第1卷 第1期　光学学报　Vol. 1, No. 1
1981年1月　ACTA OPTICA SINICA　Jan. 1981

光学系统象差的实时补偿

庄松林
(上海光学仪器研究所)

蒋百川　郑权
(中国科学院上海生理研究所)　(上海科学技术大学)

提　要

本文讨论了以适当光瞳函数来补偿光学系统象差的可能性，指出这是希尔伯特空间中的泛函极小化问题，得到了使波差方差极小解的一般形式，特别研究了以环状位相光瞳补偿对称象差的效果，并以$S.D$值作判据，用求总极值的方法确定滤波器的各个参数，并以MTF的观点对几种情况作了比较和讨论。

一、引　言

在熟知的假定条件下，一个光学系统的焦平面上的复振幅$U(\xi, \eta)$与光瞳函数$G(x, y)$有如下关系[1]：

$$U(\xi, \eta)=\iint G(x, y)e^{-\frac{2\pi i}{\lambda R}(x\xi+y\eta)}\,dx\,dy。$$

因此，利用适当的方法调节光瞳函数，就可以改变衍射花样。一个早期的著名例子就是Fresnel波带片。

利用这个途径去改善光学系统性能的方法，现在被广义地称为“切趾法”(Apodization)。这个名称最初是指抑制理想光学系统的高级次衍射环的一种方法。它通过在光瞳上放置一个滤波器，使光瞳函数发生改变，从而可以改善强光源附近的弱光源的可见度，或者是改变低对比物的可见度。

改变光瞳函数的滤波器，其作用可以是改变光瞳处波面的位相，亦可以是改变其振幅，或者使两者同时变化。采用滤波器改善光学系统性能可以用不同的质量指标进行评价，例如采用Rayleigh或Sparrow分辨判据、中心点亮度($S.D$值)、光学传递函数(OTF)、区域能量(即某特定半径中的能量集中度)等等。因此，在各种特定条件下，确定光瞳滤波器的形式，已成为不少作者的研究课题。

朝仓利光[2]采用抛物型振幅滤波器去抑制次极大，并用光学传递函数进行了评价。Lit[3]、Katti[4]等人则以环状π位相光瞳去缩小理想光学系统衍射斑的半径来增加焦深。在P. Jacquinot和B. Roizen-Dossier[5]的综述文章中，详细叙述了对于理想光学系统的切趾问题的通常处理方法。一般而言，是将光瞳函数在希尔伯特空间某一完备的正交函数系中

收稿日期：1980年3月25日

以任意系数加以展开，通过调节各项系数，使得评价指标最优。或者，在一定的约束条件和评价方式下，用变分法计算导出 Fredholm 型积分方程，从积分方程的本征函数中求出合适的光瞳函数。最初 Luneberg 提出四个切趾问题[6]，并导出相应的积分方程。Baraket[7,8]，Wilkins[9,10] 等人对此作过具体的处理。后来 Slepian[11] 利用长球波函数得到使区域能量达到极大的完全解析的解。Kusakawa[12,13] 等在解这类问题中，具体考虑到光学系统的被动性。

虽然，光瞳滤波器按其功效亦可用作补偿光学系统的象差。许密特校正板就是一个典型的例子。辻内顺平[14] 曾用振幅型、位相型及混合型滤波器考虑了使中心点亮度及调制传递函数(MTF)达到极大的问题。Macdonald[15] 以 MTF 为标准，一般地考虑了为补偿对称象差要求振幅型光瞳函数所服从的微分方程。Katti[16] 等人则以抛物型振幅滤波器来处理在部分相干情形下对离焦的补偿。使用光瞳滤波器补偿象差的一个明显的优点，就是它是一种实时的信息处理。

但是，用改变光瞳函数的方法是否一定会对改善系统的质量带来好处，即对任意象差类型的光学系统，是否一定要有一个能改善象差的光瞳函数的解，对这一点并未进行过研究。本文以波差方差为判据，指出这种解必然存在，并获得解的一般形式。然后，提出用环状位相型光瞳滤波器来讨论补偿象差的效果，这主要是考虑到避免今后制造上的困难，同时位相型滤波器可以不引起能量的损耗。我们以中心点亮度为判据，把问题归结为在大量不等式约束下的求总极值问题，并利用我们提出的求总极值方法[18]，得到了满意的结果。计算表明，在对称象差的情形下，用少数几环就可以使光学系统的品质显著改善，最后以 MTF 的观点，对几种情况作了比较和讨论。

