第1卷 第1期
1981年1月
光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA
Vol. 1, No. 1
Jan. 1981

# 光频谐振腔的准几何理论

王之江 方洪烈
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

用变换矩阵理论分析了光频谐振腔的某些特性，指出腔的本征态只有点光束和高斯光束两大类。

## 一、引 言

谐振腔理论要解决的是求得场的特征函数和特征值，所以问题的本质是解波动方程的边值问题。这种问题在微波领域已经得到了深入的研究[1]。微波腔的特点是具有封闭的、简单规则的边界。由于频谱浓缩效应，在光频波段不能使用这种腔。光频腔的特点是开式结构。开式腔显然具有不确定的边界(开放部分)，这就使严格求解波动方程成为不可能的事。问题在于用适当的方法解这种边值问题。

对于这个问题已有若干位作者[2~5]求得了几种近似解。这里将讨论一种与之不同的近似方法，即几何光学方法。

早在这些工作之前 Keller[6] 就从几何光学出发进行了系统的工作。他将一定边界状况下的边值问题归结为寻找一族光线汇的问题。这种光线汇在边界上反射后自再现。从而导出了腔的特征值(波长条件)。这种方法的缺点是得不出衍射损失。

我们的工作则是根据光线汇的自再现条件由腔的变换矩阵建立一个腔内特征光线汇(态)应当满足的矩阵方程。从而完善了 Keller 的理论。同时还指出谐振腔的特征态只有点光束和高斯光束两大类。

## 二、问题的公式化

几何光学研究的对象是“光线”，现在我们来研究光线在谐振腔内的行为。这个问题包含两个方面：(1) 任意光线在腔内的行为，这是一个光线追迹问题。这个问题前人已研究得十分充分了，我们不准备研究。(2) 腔内可存在的光线汇(即特征态)的问题。此问题还没有被研究过，也就是我们这里想要研究的问题。为了讨论的方便，我们先叙述一下光线的描述方法。

空间光线的位置总可以用四个量完全确定，例如它和一个平面交点的坐标以及两个方向余弦。我们称这个平面为参考平面，而起算方向余弦的二坐标轴在此平面上，另一坐标轴则和参考面垂直，以后简称它为轴。

收稿日期：1980年7月7日

空间光线经过任意复杂的光学系统后的位置仍然可以用四个量来表示。光学系统的作用就是对这四个量进行变换。几何光学的理论可以证明,在适当选择坐标轴后,对近轴光线的变换是线性的,物象空间的变换算符可以用矩阵表示。例如轴对称光学系统,取对称轴为物空间和象空间的共同坐标轴,并为 $Z$ 轴。使另二个坐标轴相互平行,则有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \\ \phi' \end{pmatrix}=\Gamma\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中$(x, y, \theta, \phi)$四个量是物空间光线的四个量,$(x', y', \theta', \phi')$是象空间的四个量,而 $\Gamma$ 是一个四阶矩阵。方程(1)便是熟知的光线追迹方程。

事实上当光学系统轴对称时$(x, \theta)$和$(y, \phi)$经历的变换并无区别,只须用一个二阶矩阵 $D$ 就足以表达此光学系统的性质,即

$$\begin{pmatrix} x' \\ \theta' \end{pmatrix}=D\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}。 \tag{2}$$

为简单起见,我们先讨论这种系统。令:

$$D=\begin{pmatrix} a & b \\ \varphi & c \end{pmatrix}, \tag{3}$$

则由几何光学理论可知:$\varphi$ 是光学系统的组合光焦度(组合焦距的倒数)。当 $\varphi=0$ 时,有 $ac=1$, 即 $c=1/a$, 显然 $c$ 和 $a$ 分别是此系统的角倍率和线倍率。

