第1卷 第1期
1981年1月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 1, No. 1
Jan. 1981

计算光束衍射传输的一种新方法

邓锡铭 方洪烈 林卫平
（中国科学院上海光学精密机械研究所）

提 要

在场流体模型[1]的基础上，建立一个描写光束衍射传输（旁轴）的计算机程序。

如何计算光束的传输，这是一个重要的问题，也是一个已解决的问题。原则上只要求得麦克斯韦(Maxwell)方程的解，一切传输问题都可迎刃而解。但是对于一般情况来说，求解麦克斯韦方程并不容易。为了简化计算，人们采用了一个“波动模型”从麦克斯韦方程得到了费涅耳-克希霍夫(Fresnell-Kirchhoff)定理。事实上对于任意给定的一个初始参考面上的光场分布（一般是振幅分布和相位分布）都可以由克希霍夫积分求得任何其他参考面上的场分布。

现在我们打算介绍另一种简化计算方法。这种方法不是把光理解为一种波动，而是把光理解为一个具有内部张力的流体，采用一个“流体模型”来简化计算。关于这一方法的物理基础已在文献[1]，[2]中作了详细的分析。

对于光束的稳态传输过程，可由文献[1]建立的连续性方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_0^2+\nabla\cdot[\phi_0^2(c\nabla L)]=0 \tag{1}$$

和梯度矢势

$$\boldsymbol{\varphi}=-\frac{1}{2k_0^2}\left(\frac{\nabla\phi_0}{\phi_0}\right) \tag{2}$$

来描写，这里不再重复。本文的目的是利用文献[1]的结果建立一个描写稳态光束传输的计算机程序。

计算程序的建立

光束衍射传输的描述对研究强激光的非线性传输具有重要的意义。大多数具有实际意义的情况均满足如下条件（所用符号与文献[1]相同）

$$(\nabla L)\cdot\boldsymbol{e}\doteq 1, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{e}$ 是沿光束传输轴线的单位矢量，即光束的衍射发散不大的情形。这种情形我们称它为“旁轴衍射”。下面我们就来讨论满足条件(3)时的计算。为此我们取 z 轴作为传输轴，那么则有：

收稿日期：1980年7月7日

$$\left.\begin{aligned}&(\nabla L)_z \doteq 1,\\&\frac{\partial}{\partial z}(\nabla L)_z \doteq 0。\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

下面我们就来根据这些近似建立计算程序。

(1) 已知初始截面(例如 $z=0$ 的垂直截面)上的场分布，即场流体密度分布 $\phi_0^2(z=0)$ 和速度分布 $c(\nabla L_0)_{z=0}$。

(2) 求光束向前传输 δz 距离之后的新截面上的场分布，即 ϕ_1^2 和 (∇L_1)。

如此类推可以求得任意截面上的场分布，从而达到我们的目的。

对于稳态传输，由连续性方程可得到下式(文献[1]的(8)式)：

$$\nabla^2 L = -2\frac{\nabla L\cdot\nabla\phi_0}{\phi_0}。\tag{5}$$

将(5)式展开并代入(4)式则得：

$$\left.\frac{\partial\phi_0^2}{\partial z}\right|_{z=a} = -\left[\frac{\partial\phi_0^2}{\partial x}(\nabla L_0)_x + \phi_0^2\frac{\partial}{\partial x}(\nabla L_0)_x\right] - \left[\frac{\partial\phi_0^2}{\partial y}(\nabla L_0)_y + \phi_0^2\frac{\partial}{\partial y}(\nabla L_0)_y\right]。\tag{6}$$

注意在上式中 $(\nabla L_0)_z$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}(\nabla L_0)_z$ 不出现。故由初始数据代入(6)式即可直接求出下一截面的 ϕ_1 分布，即：

$$\phi_1 = \phi_0 + \left(\frac{\partial\phi_0}{\partial z}\right)\delta z = \phi_0 + \left(\frac{1}{2\phi_0}\frac{\partial\phi_0^2}{\partial z}\right)\delta z。\tag{7}$$

这一步是连续性方程的必然结果。

为了求得下一截面的 $(\nabla L_1)_x$，$(\nabla L_1)_y$，首先让我们写出场流体在初始截面上的动量密度如下：

$$\boldsymbol{p}_0 = \frac{\phi_0^2}{c}\nabla L_0\tag{8}$$

而在下一截面上的动量 $\boldsymbol{p}_1$ 显然等于

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_0 + \delta\boldsymbol{p}。\tag{9}$$

我们知道

$$\delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{T}_0\delta t = \boldsymbol{T}_0\frac{\delta z}{c},\tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{T}_0$ 是场流体的张力(见文献[1]的(11)式)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_0 = \nabla\cdot\boldsymbol{\Phi} = &-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi_0^2\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi_0^2\frac{\partial\varphi_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\phi_0^2\frac{\partial\varphi_x}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{e}_1\\&-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi_0^2\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi_0^2\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\phi_0^2\frac{\partial\varphi_y}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{e}_2\\&-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi_0^2\frac{\partial\varphi_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi_0^2\frac{\partial\varphi_z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\phi_0^2\frac{\partial\varphi_z}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{e}_3,\end{aligned}\tag{11}$$

其中 φ_x，φ_y，φ_z 是梯度矢势 $\boldsymbol{\varphi}$ 的分量。这样便可求得 (∇L_1)。因为

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\phi_1^2}{c}(\nabla L_1),\quad \boldsymbol{p}_0 = \frac{\phi_0^2}{c}(\nabla L_0),$$

