

## 非凸正则化约束的湍流模糊目标复原算法

徐兴贵<sup>1</sup>, 李红<sup>1\*</sup>, 冉兵<sup>2</sup>, 任维贺<sup>3</sup>, 宋俊蓉<sup>1</sup><sup>1</sup>云南财经大学信息学院, 云南 昆明 650051;<sup>2</sup>中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610054;<sup>3</sup>北京空间机电研究所, 北京 100039

**摘要** 针对远距离光电探测系统受大气湍流、光线散射等成像条件影响导致目标图像信噪比低、模糊和几何畸变等退化降质问题,提出一种非凸正则化约束的湍流模糊目标复原算法。首先,利用潜在低秩空间分解(LatLRSD)获得目标低秩分量、纹理分量和高频噪声分量。接着,在小波变换域中对 LatLRSD 模型去噪后获得的两个结构分量进行加权重建,并在所构建的目标重建函数中加入非凸正则化约束条件以改善传统  $l_p$  范数( $p=0, 1, 2$ )作为约束项产生的重建模糊和尺度敏感问题。在远距离湍流成像场景中的目标复原实验表明:和传统算法相比,所提算法能够有效去除湍流目标模糊和噪声,复原后的目标信噪比平均提高约 9 dB,且其适用于多帧或单帧的湍流模糊目标复原场景。

**关键词** 目标复原; 湍流成像; 正则化; 低秩分解

中图分类号 O436

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP240707

## Turbulence-Blurred Target Restoration Algorithm with a Nonconvex Regularization Constraint

Xu Xinggui<sup>1</sup>, Li Hong<sup>1\*</sup>, Ran Bing<sup>2</sup>, Ren Weihe<sup>3</sup>, Song Junrong<sup>1</sup><sup>1</sup>The School of Information, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming 650051, Yunnan, China;<sup>2</sup>Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610054, Sichuan, China;<sup>3</sup>The Institute of Beijing Space Electromechanical Research, Beijing 100039, China

**Abstract** A turbulent fuzzy target restoration algorithm with a nonconvex regularization constraint is proposed to address degradation issues, such as low signal-to-noise ratio, blurring, and geometric distortion, in target images caused by atmospheric turbulence and light scattering in long-range optoelectronic detection systems. First, we utilized latent low-rank spatial decomposition (LatLRSD) to obtain the target low-rank components, texture components, and high-frequency noise components. Next, two structural components were obtained by denoising the LatLRSD model; these were weighted and reconstructed in the wavelet transform domain, and nonconvex regularization constraints were added to the constructed target reconstruction function to improve the reconstruction blur and scale sensitivity problems caused by the traditional  $l_p$  norm ( $p=0, 1, 2$ ) as a constraint term. The results of a target restoration experiment in long-distance turbulent imaging scenes show that compared with traditional algorithms, the proposed algorithm can effectively remove turbulent target blur and noise; the average signal-to-noise ratio of the restored target is improved by about 9 dB. Further, the proposed algorithm is suitable for multiframe or single-frame turbulent blur target restoration scenes.

**Key words** target restoration; imaging through turbulent media; regularization; low-rank decomposition

## 1 引言

近地面大气湍流和气溶胶等非均匀性介质会导致目标成像光路的折射率场非均匀分布,使得光电成像探测器接收到的目标图像产生模糊、抖动、偏移和能量

衰减<sup>[1-2]</sup>,进而降低了对目标的探测、跟踪和识别<sup>[3-5]</sup>能力。可见,有效复原大气湍流场景下的退化降质目标图像具有重要意义,但同时也面临一些挑战。

光电探测系统中湍流退化图像复原方法主要可归纳为基于波前测量的校正方法<sup>[6-7]</sup>、(半)盲复原方法<sup>[8-11]</sup>、

收稿日期: 2024-02-20; 修回日期: 2024-04-10; 录用日期: 2024-04-28; 网络首发日期: 2024-05-06

基金项目: 国家自然科学基金(62161051, 62202415)、兴滇英才支持计划(20220632)

通信作者: \*zz2108@ynufe.edu.cn

子空间分解方法<sup>[12-15]</sup>、融合方法<sup>[16-19]</sup>,以及正则化重建方法<sup>[20-24]</sup>。自适应光学技术<sup>[6-7]</sup>通过一系列波前测量和校正技术对湍流引起的像差进行补偿,进而达到畸变图像复原的目的。自适应光学技术已在等晕性成像场景中的湍流畸变校正方面取得了举世瞩目的效果。然而,近地面光电探测成像系统受近地面大气湍流、大气分子和气溶胶等介质影响严重,该非等晕性成像场景中每个点的光线发生不同程度倾斜和像差,最终导致整个成像靶面上形成时空域上的畸变。此外,一些基于(半)盲复原的方法<sup>[8-11]</sup>通过获取被观测成像场景的点扩散函数,然后进行滤波处理以复原得到稳定的图像帧。然而,这些基于单帧处理的方法不能同时实现时空域的湍流几何畸变校正。基于低秩背景建模的方法<sup>[12-15]</sup>则充分利用背景空间的低秩先验信息挖掘目标结构信息,在不同场景下也取得较好成效。例如:最近的低秩子空间学习方法<sup>[15]</sup>通过构建视频背景时间域相似性和前景目标对象空间连续性,获得了较好的畸变校正结果。然而,在现实探测成像系统中设备抖动或背景时域变化时,图像序列背景的低秩假设很容易受到破坏。另一些基于复小波的融合方法<sup>[16-18]</sup>则采用一种基于复小波融合方法来处理感兴趣区域中的湍流形变。例如,文献<sup>[16-17]</sup>采用频率变换域重建方法去除湍流模糊效应,但该方法对噪声较为敏感。最近,我们基于Retinex的融合方法<sup>[18-19]</sup>将湍流降质目标分解为照度分量和反射分量,重建后获得稳定帧并应用到远

距离运动目标检测。该类Retinex融合方法采用高斯模糊先验知识,主要适用于弱湍流畸变校正的场景。值得一提的是,基于正则化约束下的重建方法<sup>[20-24]</sup>较好地利用了图像纹理先验知识信息,利用凸优化方式重建的目标图像能够较好去除湍流模糊。尽管如此,该方法对复原过程中的高频分量噪声敏感。同时,此类方法难以充分挖掘目标低秩结构信息,导致复原目标的空间几何畸变校正效果不佳。

为克服上述方法在湍流目标重建过程中对噪声敏感、图像空域信息和频率稀疏信息难以获取等挑战,受低秩子空间分解可去除噪声同时保留目标空域结构,同时非凸惩罚因子能够保持图像目标纹理特性先验知识的启发,本文提出一种基于潜在低秩空间分解(LatLRSD)和非凸正则化约束的湍流模糊目标复原算法。首先利用潜在低秩空间分解滤出高频噪声,并获得目标低秩结构分量和纹理结构分量。接着,在小波变换域中加权重建低秩空间分解所获得的两个结构分量,在构建的目标重建函数中加入非凸正则化约束条件,以改善传统 $l_p$ 范数( $p=0,1,2$ )作为约束项时产生的重建模糊和噪声敏感问题。所提复原算法的框架如图1所示。在算法实现过程中,首先通过LatLRSD提取目标图像低秩结构分量( $XZ$ )和边缘显著分量( $LX$ ),去除噪声分量后构建加权的广义非凸正则化(WGNC)目标重建函数,最后基于凸优化方法实现目标的最优稀疏解以重建湍流退化降质目标。