对于谐振腔来说,光线在腔内往返一周的矩阵称为**变换矩阵**。谐振腔反射面上所有点的光线组成的光线汇用 $U$ 表示,则

$$U=\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中 $\theta$ 是 $x$ 点光线的方向余弦,因此它是 $x$ 的函数。任意一个光线汇 $U$ 在腔内往返一周以后变成的光线汇 $U'$ 可以由光线追迹方程

$$U'=DU \tag{5}$$

求得,其中 $D$ 是谐振腔的变换矩阵。

如果这个光线汇是谐振腔的一个特征态,那么它应是自再现的,即光线汇 $U$ 在腔内往返一周后仍然变为它自己,但可以相差一个常系数 $M$。也就是说 $U'$ 与 $M$ 有如下关系:

$$U'=MU。 \tag{6}$$

由(5)式和(6)式我们得到腔特征态应满足的矩阵方程

$$DU=MU。 \tag{7}$$

这就是矩阵 $D$ 的特征方程。由这个方程我们可以发现腔的很多重要特性。

## 三、腔的本征态

我们首先考虑一个任意的变换矩阵 $D$(见(3)式),则方程(7)可写为

$$\left.\begin{aligned}(a-M)x+b\theta=0,\\ \varphi x+(c-M)\theta=0。\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

这个方程的解是清楚的。它的特征根 $M$ 满足如下方程

$$M^2-\mathrm{Sp}(D)M+\mathrm{Det}(D)=0,\tag{9}$$

其中 $\mathrm{Sp}(D)$表示矩阵 $D$ 的迹，$\mathrm{Det}(D)$表示矩阵 $D$ 的行列式，在此它恒等于 1。那么：

$$M=\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(D)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Sp}^2(D)-4}\ 。\tag{10}$$

解方程组(8)得：

$$\theta=\frac{x}{R},\tag{11}$$

$x$ 任意而 $R$ 是一个常数如下：

$$R=\frac{M-c}{\varphi}=\frac{b}{M-a}。\tag{12}$$

下面来讨论一下这些结果的物理意义。

由(10)式我们看到 $M$ 可以是实数也可以是复数。我们首先讨论 $M$ 取实数的情形。腔内某个反射面上 $x$ 点 $\theta$ 方向的光线在腔内往返一周以后变为 $Mx$ 点 $M\theta=M\dfrac{x}{R}$ 方向的光线。这说明腔内可以存在的光线汇即特征态是一个点光束，即由一个点发出的所有的光线组成的光线汇。这个发光点距反射面为 $R$。而 $M$ 是腔内光束口径的放大倍数。

由此我们得出结论：$M$ 取实数的腔的特征态是一个点光束。这样的腔我们称它为“点光束腔”。由(10)式我们容易求得点光束腔的条件是

$$\mathrm{Sp}^2(D)-4\geqslant0\tag{13}$$

或写成：

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Sp}(D)\geqslant2,\\ \mathrm{Sp}(D)\leqslant-2。\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

这正是腔的不稳定条件。因此我们可以说：不稳定腔、平面腔、共心腔等均属于点光束腔。当然这个结论是有前提的，即 $D$ 的元素均为实数时才正确，亦即此结论只适用于均匀反射的情形。

对点光束腔来说，光束口径放大倍数 $M$ 可取两个值(见(10)式)：

$$M_1=\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(D)+\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Sp}^2(D)-4},$$

$$M_2=\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(D)-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Sp}^2(D)-4},$$

不难看出

$$M_1=\frac{1}{M_2}。\tag{15}$$

在这两个值中有一个大于 1，另一个小于 1。大于 1 的相应于一个发散球面波，小于 1 的对应于一个汇聚波。这里我们指出当考虑到谐振腔的反射镜的有限尺寸时，汇聚波是不存在的。因为当腔内某镜面上的光线汇在腔内往返一周后只存在于镜面上的 $1/M$ 的区域内，这样的光束不满足自再现要求，因此它不是腔的特征态。

如果 $M$ 是复数，即(14)式不满足的情形，即稳定腔的情形，此时腔的特征态不再是点光束。这时量 $R$(下面用 $q$ 来表示它)具有如下形式

$$q=\frac{\mathrm{Sp}(D)-2c}{2\varphi}\pm\frac{i}{2\varphi}\sqrt{|\mathrm{Sp}^2(D)-4|}。\tag{16}$$