值得说明的是，本工作与以上列举的大部分工作一样，仅是对切趾法问题的理论探讨。

二、一 般 理 论

$S.D$ 值可作为光学系统质量的一种合适的指标，它可表示为：

$$S.D=\frac{\left|\int_0^{2\pi}\int_0^a T(\rho,\ \theta)e^{ikW(\rho,\theta)}\rho d\rho d\theta^2\right|^2}{\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho d\rho\, d\theta},\tag{1}$$

其中 $(\rho,\ \theta)$ 为光瞳极坐标；$T(\rho,\ \theta)=A(\rho,\ \theta)e^{ikF(\rho,\theta)}$ 为光瞳函数，$A(\rho,\ \theta)$ 为光瞳振幅透过函数；$F(\rho,\ \theta)$ 为光瞳位相透过函数；$W(\rho,\ \theta)$ 为光学系统波差；$k=2\pi/\lambda$（λ 为波长）；a 为光瞳半径。

首先，讨论纯振幅滤波器 $F(\rho,\ \theta)=0$，当象差不大时：

$$S.D\doteq 1-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\Phi,\tag{2}$$

其中，

$$\Phi=\frac{1}{\pi}\iint_D A(\rho,\ \theta)W^2(\rho,\ \theta)\rho d\rho\, d\theta-\left[\frac{1}{\pi}\iint_D A(\rho,\ \theta)W(\rho,\ \theta)\rho d\rho\, d\theta\right]^2,\tag{3}$$

D 表示单位圆域：

$$\{(\theta,\ \rho);\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant 1\}。$$

对于一切在 D 上平方可积函数，引进内积：

$$\langle f(x,\ y),\ g(x,\ y)\rangle=\frac{1}{\pi}\iint_D f(x,\ y)g(x,\ y)dx\,dy。\tag{4}$$

这样就得到了一个希尔伯特空间[17]，记作 H。要 $S.D$ 达到极大，即要 Φ 极小。我们来求泛函数 Φ 的极小，利用(4)式可把(3)式写成

$$\Phi=\langle T,\ W^2\rangle-\{\langle T,\ W\rangle\}^2。\tag{5}$$

设在 W 及 W^2 上张开的二维子空间为 H_1，把 $A(\rho,\ \theta)$ 表示为：

$$A(\rho,\ \theta)=\alpha W(\rho,\ \theta)+\beta W^2(\rho,\ \theta)+z,\tag{6}$$

这里的 α, β 是两个常数，$Z\perp H_1$，由于正交性

$$\langle Z,\ W\rangle=0\ \text{及}\ \langle Z,\ W^2\rangle=0。\tag{7}$$

这样，

$$\begin{aligned}\Phi&=\langle\alpha W+\beta W^2,\ W^2\rangle-\{\langle\alpha W+\beta W^2,\ W\rangle\}^2\\&=\alpha\langle W,\ W^2\rangle+\beta\langle W^2,\ W^2\rangle-\{\alpha\langle W,\ W\rangle+\beta\langle W^2,\ W\rangle\}^2。\end{aligned}\tag{8}$$

考虑到光学系统的被动性，存在约束条件：

$$\iint_D A^2(\rho,\ \theta)\rho d\rho\,d\theta\leqslant C,\quad 0<C\ll 1,$$

即

$$\alpha^2\langle W,\ W\rangle+2\alpha\beta\langle W^2,\ W\rangle+\beta^2\langle W^2,\ W^2\rangle+\langle Z,\ Z\rangle\leqslant C。\tag{9}$$

于是问题转化为求函数 $\Phi(\alpha,\ \beta)$ 在 $\alpha-\beta$ 平面之区域 R：

$$\alpha^2\langle W,\ W\rangle+2\alpha\beta\langle W^2,\ W\rangle+\beta\langle W^2,\ W^2\rangle\leqslant C'$$