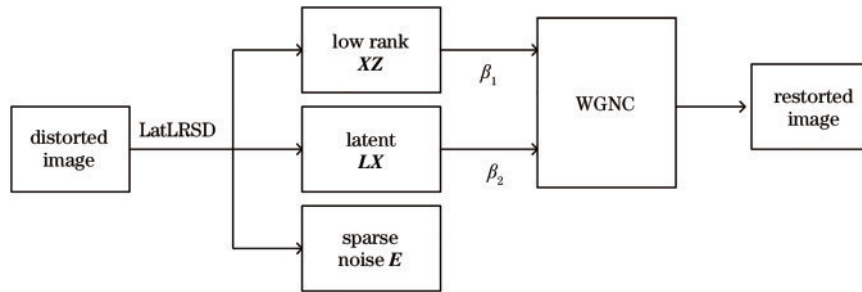


图1 所提算法框架图

Fig. 1 The framework of proposed algorithm

## 2 潜在低秩空间分解

传统的低秩表示(LRR)<sup>[19]</sup>通过去除低秩子空间分解出的噪声分量或修改低秩空间主成分等方式实现数据去噪、稀疏重建等应用。一般地,低秩表示方法将数据空间分解描述为带有约束条件的最小优化问题:

$$\min_{\mathbf{Z}} \|\mathbf{Z}\|, \quad \text{s.t. } \mathbf{X}_0 = \mathbf{AZ} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{X}_0$ 表示以列向量构成的观察数据矩阵; $\mathbf{A}$ 为字典矩阵; $\|\cdot\|$ 表示矩阵核范数,可取所有或主要的奇异值之和。可见,低秩表示方法的目的是在给定字典基空间上优化求解获得能够表示观测矩阵 $\mathbf{X}_0$ 的最小低秩矩阵 $\mathbf{Z}$ 。如文献<sup>[20-21]</sup>所述,传统低秩空间表示中

的字典矩阵 $\mathbf{A}$ 必须要从子空间数据中获得足够多的采样基向量才能保证观测数据得以充分地线性空间表示。值得一提的是,实际的观测矩阵 $\mathbf{X}_0$ 往往带有噪声,而LRR方法的基矩阵出现元素缺失等情况时将导致低秩空间分解方法难以获得最优解。

为改进子空间基向量采样数据不充分并提高分解表示模型的抗噪能力,文献<sup>[22-23]</sup>将字典矩阵改为观测矩阵与显著性稀疏矩阵之和。文献<sup>[23]</sup>采用的奇异值分解(SVD)理论,假定稀疏系数矩阵 $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_0 \ \mathbf{V}_H]$ ,则矩阵分解可表示为 $[\mathbf{X}_0 \ \mathbf{X}_H] = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ ,且 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}_0^T$ 、 $\mathbf{X}_H = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}_H^T$ 。同理,针对湍流图像出现空域上混叠有湍流几何畸变、模糊和噪声等主要退化降质问题,式(1)中的字典矩阵分割提取后改为观测

矩阵与隐藏矩阵,即  $\mathbf{A}=[\mathbf{X}_O \ \mathbf{X}_H]$ ,其中,  $\mathbf{X}_H$  为潜在隐藏分量。据此,基于 LatLRSD 的推导过程,即可将观测矩阵  $\mathbf{X}_O$  表示为以下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_O &= [\mathbf{X}_O \ \mathbf{X}_H] \mathbf{Z}_{O,H}^* = \mathbf{X}_O \mathbf{Z}_{OH}^* + \mathbf{X}_H \mathbf{Z}_{HO}^* = \mathbf{X}_O \mathbf{Z}_{OH}^* + \\ &\quad \mathbf{X}_H \mathbf{V}_H \mathbf{V}_O^H = \mathbf{X}_O \mathbf{Z}_{OH}^* + \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}_H^T \mathbf{V}_O^H = \mathbf{X}_O \mathbf{Z}_{OH}^* + \\ &\quad \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}_H^T \mathbf{V}_H \Sigma^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{X}_O \end{aligned} \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{Z}_{O,H}^*=[\mathbf{Z}_{OH}^* \ \mathbf{Z}_{HO}^*]$ ,为矩阵子空间分解的最优字典基向量空间解,  $\mathbf{Z}_{OH}^*$  和  $\mathbf{Z}_{HO}^*$  分别对应潜在隐藏矩阵  $\mathbf{X}_H$  和观测矩阵  $\mathbf{X}_O$  条件下的最优字典基向量空间解;  $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{V}$  为观测数据条件下的奇异值分解获得的两个基向量空间矩阵。可以看出,仅仅通过观测矩阵  $\mathbf{X}_O$  完全恢复出隐藏分量  $\mathbf{Z}_{OH}^*$  是难以实现的。然而,通过低秩矩阵分解能够获得潜在隐藏矩阵分量的近似解。令  $\mathbf{L}_{HO}^* = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}_H^T \mathbf{V}_H \Sigma^{-1} \mathbf{U}^T$ ,式(2)可简化为

$$\mathbf{X}_O = \mathbf{X}_O \mathbf{Z}_{OH}^* + \mathbf{L}_{HO}^* \mathbf{X}_O \quad (3)$$

假设隐藏矩阵  $\mathbf{X}_H$  和观测矩阵  $\mathbf{X}_O$  均取样于同一矩阵秩为  $r$  的低秩子空间,则通过低秩最小化条件约束可求取含有隐藏矩阵的低秩空间向量表示,目标优化函数为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Z}_{OH}, \mathbf{L}_{HO}} \text{rank}(\mathbf{Z}_{OH}) + \text{rank}(\mathbf{L}_{HO}) \quad \text{s.t. } \mathbf{X}_O = \\ \mathbf{X}_O \mathbf{Z}_{OH} + \mathbf{L}_{HO} \mathbf{X}_O \end{aligned} \quad (4)$$

通过矩阵秩松弛方法<sup>[24]</sup>将子空间矩阵和隐藏矩阵表示为核范数求解式(4)。同时,针对湍流杂波成像场景中观测矩阵中包含大量的符合拉普拉斯分布特性的噪声<sup>[25]</sup>问题,使用  $l_1$  范数来刻画湍流噪声稀疏特性,则低秩子空间分解获取显著性分量问题转化为低秩子空间的凸优化问题:

$$\min_{\mathbf{Z}, \mathbf{L}} \|\mathbf{Z}\|_* + \|\mathbf{L}\|_* \quad \text{s.t. } \mathbf{X} = \mathbf{XZ} + \mathbf{LX} \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{L}$  分别为  $\mathbf{X}_O$ 、 $\mathbf{Z}_{OH}$ 、 $\mathbf{L}_{HO}$  的简化表示,即  $\mathbf{X}$  为观测数据矩阵,  $\mathbf{Z}$  是低秩系数,  $\mathbf{L}$  为潜在隐藏系数。针对远距离湍流成像获取的目标图像含有大量畸变噪声且统计上呈现拉普拉斯分布规律,利用  $l_1$  范数来刻画稀疏湍流噪声,则带有噪声约束的潜在低秩空间分解目标函数为

$$\min_{\mathbf{Z}, \mathbf{L}} \|\mathbf{Z}\|_* + \|\mathbf{L}\|_* + \eta \|\mathbf{E}\|_1 \quad \text{s.t. } \mathbf{X} = \mathbf{XZ} + \mathbf{LX} + \mathbf{E} \quad (6)$$