这是一个高斯光束的特征参量[7]。腔的特征态是一个高斯光束。此高斯光束腰斑的位置由 $q$ 的实部表征，即

$$Z=\frac{a-c}{2\varphi},\tag{17}$$

腰斑尺寸由 $q$ 的虚部给出，是

$$\frac{\pi}{\lambda}\omega_0^2=\frac{1}{2\varphi}\sqrt{4-(a+c)}。\tag{18}$$

这样的腔我们称它为“高斯腔”。稳定腔属于高斯腔。对于不均匀反射的情形，高斯腔将包括一大部分不稳定腔。

## 四、几点讨论

对于由二个球面反射镜组成的轴对称的谐振腔来说，它的变换矩阵可写为：

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{r_1} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -L\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{2}{r_2} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-\frac{2L}{r_2} & 2L-\frac{2L^2}{r_2}\\ \frac{4L}{r_1r_2}-\frac{2}{r_1}-\frac{2}{r_2} & \left(\frac{2L}{r_1}-1\right)\left(\frac{2L}{r_2}-1\right)-\frac{2L}{r_1}\end{pmatrix},\tag{19}$$

其中 $r_1$, $r_2$ 分别是两反射面的曲率半径；$L$ 是腔长。它的特征值是

$$M=2g_1g_2-1\pm\sqrt{(2g_1g_2-1^2-1}。\tag{20}$$

而且

$$g_i=1-\frac{L}{r_i},\quad i=1,\ 2。\tag{21}$$

由这些表示式我们可知：

平行平面腔($M=1$, $\theta=0$, $x$ 任意)是一个点光束腔，它的发光点在无穷远。特征态是一个平行于腔轴的平行光束。

共心腔$\left(M=1,\ \theta=-\frac{x}{r_1}\right)$是一个点光束腔，它的发光点位于镜面的曲率中心。实共心腔发光点在腔内，虚共心腔发光点在腔外。

不对称共焦腔或望远镜腔 ($M-r_1/r_2$, $\theta=0$ 或 $\theta=-2x/r_2$)是点光束腔。它的两个共轭发光点分别处于无穷远和焦点处。它的放大倍数取负值意味着光线在腔内往返一周时将发生一个在 $x$ 方向的反转。

共焦腔($M=1$, $\theta$, $x$ 均任意)是一类十分特殊的谐振腔，它是模式简并的，即腔内任意点发出的光线汇都是腔的特征态。

下面指出，无论点光束或高斯光束都是近轴近似的结果。准确地说它们应是扁球函数[8]。因此它们是一致的。如果我们将模式表示为最小光斑处的场分布，无论是点光束的“点”还是高斯光束的腰斑都是扁球函数分布。尤其是由稳定到不稳定的过渡位置，高斯光束的光腰和点的爱里(Airy)斑事实上是同一个分布的二种近似表示而已，是一致的。

对于非轴对称的情形结果要复杂得多。因为光线在 $x$ 方向与 $y$ 方向经受的变换不相同，所以必须同时考虑二个方向的变换。当光线在变换时，如果 $x$ 和 $y$ 方向并不发生关联，那么仍可分别单独处理。这样求得的特征态可能出现多种复杂的组合。例如点-点象散光束；点-高斯无象散光束；点-高斯象散光束；高斯-高斯象散光束；高斯-高斯无象散光束等等。对于 $x$, $y$ 方向关联时，必须用四阶矩阵来处理。

## 参 考 文 献


[1] 高包；«电磁波导与谐振腔»(上海科学出版社，1966)
[2] Л. А. Вайнштейн; *ЖТФ*, 1964, **34**, №. 9(Сен), 1541.
[3] H. Ogura *et al.*; *J. Phys. Soc. Japan.*, 1967, **22**, No. 6(Jun). 1434.
[4] Л. А. Вайнштейн; *ЖЭТФ*, 1963, **44**, №. 3(Мар), 1050.
[5] A. G. Fox, T. Li; *Bell Syst. Tech. J.*, 1961, **40**, No. 2(Mar), 453.
[6] J. B. Keller *et al.*; *Ann. Phys.*, 1960, **9**, No. 24.
[7] A. Maitland, M. H. Dunn; «*Laser Physics*» (Amsterdan-London, 1969)
[8] B. R. Frieden; «*Progress in Optics*, Vol. 9, E. Wolf ed.» (1971)


# A quasi-geometric theory of optical resonators


WANG ZHIJIANG *and* FANG HONGLIE

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)


(Received 7 July 1980)

## Abstract

Some characteristics of optical resonators are analysed in the theory of transform matrix, and it is pointed out that there are two kinds of eigen state in resonators, that is, “point beams”and“Gauss beams”.