上的极小值，其中 $C'=C-\langle Z,\ Z\rangle$。为此，构造 Lagrange 函数

$$\hat{\Phi}(\alpha,\ \beta)=\Phi(\alpha,\ \beta)+\lambda\{\alpha^2\langle W,\ W\rangle+2\alpha\beta\langle W^2,\ W^2\rangle+\langle Z,\ Z\rangle\},\tag{10}$$

其中 λ 为 Lagrange 乘数。由 $\partial\hat{\Phi}/\partial\alpha=0$, $\partial\hat{\Phi}/\partial\beta=0$ 及 $\partial\hat{\Phi}/\partial\lambda=0$ 可得到相应的 α, β, λ。可以看到这个极小化问题的解必定存在。由于垂直于 H_1 的向量 Z 选择的任意性，所以使 $\hat{\Phi}(\alpha,\ \beta)$ 极小的解非但存在，且有任意多个。这意味着，可以按某种特定条件对 $A(\rho,\ \theta)$ 给予更强的约束；或者在使 $\hat{\Phi}(\alpha、\beta)$ 极小的情况下，还可满足另一个质量指标达到最优，例如可以使某一个区域能量达到极大。

另一方面，研究在光瞳处存在位相滤波器，则(1)式成为：

$$S.D=\frac{1}{\pi^2}\left|\iint_D e^{ik[W(\rho,\theta)+F(\rho,\theta)]}\rho d\rho\,d\theta\right|^2。\tag{11}$$

对环状位相光瞳，令

$$F(\rho)=\begin{cases}0 & 0=a_0\leqslant\rho<a_1,\\ \theta & a_1\leqslant\rho<a_2,\\ 0 & a_2\leqslant\rho<a_3,\\ \vdots & \vdots\\ \theta & a_{2m-1}\leqslant\rho<a_{2m}=1,\end{cases}\tag{12}$$

式中 θ 表示位相变化量，以波长为单位。图1为这种滤波器的位相变化图，m 为位相环的数目，a_i 表示第 i 个环的半径。

如果考虑对称象差，则波差为

$$W(\rho)=\sum_{i=1}^{n} C_{2i,0}\rho^{2i}。\tag{13}$$

$S.D$ 值可表示为:

$$S.D=\frac{1}{\pi^2}\left|\int_0^1 e^{ik[F(\rho)+W(\rho)]}\rho d\rho\right|^2。\tag{14}$$

对于象差很小的系统,且当给定的位相推移量亦很小时,即满足

$$W(\rho,\theta)+F(\rho,\theta)<\frac{1}{k}。$$

此时,$S.D$ 可以用简单的形式表示,即

$$S.D=1-k^2E,\tag{15}$$

而 $$E=\overline{[W(\rho,\theta)+F(\rho,\theta)]^2}-[\overline{W(\rho,\theta)+F(\rho,\theta)}]^2,$$

其中

$$\overline{[W(\rho,\theta)+F(\rho,\theta)]^n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1[W(\rho,\theta)+F(\rho,\theta)]^n\rho d\rho d\theta。$$

对于对称象差及环状位相滤波器的 E 值可以很容易得到:

$$E=V_{ar}W(\rho^2)+Q,\tag{16}$$

其中 $$Q=V_{ar}F(\rho)+\frac{2}{\pi}\iint_D F(\rho)W(\rho^2)ds-\frac{2}{\pi^2}\iint_D F(\rho)ds\iint_D W(\rho^2)ds。$$