且 ϕ_1 已经求得，在具体的计算过程中可能觉得缺少对 z 的微商的计算。这一点可利用差分方法来求得。至此全部计算程序已建立完毕。

最后还必须指出，这样求得的下一截面的场已不是(x_0, y_0)点的场，而是(x_1, y_1)点的场。而

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{p_{x0}}{p_0}\delta z, \\ y_1 &= y_0 + \frac{p_{y0}}{p_0}\delta z, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

式中 p_{x0}, p_{y0} 是动量密度 $\boldsymbol{p}_0$ 沿 x, y 轴向的投影。

计 算 结 果

为了验证上述方法的正确性，我们对一个沿 z 轴传输的一维高斯光束进行了计算。已知

$$\phi_0^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{2x^2}{\sigma^2}\right), \tag{13}$$

$$\sigma = \frac{1}{k_0\sigma_0}\sqrt{k_0^2\sigma_0^4 + 4z^2}。 \tag{14}$$

计算程序是一个粗糙编排的程序，计算在一台 TQ-16 计算机上完成。具体计算参数是

波长 $\lambda = 5000\,\text{Å}$, 光腰 $\sigma_0 = 1\,\text{mm}$, 步长 $\delta z = 2\,\text{mm}$, $10\,\text{mm}$。

从光腰$(z=0)$处算起，算到 $z=100\,\text{mm}$ 处。具体结果见表 1。

表 1　高斯光束的计算结果

波长=5000 Å　光腰=1 mm　距离=100 mm

x (mm)	Gauss*	dz=2mm	dz=10 mm
−0.020000	0.892830	0.892831	0.892835
0.180000	0.864718	0.864719	0.864723
0.380001	0.773118	0.773119	0.773120
0.580001	0.638090	0.638090	0.638089
0.780002	0.486164	0.486165	0.486161
0.980002	0.341939	0.341940	0.341935
1.180003	0.222014	0.222014	0.222009
1.380004	0.133069	0.133069	0.133064
1.580004	0.0736272	0.0736275	0.0736241
1.780005	0.0376067	0.0376069	0.0376046
1.980005	0.0177319	0.0177321	0.0177307
2.180006	0.00771815	0.00771826	0.00771754
2.380006	0.00310123	0.00310130	0.00310095
2.580007	0.00115032	0.00115036	0.00115020

* Gauss 一行代表由(13)，(14)式求得的在 $z=100\,\text{mm}$ 截面的场振幅分布(相对值)。

dz=2mm, dz=10mm 两行分别代表步长为 2, 10mm 计算到 $z=100\,\text{mm}$ 截面的场振幅分布(相对值)。

计算结果表明

1. 步长(δz)越小，精度越高。

2. 步长可取较大的值，即使步长为光腰的50倍仍然获得近 10^{-4} 的精度。

3. 计算表明在场的边缘处有较大的误差，这是由于在计算时采用了有限区域截断引起的。对于截断处的 $\nabla\phi_0$ 是无限大引起的，因此边缘场的处理是一个必须小心的问题。

4. 应该指出：高斯光束衍射传输的分析解(13)式本身也是近似的。光腰半径与波长之比越大，分析解越精确。因此，我们取 $\sigma_0/\lambda=2\times10^3$，以便取得足够精确的数据与我们的计算结果作比较。

5. 对于 $\sigma_0=1\mathrm{mm}$，$\lambda=5000\,\text{Å}$，计算到 $z=1000\,\mathrm{mm}$ 处就足够了。因为光腰对该处的张角已接近衍射角，再往前传输时，衍射光线就可近似看作是直线。以步长为 1 mm 计算到 1000 mm 处的结果见表 2。

表2 计算到1米处的结果

波长＝5000 Å 光腰＝1 mm 距离＝1000 mm

x (mm)	Gauss*	dz＝1mm
−0.020000	0.887328	0.887319
0.180004	0.860062	0.860054
0.380009	0.771060	0.771057
0.580014	0.639380	0.639387
0.780019	0.490592	0.490410
0.980024	0.347880	0.347919
1.180030	0.228271	0.228330
1.380036	0.138539	0.138626
1.580039	0.0777704	0.0777810
1.780039	0.0403804	0.0403327
1.980046	0.0193923	0.0193711
2.180122	0.00861144	0.00875338
2.380230	0.00353627	0.00371877
2.579706	0.00134733	0.00123031

* 同表1，dz＝1 mm 表示步长为 1 mm.

几点讨论

本方法是与克希霍夫积分相辅相成的。

(1) 若只需求远离初始场的一个单一截面的衍射场分布，此时费涅耳数 N 很小，无疑用克希霍夫积分是方便的。而用本方法却需要较大的计算量。

(2) 相反，当欲求的衍射场与初始场很近，即费涅耳数 N 很大时，进行克希霍夫积分需要很大的计算量。而用本方法却仅需很少的计算量可获得具有相当好的精确度。

(3) 若要求不仅是单个截面的衍射场分布，而要知道整个传输过程的衍射分布，则用本方法更有利。

(4) 本方法特别适用于光束通过折射率不均匀的介质时衍射分布的描述，而对于存在折射率不均匀的空间进行克希霍夫积分是极其困难的。

参 考 文 献

[1] 邓锡铭、方洪烈;《激光》, 1979, **6**, No. 11 (Nov), 1.
[2] 邓锡铭、方洪烈;《激光》, 1980, **7**, No. 2 (Feb), 14.

A new method to calculate the diffractional transmission of a light beam

DENG XIMING, FANG HONGLIE *and* LIN WEIPING
(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)

(Received 7 July 1980)

Abstract

A computer program describing the diffractional transmission of a light beam (paraxial) was formed based on the hydrodynamic model of field.