式中:目标函数求解的  $\mathbf{Z}^*$  即为低秩空间模型分解出的隐藏分量  $\mathbf{Z}_{OH}^*$ ;  $\eta > 0$ ,为正则化约束参数。文献[24]证明,当  $\eta > 1000$  时,式(6)退化为式(5),两者的最优解近似相等。显然,式(6)更具一般性。与文献[3]方法相似,式(6)的优化求解采用增广拉格朗日法(ALM)。令迭代求解过程中  $\mathbf{J}=\mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{S}=\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{Y}_1$ 、 $\mathbf{Y}_2$  和  $\mathbf{Y}_3$  为拉格朗日乘子,则目标函数(6)的增广拉格朗日函数表示为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{J}\|_* + \|\mathbf{S}\|_* + \eta \|\mathbf{E}\|_1 + \text{tr}[\mathbf{Y}_1^T (\mathbf{X} - \mathbf{XZ} - \mathbf{LX} - \mathbf{E})] + \\ \text{tr}[\mathbf{Y}_2^T (\mathbf{Z} - \mathbf{J})] + \text{tr}[\mathbf{Y}_3^T (\mathbf{L} - \mathbf{S})] + \\ \frac{\mu}{2} (\|\mathbf{X} - \mathbf{XZ} - \mathbf{LX} - \mathbf{E}\|_F^2 + \|\mathbf{Z} - \mathbf{J}\|_F^2 + \|\mathbf{L} - \mathbf{S}\|_F^2) \end{aligned} \quad (7)$$

式中:  $\text{tr}(\cdot)$  表示矩阵的迹;  $\|\cdot\|_F$  为矩阵的  $F$  范数。可见,上述无条件约束下的目标函数为凸函数,通过固定其余变量参数值便可逐一地更新各目标分量和拉格朗日乘子。更新公式归纳为

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \arg \min_J \frac{1}{\mu} \|\mathbf{J}\|_* + \frac{1}{2} (\|\mathbf{J} - (\mathbf{Z} + \mathbf{Y}_2/\mu)\|_F^2) \\ \mathbf{S} = \arg \min_S \frac{1}{\mu} \|\mathbf{S}\|_* + \frac{1}{2} (\|\mathbf{S} - (\mathbf{L} + \mathbf{Y}_3/\mu)\|_F^2) \\ \mathbf{Z} = (\mathbf{I} + \mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} [\mathbf{X}^T (\mathbf{X} - \mathbf{LX} - \mathbf{E}) + \mathbf{J} + \\ \quad (\mathbf{X}^T \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2)/\mu] \\ \mathbf{L} = [\mathbf{X}^T (\mathbf{X} - \mathbf{XZ} - \mathbf{E}) + \mathbf{S} + (\mathbf{X}^T \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_3)/\mu] \\ \quad (\mathbf{I} + \mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \\ \mathbf{E} = \arg \min_E \frac{\lambda}{\mu} \|\mathbf{E}\|_1 + \\ \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{E} - (\mathbf{X} - \mathbf{XZ} - \mathbf{LX} + \mathbf{Y}_1)/\mu\|_F^2 \end{cases} \quad (8)$$

综合以上推导和分析,基于 ALM 的潜在低秩空间分解 LatLRSD 算法实现如下:

LatLRSD 算法

input:  $\mathbf{X}_O$ ; parameters  $\{\lambda=0.9, \mu=\epsilon=10^{-6}, \max_\mu=10^5\}$

1) initialization

$\mathbf{Z} = \mathbf{J} = \mathbf{L} = \mathbf{S} = \mathbf{E} = 0$ ;  $\mathbf{Y}_i = 0, i = 1, 2, 3$

2) processing

**While** not converged **do**

fix the others and update  $\mathbf{J}, \mathbf{S}, \mathbf{Z}, \mathbf{L}, \mathbf{E}$  by Eq. (8)

update  $\begin{cases} \mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_1 + \mu(\mathbf{X} - \mathbf{XZ} - \mathbf{E})\mathbf{X}^T \\ \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_2 + \mu(\mathbf{Z} - \mathbf{J}) \\ \mathbf{Y}_3 = \mathbf{Y}_3 + \mu(\mathbf{L} - \mathbf{S}) \end{cases}$

update  $\mu = \min(\mu, \max_\mu)$

3) convergence conditions:  $\begin{cases} \|\mathbf{X} - \mathbf{XZ} - \mathbf{LX} - \mathbf{E}\| < \epsilon \\ \|\mathbf{Z} - \mathbf{J}\| < \epsilon \\ \|\mathbf{L} - \mathbf{S}\| < \epsilon \end{cases}$

4) end

output:  $\mathbf{Z}, \mathbf{L}, \mathbf{E}$

1) 初始化低秩空间的各分量值;2) 按照 ALM 方法迭代更新各分量值;3) 达到收敛条件即可结束迭代输出结果。通过 LatLRSD 算法迭代求解获得低秩系数  $\mathbf{Z}$ 、潜在隐藏系数  $\mathbf{L}$ ,以及稀疏噪声  $\mathbf{E}$ ,如图 2 所示,原湍流模糊降质图像可解耦重建获得低秩空间矩阵  $\mathbf{XZ}^*$ 、潜在分量  $\mathbf{L}^* \mathbf{X}$ ,以及噪声  $\mathbf{E}^*$ 。可以看出,解耦后的 3 个结构分量具有明确的物理含义,能够充分表示原目标的结构先验信息。

LatLRSD 各分量对应的特征奇异值(SV)迭代结果如图 3 所示。不难看出,随着迭代次数增加,各主奇异值越来越集中,这表明该解耦方法获取了目标的主要特征向量信息。综合图 2 和图 3 结果可看出, LatLRSD 分解获得的低秩分量去除了大量噪声,潜在



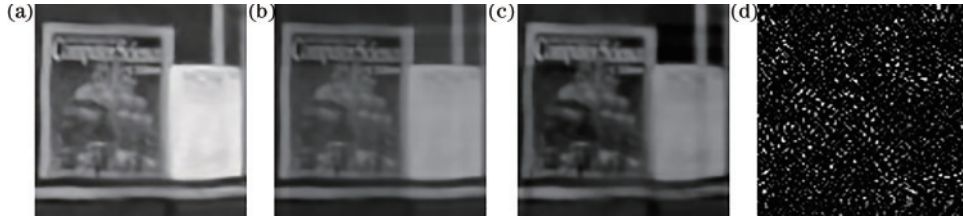


图 2 LatLRSD 的分解结果。(a)~(d)原湍流模糊图  $X_0$ 、低秩字典结构分量  $XZ^*$ 、隐藏分量  $L^*X$  和噪声分量  $E^*$

Fig. 2 Component results of LatLRSD. (a)~(d) Original turbulence blur image  $X_0$ , low rank dictionary structural component  $XZ^*$ , hidden component  $L^*X$ , and noise component  $E^*$