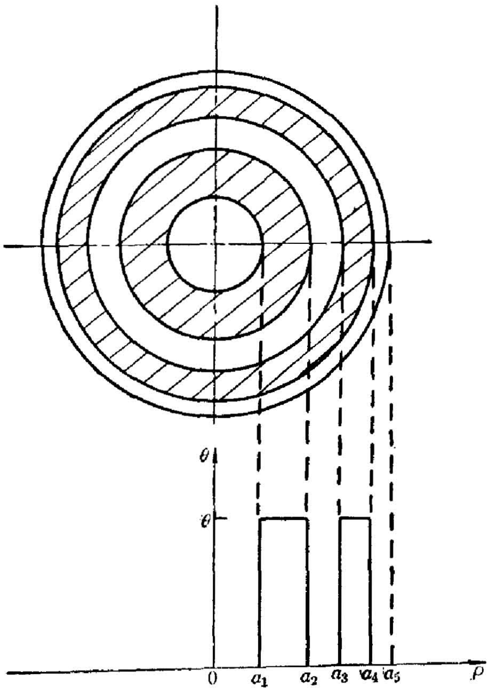

图1 环状位相光瞳滤波器,图中阴影处表示有位相推移

由上式可见,环状位相滤波器的作用是对无滤波器的系统的 $S.D$ 值附加了一项 Q。当 $Q<0$ 时,就能改善光学系统的品质。

现在的问题可归结为对给定象差 $W(\rho^2)$ 的光学系统确定滤波器的环数 m,位相推移量 θ,以及每一环的半径 a_i,使 $S.D$ 达到极大。在处理过程中还必须满足约束:

$$a_0=0,\ a_{2m}=1,\ a_i\leqslant a_j,\ i<j\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m)。\tag{17}$$

这是一个具有 $m(2m+1)$ 个约束的数学规划问题,实算指出,目标函数(14)是多峰的,一般的最优化方法不易解决多峰问题,对这一类约束的处理亦存在着一些困难。我们用总极值方法能很快得到合理的位相环半径,并能容易地处理约束。

三、计 算

对于大象差系统可用(14)式,对于小象差系统可用(16)式作为目标函数。计算的出发点是对确定的初级球差及离焦,求使 $S.D$ 极大所应有的位相环半径。作为例子,图2表明当初级球差系数 $C_{40}=\lambda$ 时,在各种离焦情形下,用环状位相滤波器所可能得到的最大的 $S.D$ 值。图中纵坐标是 $S.D$ 值,横坐标为 $\beta=C_{20}/C_{40}$,表示各种离焦时的情形。图中虚线表示无滤波器时的 $S.D$ 值;实线表示用不同的位相推移滤波器所得到的 $S.D$ 值。实线上的每

一点所对应的滤波器有不同的结构。

表 1 列出了当 $C_{40}=\lambda$、$\beta=-1$ 时，位相推移 $\theta=\pi/4$、$\pi/2$ 及 π 时最佳滤波器的结构。表中 a_i 表示每环的半径。

由表 1 可以看到，当 $\theta=\pi/4$ 时实际光瞳分割成 4 环，即 0、0.373、0.429、0.901、1，其中第 1、3 两环具有 $\pi/4$ 位相推移。当 $\theta=\pi/2$ 时分割成 3 环，即 0、0.331、0.942、1，其中第 2 环无位相推移。当 $\theta=\pi$ 时，所有对应于有位相推移的环全部消失，这表明在此时取 π 环状位相光瞳对提高 $S.D$ 值并无好处。

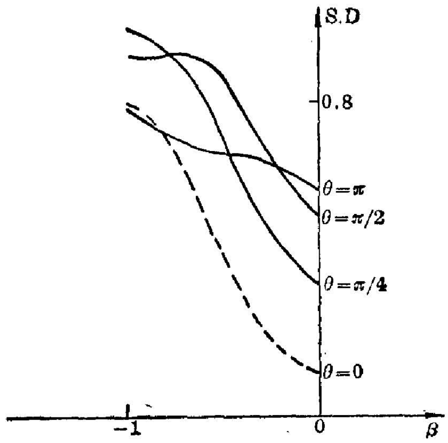

图 2　$C_{40}=\lambda$ 时，各种位相推移对提高 $S.D$ 的作用

为了更清楚地看出位相滤波器的作用，图 3～图 6 分别列出了 $C_{40}=0.5\lambda$、λ、2λ、4λ，$\beta=-1$ 时，加入最佳滤波器后，各个焦面的 $S.D$ 值。而表 2 列出了相应的最佳滤波器的结构。

表 1　$C_{40}=\lambda$，$\beta=-1$ 时最佳环状位相滤波器的结构

θ \ ρ	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$S.D$
$\frac{\pi}{4}$	0	0.002	0.373	0.373	0.429	0.901	1	0.95
$\frac{\pi}{2}$	0	0.006	0.331	0.334	0.334	0.942	1	0.87
π	0	0.008	0.323	0.324	0.504	0.504	1	0.80

