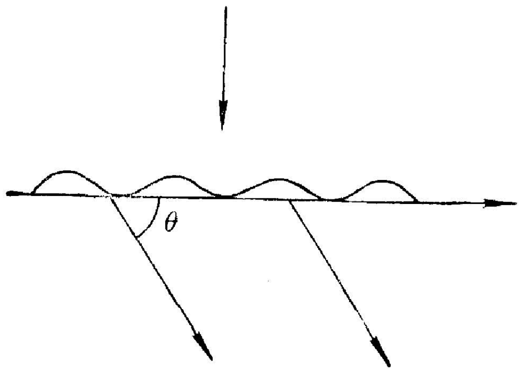

图 3

上面仅考虑了一度空间光栅的情况，对二度光栅而言问题的性质和结果也相同。

参 考 文 献

[1] L. R. Elias *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1976, **36**, No. 13 (29 Mar), 717.
L. R. Elias *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1977, **38**, No. 16 (18 Apr), 892.
D. B. McDermott *et al.*; *Phys. Rev. Lett*,. 1978, **41**, No. 20 (13 Nov), 1368.
[2] S. J. Smith, E. M. Purcell; *Phys. Rev.*, 1953, **92**, No. 4 (15 Nov), 1069.
[3] 王之江;«中国科学院光学精密机械研究所(长春)集刊», 第一集 (1963), 117.
[4] H. Schwarz H.; *Phys. Rev. Lett.*, 1979, **42**, No. 17 (23 Apr), 1141.
[5] 胡宁;«电动力学», 人民教育出版社 1963.
[6] L. A. Lampre *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1979, **43**, No. 17 (22 Oct), 1243.

Light radiation by electron-electron interaction

WANG ZHIJIANG

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)

(Received 20 Oct 1980)

Abstract

According to the beat concept of de Broglie wave, if two electron beams with slight diffrence in momentum merge into one, an electron beam with high spatial frequency with sinusoidal density distribution will be obtained. Dividing the beam into two, let them collide each other from opposite directions, it will form a standing wave. The standing wave oscillation of electric charge will exhibit to be a radiation source of light wave or even high frequency electromagnetic wave.