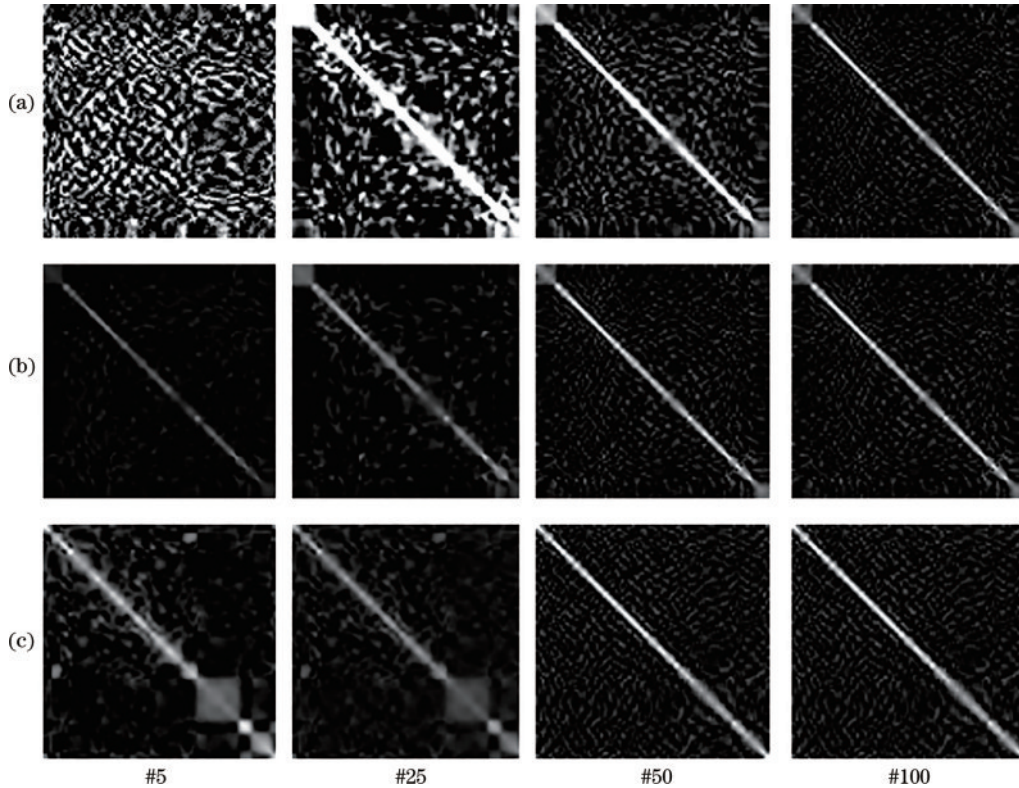


图 3 LatLRSD 的特征奇异值迭代结果。(a)~(c)低秩空间分解中噪声分量、低秩分量和隐藏分量在迭代次数为 #5、#25、#50、#100 时对应的奇异值结果

Fig. 3 Iterative results of eigenvalues for LatLRSD. (a)~(c) Singular value results corresponding to the noise component, low rank component, and hidden component in the low rank space decomposition at iteration numbers of #5, #25, #50, and #100

隐藏信息分量则增加了纹理信息,为非凸正则化重建方法降低了噪声敏感度。

### 3 非凸正则化约束的目标重建模型

针对带噪声的观测矩阵,LatLRSD 在去除噪声的同时能获取隐藏的显著性高频分量和代表全局特征信息的低秩分量。然而,湍流退化降质图像小尺度信息特征模糊严重,直接通过矩阵空间分解系数复原图像面临字典矩阵原子向量数量限制带来的小尺度细节信息较难重构的问题。据此,改进了传统稀疏正则化约束使用  $l_p$  范数带来全局解欠估计的问题,提出一种非凸正则化约束下的多分量加权融合方式。

#### 3.1 非凸正则化约束

基于凸优化的稀疏重建方法能够获得线性系统的稀疏近似解,通常采用  $l_1$  范数约束下的最小二乘代价

函数表示:

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_p \quad (9)$$

式中:  $\lambda > 0$ , 为正则化约束项参数; 代价函数  $J: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  的优化目标即为寻找最优的稀疏解  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ 。然而,当代价函数的解空间维度  $N$  很大时,式(9)获得的近似最优解易出现欠估计情况,导致最终的目标优化函数难以获得真实的最优解,在图像处理应用中表现为难以重建出细节分量。为此,通过改进的非凸惩罚因子代替  $l_p$  范数但保持目标函数整体具有凸性的代价函数可表示为

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \phi_B(\mathbf{x}) \quad (10)$$

式中:  $\phi_B: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  为非凸的正则化约束项且满足整个目标函数  $F$  为凸函数; 矩阵  $\mathbf{B}$  和退化矩阵  $\mathbf{A}$  共同决定了目标函数  $F$  的凸性。为保证并证明式(10)的凸性条

件,文献[17]先从一维向量提出极大极小凹条件并推广到尺度化的广义极小极大凹约束条件。非凸正则化约束函数  $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  定义为

$$\phi(x) := \begin{cases} |x| - \frac{1}{2}x^2, & |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (11)$$

式(11)可以进一步用 Huber 函数  $s(x)$  简化表示,  $\phi(x) = |x| - s(x)$ , 则有  $b \neq 0$  时, 尺度化的 Huber 函数

可表示为

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}b^2x^2, & |x| < \frac{1}{b} \\ |x| - \frac{1}{2b^2}, & |x| \geq \frac{1}{b} \end{cases} \quad (12)$$

从式(12)可以看出, 当  $b \rightarrow 0$  时, 尺度化的 Huber 函数退化为  $l_1$  范数。如图 4 所示, GMC 惩罚因子较  $l_1$  范数正则化约束和 Huber 函数有更多的变化参数空间, 更具有广义性。

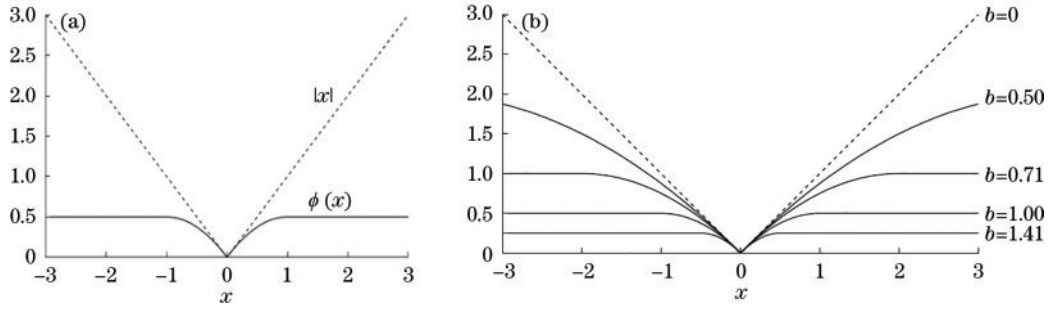


图 4 正则化约束条件示意图。(a) MC 约束; (b) 尺度化的 GMC 约束

Fig. 4 Schematic diagrams of regularization constraint conditions. (a) MC constraint; (b) scaled GMC constraint

进一步, 当  $b \in \mathbf{R}$  时, 式(12)中的尺度化的 Huber 函数可以改写为

$$s_b(x) = \min_{v \in \mathbf{R}} \left[ |v| + \frac{1}{2}b^2(x-v)^2 \right] \quad (13)$$