表 2　各种初级球差的最佳滤波器结构

C_{40}	θ	ρ								$\beta=-1$ 时 $S.D$
		第一环	相移量	第　二　环	相移量	第　三　环	相移量	第 四 环	相移量	
0.5λ	$\frac{\pi}{4}$	0～0.332	θ	0.332～0.941	0	0.941～1	θ			0.97
λ	$\frac{\pi}{4}$	0～0.373	0	0.373～0.429	θ	0.429～0.901	0	0.901～1	θ	0.95
2λ	$\frac{\pi}{2}$	0～0.428	θ	0.428～0.904	0	0.904～1	θ			0.80
4λ	π	0～0.284	θ	0.284～0.479	0	0.479～0.870	θ	0.870～1	0	0.49

四、讨　论

1. 由图 3～图 6 可以清楚地看到，采用环状位相滤波器可以大幅度地提高光学系统的品质。它不但提高了最佳焦面处的 $S.D$ 值；而且，如果以 $S.D>0.80$ 为满意的成象标准，

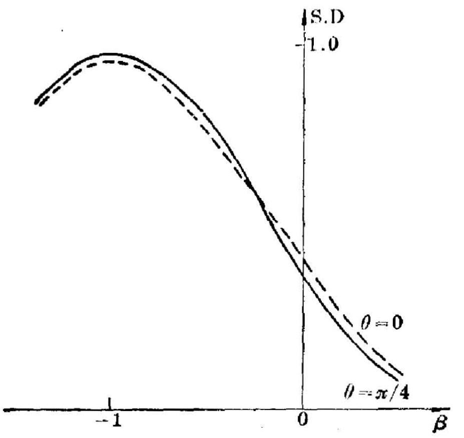

图3　$C_{40}=0.5\lambda,\ \theta=\pi/4$

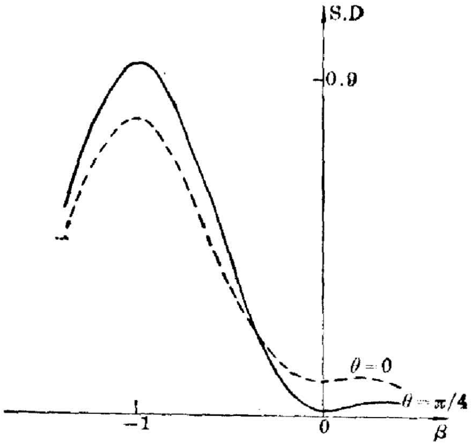

图4　$C_{40}=\lambda,\ \theta=\pi/4$

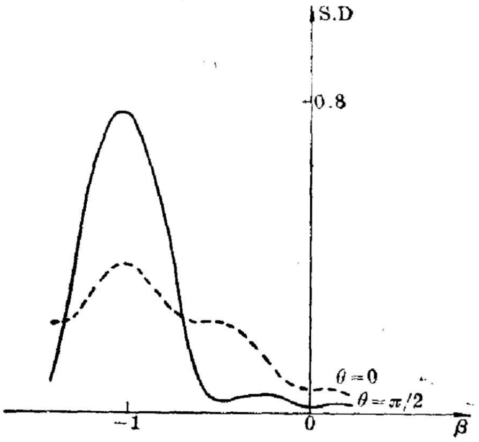

图5　$C_{40}=2\lambda,\ \theta=\pi/2$

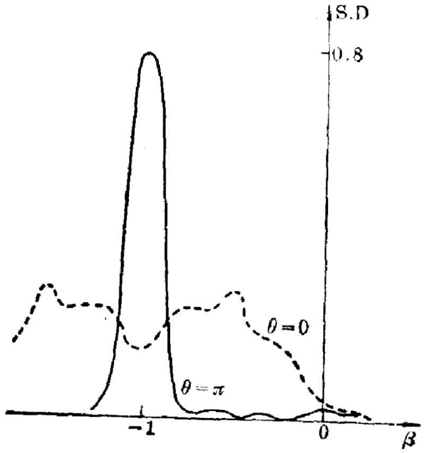