根据以上公式, 设定  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $a \in \mathbf{R}$  条件下的一维空间目标函数为

$$f(x) = \frac{1}{2}(y-ax)^2 + \lambda\phi_b(x) \quad (14)$$

$\phi_b(x) = |x| - s_b(x)$ , 为尺度化的 GMC 惩罚项,  $\lambda > 0$  为尺度参数。将式(13)代入公式(14)中可得:

$$f(x) = \frac{1}{2}(y-ax)^2 + \lambda|x| - \min_{v \in \mathbf{R}} \left[ |v| + \frac{1}{2}b^2(x-v)^2 \right] = \frac{1}{2}(a^2 - \lambda b^2)x^2 + \lambda|x| + \max_{v \in \mathbf{R}} \left[ \frac{1}{2}(y^2 - 2axyx) - \lambda|v| - \frac{1}{2}\lambda b(v^2 - 2xv) \right] \quad (15)$$

式(15)分解后的后两项均是向量  $x$  的仿射变换, 因此除了第一个子项外其余项均具有凸性。显然, 式(15)满足凸性的充要条件为第一项为凸项, 即满足:

$$a^2 - \lambda b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq a^2/b^2 \quad (16)$$

上述一维的非凸正则化约束条件推广到二维时, 广义的 Huber 函数定义为内积形式的 GMC 函数:

$$s_B(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n} \left[ \|\mathbf{v}\|_1 + \frac{1}{2}\|\mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{v})\|_2^2 \right] \quad (17)$$

类似式(15)中的推导证明, 二维空间上式(2)对应的目标函数为凸的条件为

$$\lambda \leq \frac{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}{\mathbf{B}^T \mathbf{B}} \quad (18)$$

以上推导说明, 非凸正则化约束下的目标函数在满足式(18)所示的条件下即能保证目标代价函数获得全局最优解。值得一提的是, 采用的非凸惩罚因子在 GMC 条件下的稀疏解改进了传统稀疏正则化约束使用  $l_1$  范数带来全局解欠估计的问题。接下来, 针对低秩空间分解的两个分量建立一种非凸正则化约束下的多分量加权融合方式。同时, 将融合模型求解过程放到双树复小波变换(DTCWT)域中实现, 提高了算法的效率以及抗噪能力。

### 3.2 非凸正则化约束的目标重建算法

低秩空间分解方法将时间域图像序列在每一帧空域上不同程度的湍流几何畸变和噪声进行了分解处理, 然而由于时域上的多帧平滑处理以及主奇异值分量去除高频分量均带来低秩空间分解后的模糊。多个分量的重建问题可以表示为如下的泛化形式:

$$\mathbf{y}_i = \beta_i \mathbf{H}_i \mathbf{x} + \mathbf{n}_i \quad (19)$$

式中:  $\mathbf{y}_i$  和  $\mathbf{H}_i$  分别为低秩空间分解获得的各分量向量矩阵(观测矩阵)和模糊卷积表示的退化矩阵;  $\mathbf{x}$  为重建的最终目标矩阵;  $\beta_i$  和  $\mathbf{n}_i$  分别为各分量重建过程的权重系数和噪声;  $i = 1, \dots, N$ 。可见, 式(19)为一种泛化形式。简单起见, 对低秩空间分解获得的低秩分量和隐藏分量进行重建, 即取  $i = 2$ 。与此同时, 文献[17]表明小波域能够获取更加稀疏的图像分量且频率域比傅里叶变换效果更好。本文采用双数小波变换(DTCWT)的尺度不变、多层分解等特性将目标重建问题转换到小波域进行, WGNC 目标重建函数模型为

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{y}_1 - \beta_1 \mathbf{H}_1 \mathbf{W} \mathbf{x} \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \left\| \mathbf{y}_2 - \beta_2 \mathbf{H}_2 \mathbf{W} \mathbf{x} \right\|_2^2 + \lambda \phi_B(\mathbf{x}) \quad (20)$$

式中:前两项即为重建函数的数据保真项; $\mathbf{x}$ 为双数小波变换后的小波表示; $\mathbf{W}$ 为DTCWT方式的逆变换小波域。 $\phi_B: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ 为非凸的正则化约束项且满足整个目标函数 $F$ 为凸函数,即式(17)中的非凸正则化惩罚函数,则目标函数凸条件要满足:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \frac{\gamma}{\lambda} (\mathbf{W}^T \mathbf{H}_1^T \beta_1^2 \mathbf{H}_1 \mathbf{W} + \mathbf{W}^T \mathbf{H}_2^T \beta_2^2 \mathbf{H}_2 \mathbf{W}) \quad (21)$$

可以看出,当观测图像无模糊时,模糊矩阵即退化为单位矩阵,则式(21)变为更简洁的形式: $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \frac{\gamma}{\lambda} [\mathbf{W}^T (\beta_1^2 + \beta_2^2) \mathbf{W}]$ 。在目标函数模型重建中,采用归一化奇异值的方法处理,两个分量的权重关系为 $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$ ,且利用主成分分析(PCA)方式设置权重系数 $\beta_i$ 。对于目标函数(20)的优化,采用前后分裂算法<sup>[17]</sup>转换成鞍点优化问题:

$$(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N} \max_{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^N} F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{y}_1 - \beta_1 \mathbf{H}_1 \mathbf{W} \mathbf{x} \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \left\| \mathbf{y}_2 - \beta_2 \mathbf{H}_2 \mathbf{W} \mathbf{x} \right\|_2^2 + \lambda |\mathbf{x}_1| - \lambda |\mathbf{v}_1| + \frac{\lambda}{2} \left\| \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \right\|_2^2 \quad (22)$$

接着将式(21)中的 $\mathbf{B}$ 代入式(22)则可得到最终的目标函数:

$$(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N} \max_{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^N} F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{y}_1 - \beta_1 \mathbf{H}_1 \mathbf{W} \mathbf{x} \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \left\| \mathbf{y}_2 - \beta_2 \mathbf{H}_2 \mathbf{W} \mathbf{x} \right\|_2^2 + \lambda |\mathbf{x}_1| - \lambda |\mathbf{v}_1| + \frac{\gamma}{2} \left[ \mathbf{W}^T \mathbf{H}_1^T \beta_1^2 \mathbf{H}_1 \mathbf{W} \left\| (\mathbf{x} - \mathbf{v}) \right\|_2^2 + \mathbf{W}^T \mathbf{H}_2^T \beta_2^2 \mathbf{H}_2 \mathbf{W} \left\| (\mathbf{x} - \mathbf{v}) \right\|_2^2 \right] \quad (23)$$

根据上一节推导可知,式(23)为凸函数,则利用前向-后向切分(FBS)算法<sup>[11]</sup>可以求解得到上式鞍点的最佳优化解 $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}})$ ,算法实现如下。

WGNC湍流目标复原算法:

input:  $\rho = \max(1, \gamma/1 - \gamma)$ ,  $\mu: 0 < \mu < 2/\rho$ ,  $K = 100$

1) initialization

$\mathbf{x} = \mathbf{L}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{Z}$

2) processing

for  $i = 0$  to  $K$  do

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{x}}^i = \mathbf{x}^i - \mu \left[ \mathbf{W}^T \mathbf{H}_1^T \beta_1 (\beta_1 \mathbf{H}_1 \mathbf{W} \mathbf{x}^i - \mathbf{L}) + \mathbf{W}^T \mathbf{H}_2^T \beta_2 (\beta_2 \mathbf{H}_2 \mathbf{W} \mathbf{x}^i - \mathbf{S}) \right] + \gamma \left[ \mathbf{W}^T \mathbf{H}_1^T \beta_1^2 \mathbf{H}_1 \mathbf{W} (\mathbf{x}^i - \mathbf{v}^i) + \mathbf{W}^T \mathbf{H}_1^T \beta_1^2 \mathbf{H}_1 \mathbf{W} (\mathbf{x}^i - \mathbf{v}^i) \right] \\ \tilde{\mathbf{v}}^i = \mathbf{v}^i - \mu \gamma \left[ \mathbf{W}^T \mathbf{H}_1^T \beta_1^2 \mathbf{H}_1 \mathbf{W} (\mathbf{x}^i - \mathbf{v}^i) + \mathbf{W}^T \mathbf{H}_1^T \beta_1^2 \mathbf{H}_1 \mathbf{W} (\mathbf{x}^i - \mathbf{v}^i) \right] \\ \mathbf{x}^{i+1} = \text{soft}(\tilde{\mathbf{x}}^i, \mu \lambda) \\ \mathbf{v}^{i+1} = \text{soft}(\tilde{\mathbf{v}}^i, \mu \lambda) \end{array} \right.$$

3) end for

output:  $\mathbf{x}^K$ ,  $\mathbf{v}^K$

1) 初始化目标函数的输入分量值;2) 按照FBS方法迭代更新各分量值;3) 通过软阈值处理各分量;4) 达到收敛条件即可结束迭代输出结果。非凸约束下的目标模型迭代求解过程中获得的结果如图5所示。

## 4 实验结果与分析

对比分析所提算法在4种远距离湍流模糊成像场景<sup>[15,19-20]</sup>中的复原结果,所有实验均在Matlab2020b上用I7 CPU和16 GB RAM实现。图6中退化的湍流模

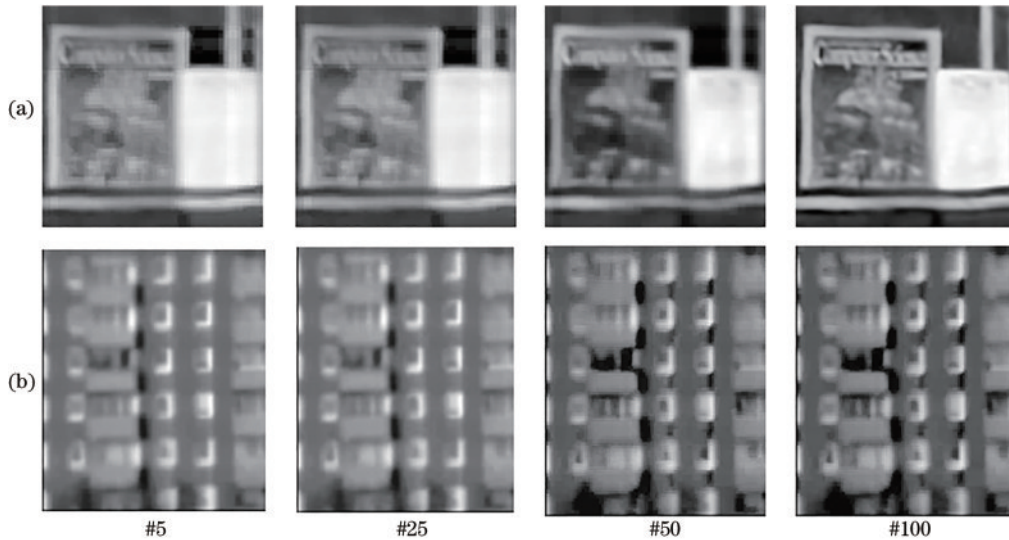


图5 非凸正则化的湍流退化目标复原结果。(a)~(b)两种场景下的非凸目标函数在迭代次数为#5、#25、#50、#100时的对应复原结果  
Fig. 5 The turbulence-degraded targets restoration results of non-convex regularization. (a)~(b) Restoration results for non-convex objective functions in two different scenarios at iteration numbers of #5, #25, #50, and #100



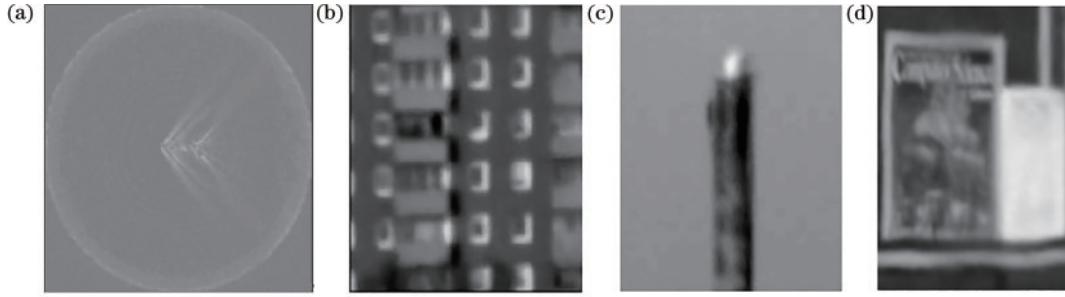


图 6 原退化降质图。(a)~(d)流场目标图像、红外湍流图像、湍流畸变图像和合成的湍流模糊图像

Fig.6 Original images. (a)~(d) Flow field image, infrared turbulence image, long-range turbulence distortion image, and synthesized turbulence blur image

糊图像帧分别代表典型的空对地目标扰动场指纹图像、近地面远距离红外目标、近地面湍流畸变图像和强湍流模糊图像,该 4 种远距离成像条件下的图像均出现不同程度的模糊、噪声和低对比度降质。

#### 4.1 评价指标

远距离退化降质图像的清晰参照图像不易获取,故采用无参考的图像质量评价<sup>[26]</sup>指标,主要包括均熵(ME)、标准差(SD)、边缘强度(EI)和图像对比度指标(IC)。均熵为无量纲的信号随机统计量,该值越大则表示图像信息量越大,也即图像边缘纹理等信息就越丰富,均熵的表达式为

$$ME(x) = \sum_x p(x) \times \log \frac{1}{p(x)} \quad (24)$$

图像标准偏差反映了图像的高频分量,该值越高,对比度越高,图像细节信息也越丰富。图像标准方差的表达式为

$$\begin{cases} SD[\sigma_x^2(i, j)] = \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sum_{k=i-n}^{i+n} \sum_{l=j-n}^{j+n} [x(k, l) - m_x(i, j)]^2 \\ m_x(i, j) = \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sum_{k=i-n}^{i+n} \sum_{l=j-n}^{j+n} x(k, l) \end{cases} \quad (25)$$

边缘强度采用 Sobel 算子来刻画图像边缘细节程度,边缘强度可表示为

$$EI(i, j) = \sqrt{\Delta x f(i, j)^2 + \Delta y f(i, j)^2} \quad (26)$$

式中:Sobel 算子根据文献<sup>[19]</sup>计算得到。

图像对比度指标则将图像分割成  $16 \times 16$  块,得到每个块的最大和最小像素值,计算每个块中的相对对比度并求和:

$$IC(I) = \frac{1}{mn} \cdot \sum_{k=1, l=1}^{m, n} \frac{I_{\max, k, l} - I_{\min, k, l}}{I_{\max, k, l} + I_{\min, k, l}} \cdot \log \frac{I_{\max, k, l} - I_{\min, k, l}}{I_{\max, k, l} + I_{\min, k, l}} \quad (27)$$