图6　$C_{40}=4\lambda,\ \theta=\pi$

则还增大了光学系统的景深，这对光学系统的实际使用是很有好处的。

2．当光学系统的象差大小不同时，存在着不同的最优位相推移。一般说来，当象差大时 θ 亦大。图7表示当 $C_{40}=\lambda$，$\beta=-1$ 时，位相推移对 $S.D$ 值的影响。事实上，当允许采用非四分之一波长的位相膜，并且给各个不同的环带以不同的位相，则光学系统的品质可获得进一步的改善。

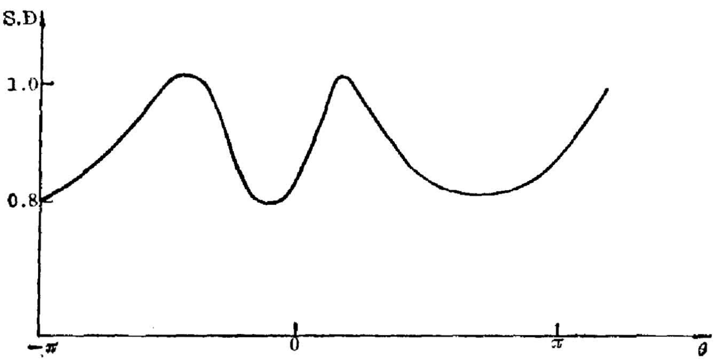

图7　$C_{40}=\lambda$，$\beta=-1$ 时，位相推移与 $S.D$ 的关系

3. 对于确定量的象差，当各位相环的位相推移量为常数时，存在着一个确定量的位相环数目 m_0，即当环数少于 m_0 时，不能使 $S.D$ 值有最大限度的提高；而当环的数目多于 m_0 时，亦不会有更好的改善，并不是环的数目愈多愈有利。计算表明，在很大的象差范围中（C_{40} 从 0.5λ 到 4λ），仅需少数几环就可达到大幅度提高象质的目的。例如，如表1所示，开始给定为六环，但经过计算可合并成三环或四环，这种并环的现象正说明了太多的环数并不一定比环数少来得好。

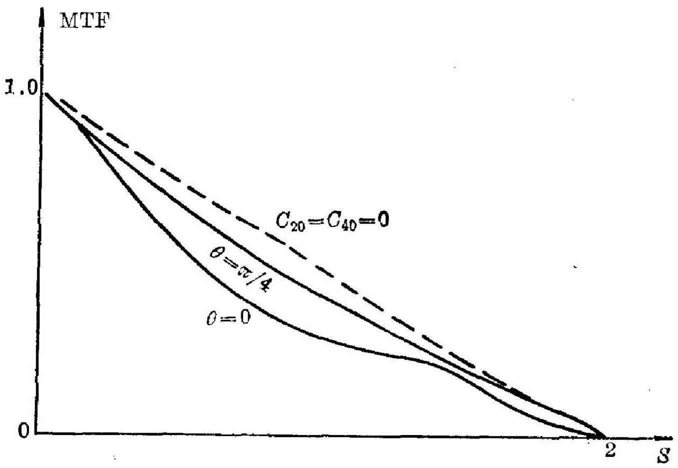

图8　$C_{40}=\lambda$，$\beta=-1$ 时，对 MTF 的改善

4. 最后，光学传递函数的计算表明，环状位相滤波器对光学系统对比传递本领的提高是很有好处的。图8和图9分别表示两种情形下滤波器对 MTF 的改善情况，虚线表示无滤波器系统的 MTF 曲线，实线表示同一系统加入适当设计的位相滤波器后的 MTF 曲线。