#### 4.2 实验结果

原始湍流退化图像如图 6 所示,图 7~11 分别为文献<sup>[12]</sup>、文献<sup>[16]</sup>、文献<sup>[18]</sup>、文献<sup>[20]</sup>算法和所提算法的重建结果,表 1~4 分别为图 6(a)~(d)这 4 个湍流模糊场景对应重建算法的客观评价结果。从主观视觉度和清晰度来看,文献<sup>[16]</sup>和文献<sup>[18]</sup>的融合增强算法仅次于所提算法,但如图 8(a)所示,文献<sup>[16]</sup>算法复原后的图像对比度较低,如图 8(c)所示,红外烟囱上部有较大噪声和畸变,文献<sup>[18]</sup>算法在图 9(a)中的结果显示复原后依然较为模糊。可见,这两种算法增强处理后的流场目标仍然较为模糊,由于没有利用空间区域先验信息,该算法对红外远距离的湍流几何形变的校正效果较弱。文献<sup>[12]</sup>和文献<sup>[20]</sup>两种算法的重建效果最不明显,重建后的图像去噪效果不明显,模糊现象严重,特别是湍流畸变烟囱重建后留有较大重影。相比之下,所提算法在视觉清晰度和对比度方面均得到了较好的提高,如图 11(a)、(b)中的流场目标和红外湍流图像复原后对比度和清晰度极大提高,图 11(c)烟囱上角的畸变



图 7 文献<sup>[12]</sup>算法的复原结果

Fig.7 Restoration results of algorithm of reference<sup>[12]</sup>

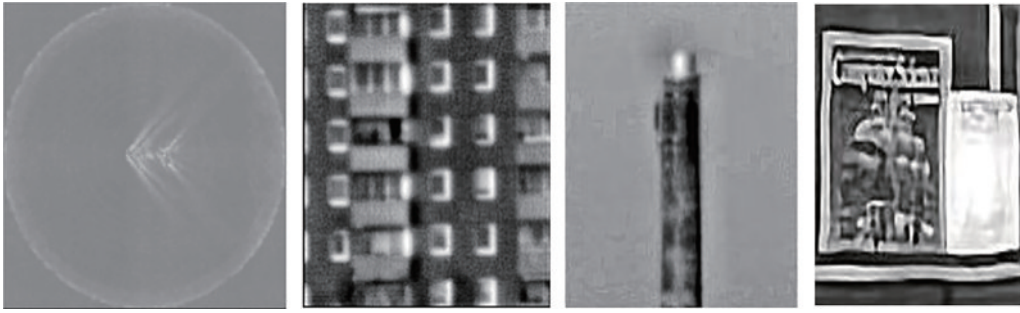


图 8 文献[16]算法的复原结果

Fig.8 Restoration results of algorithm of reference [16]



图 9 文献[18]算法的复原结果

Fig.9 Restoration results of algorithm of reference [18]

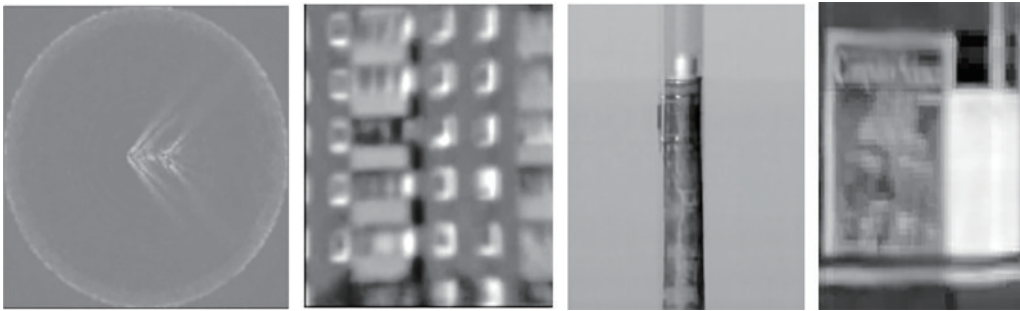


图 10 文献[20]算法的复原结果

Fig.10 Restoration results of algorithm of reference [20]



图 11 所提算法的复原结果

Fig.11 Restoration results of proposed algorithm

得到较好校正且目标纹理得到最好复原,图 11(d)的结果显示,所提算法能够有效地去除模糊效果和噪声,视觉清晰度最高。

从客观评价结果看,所提算法的复原结果在图像平均信息熵、标准梯度方差、图像对比度和边缘密度等客观综合评价方面总体上最好,其中,文献[16]和文

献[18]算法的复原结果稍好于文献[12]和文献[20]算法的。值得注意的是,文献[12]和文献[20]算法处理图 6(c)后的边缘密度指标较文献[16]和文献[18]算法的高但可视化结果没有后者好,原因主要是文献[12]和文献[20]算法的复原结果中存在边缘凸起畸变条纹噪声。此外,以湍流退化图为参考,从图像复



原后的信噪比(SNR)对比结果可以看出,所提算法的客观指标的综合评价方面最好。平均 SNR 提高最多,为 9 dB。总体来看,所提算法在

表1 图6(a)的复原结果评价  
Table 1 Restoration evaluation results of Fig.6(a)

Algorithm	ME	SD	IC	EI	SNR /dB
Algorithm of reference [12]	7.5093	0.0812	0.2492	0.7082	9.2
Algorithm of reference [16]	8.1024	0.0453	0.2915	0.4098	6.4
Algorithm of reference [18]	8.2463	0.0505	0.3064	0.4357	6.2
Algorithm of reference [20]	7.2655	0.0401	0.2027	0.5160	8.5
Proposed algorithm	<b>8.7136</b>	<b>0.0887</b>	<b>0.3983</b>	<b>0.7804</b>	<b>10.3</b>

表2 图6(b)的复原结果评价  
Table 2 Restoration evaluation results of Fig.6(b)

Algorithm	ME	SD	IC	EI	SNR /dB
Algorithm of reference [12]	7.4064	0.0152	0.2204	0.3332	4.7
Algorithm of reference [16]	7.7712	0.0161	0.1864	0.3832	5.5
Algorithm of reference [18]	8.0584	0.0187	0.2235	0.4321	7.7
Algorithm of reference [20]	7.0231	0.0159	0.1317	0.2001	3.5
Proposed algorithm	<b>8.1506</b>	<b>0.0197</b>	<b>0.2345</b>	<b>0.5334</b>	<b>8.0</b>

表3 图6(c)的复原结果评价  
Table 3 Restoration evaluation results of Fig.6(c)

Algorithm	ME	SD	IC	EI	SNR /dB
Algorithm of reference [12]	5.1334	0.0186	0.2015	0.3957	2.8
Algorithm of reference [16]	5.8154	0.0112	0.1964	0.3345	6.5
Algorithm of reference [18]	6.1870	0.0107	0.2354	0.3640	8.5
Algorithm of reference [20]	4.5087	0.0179	0.2369	0.3465	3.6
Proposed algorithm	<b>6.4905</b>	<b>0.0236</b>	<b>0.3362</b>	<b>0.4654</b>	<b>11.1</b>

表4 图6(d)的复原结果评价  
Table 4 Restoration evaluation results of Fig.6(d)