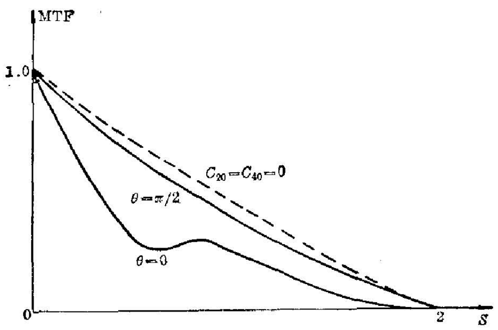

图9　$C_{40}=2\lambda$，$\beta=-1$ 时对 MTF 的改善

环状位相光瞳的 MTF 计算是借助于下式进行：

$$D(S)=\frac{1}{\pi}\iint_D \exp\{i2\pi[W(x-s,\ y)+F(x-s,\ y)-W(x,y)-F(x,\ y)]\}dx\,dy,$$

式中，

$$W(x-s,\ y)=C_{20}\rho^2+C_{40}\rho^4=C_{20}[(\rho\cos\theta-s)^2+\rho^2\sin^2\theta]+C_{40}[(\rho\cos\theta-s)^2+\rho^2\sin^2\theta]^2=C_{20}P+C_{40}P^2,$$

$$P=\rho^2-2\rho s\cos\theta+s^2,$$

$$x^2+y^2=\rho^2,$$

而

$$F(x-s,\ y)=\begin{cases}\theta & a_{2i}^2<P\leqslant a_{2i+1}^2 \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),\\ 0 & a_{2i+2}^2\geqslant P>a_{2i+1}^2,\end{cases}$$

式中 s 为空间频率。

本工作得到吉林大学江泽坚教授及复旦大学章志鸣副教授的指导，在此谨致谢忱。

参考文献

[1] M. Born, E. Wolf; *Principles of Optics*, Pergamon Press. fifth ed, (1975).

[2] 朝仓利光; 应用物理, 1963, **32**, No. 3(Mar), 180.
[3] J. W. Y. Lit; *J. O. S. A.*, 1971, **61**, No. 3(Mar), 297.
[4] P. K. Katti *et al.*; *Opt. Acta*, 1973, **20**, No. 12(Dec), 959.
[5] P. Jacquinot, B. Roizen-Dossier; *Progress in Optics III*, ed. E. Wolf (1964).
[6] P. K. Luneberg; *Math. Theory of Optics* (1964).
[7] R. Baraket; *J. O. S. A.*, 1962, **52**, No. 3(Mar), 264.
[8] R. Baraket; *J. O. S. A.*, 1962, **52**, No. 3(Mar), 276.
[9] J. E. Wilkins; *J. O. S. A.*, 1950, **40**, No. 4 (Apr), 222.
[10] A. M. Clements, J. E. Wilkins; *J. O. S. A.*, 1974, **64**, No. 1(Jan), 23.
[11] D. Slepian; *J. O. S. A.*, 1965, **55**, No. 9 (Sep), 1110.
[12] T. Kusakawa; *Japan. J. A. P.*, 1971, **10**, No. 3 (Mar), 320.
[13] T. Kusakawa; *Japan. J. A. P.*, 1972, **11**, No. 11(Nov), 1632.
[14] J. Tsujiuchi; *Progress in Optics II*, ed. E. Wolf (1963).
[15] J. A. Macdonald; *Proc. Phys. Soc.*, 1958, **72**, No. 467(Nov), 749.
[16] P. K. Katti, B. N. Gupta; *J. O. S. A.*, 1972, **62**, No. 1(Jan), 41.
[17] 刘斯铁尔尼克、索伯列夫著，杨从仁译;《泛函数分析概要》(科学出版社, 1955).
[18] 郑权、蒋百川、庄松林;《应用数学学报》, 1978, **1**, No. 2(May), 161.

The real-time compensation for the aberrations of optical system

ZHUANG SONGLIN
(*Shanghai Institute of Optical Instrument*)

JIANG BAICNUAH
(*Shanghai Institute of Physiology, Academia Sinica*)

ZHENG QUAN
(*Shanghai University of Science and Technology*)

(Received 25 March 1980)

Abstract

In this paper we discussed the possibility of using a suitable pupil function to compensate the aberrations of optical system. The question is just as a functional minimization problem in Hilbert space. The general form of the solution minimizing the wave variance is obtained, especially the effect of using a ring phase pupil filter to compensate the symmetrical aberrations is studied. The parameters of filter is determined with the S. D as a criterion. Several cases are discussed and compared in terms of MTF.