Algorithm	ME	SD	IC	EI	SNR /dB
Algorithm of reference [12]	7.5336	0.0206	0.2219	0.1941	3.7
Algorithm of reference [16]	5.4632	0.0214	0.2763	<b>0.2457</b>	<b>7.5</b>
Algorithm of reference [18]	5.6127	0.0210	0.2854	0.1980	8.1
Algorithm of reference [20]	5.0870	0.0220	0.2001	0.1967	6.2
Proposed algorithm	<b>6.0904</b>	<b>0.0308</b>	<b>0.3572</b>	0.2350	7.2

## 5 结 论

为改善远距离成像条件下目标图像信噪比低、模糊和湍流几何畸变等退化降质问题,提出一种非凸正则化约束的低秩子空间分解算法。所提算法通过子空间分解滤出高频噪声,能够获得目标低秩分量和纹理结构分量。同时,在所构建的目标重建函数中加入非凸正则化约束条件,改善传统  $l_p$  范数作为约束项时产生的重建模糊和噪声敏感问题。在远距离湍流成像场景中的目标复原实验结果表明,所提算法能够同时去除模糊和畸变,提高复原目标的信噪比,并且该算法适用于盲复原和多帧单帧重建等多个场景。下一步,可开展该算法在文献[27-30]等多种场景中的应用研究。

## 参 考 文 献

- [1] Wu J L, Ke X Z, Feng X R. Measurement of transverse wind speed in atmospheric turbulence by cross-correlation algorithm[J]. Optical Engineering, 2022, 61(6): 066110.
- [2] Ma J Y, Ma Y, Li C. Infrared and visible image fusion methods and applications: a survey[J]. Information Fusion, 2019, 45: 153-178.
- [3] Radhakrishnan V M, Keller C U, Doelman N J, et al. Estimating non-common path aberrations with an adaptive coronagraph[J]. Astronomy & Astrophysics, 2023, 670: A137.
- [4] Liu Y, Chen X, Wang Z F, et al. Deep learning for pixel-level image fusion: recent advances and future

- prospects[J]. *Information Fusion*, 2018, 42: 158-173.
- [5] Luo Y Y, He K J, Xu D, et al. Infrared and visible image fusion based on visibility enhancement and norm optimization low-rank representation[J]. *Journal of Electronic Imaging*, 2022, 31(1): 013032.
- [6] Xu X G, Yang P, Liu Y, et al. Geometric distortion correction of long-range imaging containing moving objects[J]. *Journal of Optics*, 2019, 21(1): 015702.
- [7] Neuner B, Lilledahl S D, Laxton B, et al. Digital adaptive optics with interferometric homodyne encoding for mitigating atmospheric turbulence[J]. *Optical Engineering*, 2023, 62(2): 023104.
- [8] Li H H, Yu L, Zhang L, et al. Dark channel constraint and alternated direction multiplier optimization of turbulence degraded image blind restoration[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2018, 36(1): 103-109.
- [9] Huang W, Wei Y. Single image dehazing via color balancing and quad-decomposition atmospheric light estimation[J]. *Optik*, 2023, 275: 170573.
- [10] Zhang L H, Zhai Y J, Xu R C, et al. End-to-end computational ghost imaging method that suppresses atmospheric turbulence[J]. *Applied Optics*, 2023, 62(3): 697-705.
- [11] Chen G P, Gao Z S, Wang Q L, et al. U-net like deep autoencoders for deblurring atmospheric turbulence[J]. *Journal of Electronic Imaging*, 2019, 28(5): 053024.
- [12] Li H, Wu X J. Infrared and visible image fusion using latent low-rank representation[EB/OL]. (2018-04-24) [2024-05-06]. <https://arxiv.org/abs/1804.08992>.
- [13] Su C D, Wu X Q, Guo Y M, et al. Atmospheric turbulence degraded image restoration using a modified dilated convolutional network[J]. *IET Image Processing*, 2022, 16(13): 3507-3517.
- [14] Yong H W, Meng D Y, Zuo W M, et al. Robust online matrix factorization for dynamic background subtraction [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2018, 40(7): 1726-1740.
- [15] Anantrasirichai N, Achim A, Kingsbury N G, et al. Atmospheric turbulence mitigation using complex wavelet-based fusion[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2013, 22(6): 2398-2408.
- [16] Anantrasirichai N, Zheng R C, Selesnick I, et al. Image fusion via sparse regularization with non-convex penalties [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2020, 131: 355-360.
- [17] Xu X G, Yang P, Xian H, et al. Robust moving objects detection in long-distance imaging through turbulent medium[J]. *Infrared Physics & Technology*, 2019, 100: 87-98.
- [18] 徐兴贵, 杨润华, 冉兵, 等. 融合 Retinex 和离散小波奇异值分解的远距离目标图像清晰化[J]. *应用光学*, 2021, 42(4): 656-663, 754.
- Xu X G, Yang R H, Ran B, et al. Remote object image enhancement of fusion Retinex and discrete wavelet singular value decomposition[J]. *Journal of Applied Optics*, 2021, 42(4): 656-663, 754.
- [19] Hua X, Pan C, Shi Y, et al. Removing atmospheric turbulence effects via geometric distortion and blur representation[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2022, 60: 4100113.
- [20] Wang Z Y, Li X P, So H C, et al. Robust PCA via non-convex half-quadratic regularization[J]. *Signal Processing*, 2023, 204: 108816.
- [21] Chen Y Y, Xu T T, Zhao X J, et al. Asymmetry total variation and framelet regularized nonconvex low-rank tensor completion[J]. *Signal Processing*, 2023, 206: 108901.
- [22] Cao J X, Liu S J, Liu H Q, et al. Simultaneous non-convex low rank regularization for fast magnetic resonance spectroscopy reconstruction[J]. *Digital Signal Processing*, 2023, 132: 103795.
- [23] Liu G C, Yan S C. Latent Low-Rank Representation for subspace segmentation and feature extraction[C]//2011 International Conference on Computer Vision, November 6-13, 2011, Barcelona, Spain. New York: IEEE Press, 2011: 1615-1622.
- [24] Zhu G L, Lv X G, Jiang L, et al. Nonconvex regularization for convex image smoothing[J]. *Signal Processing*, 2023, 205: 108862.
- [25] Ma R J, Li S Y, Zhang B, et al. Meta PID attention network for flexible and efficient real-world noisy image denoising[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2022, 31: 2053-2066.
- [26] Athar S, Wang Z. Degraded reference image quality assessment[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2023, 32: 822-837.
- [27] 张昊镓, 孙刚, 朱黎明, 等. 利用超声风速仪阵列估算近海面光学湍流强度[J]. *光学学报*, 2023, 43(6): 0601001.
- Zhang H J, Sun G, Zhu L M, et al. Estimation of optical turbulence intensity near sea surface using ultrasonic anemometer array[J]. *Acta Optica Sinica*, 2023, 43(6): 0601001.
- [28] 陈海涛, 高曾辉. 相干涡旋和刃型位错在海洋湍流中的相互作用[J]. *中国激光*, 2024, 51(8): 0805002.
- Chen Haitao, Gao Zenghui. Interaction between coherence vortex and edge dislocation in oceanic turbulence[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2024, 51(8): 0805002.
- [29] 耿丹, 朱文越, 彭进先, 等. 利用多源测量数据实时估算整层大气光学湍流[J]. *光学学报*, 2023, 43(18): 1801003.
- Geng D, Zhu W Y, Peng J X, et al. Real-time estimation of whole-layer atmospheric optical turbulence with multi-source measurement data[J]. *Acta Optica Sinica*, 2023, 43(18): 1801003.
- [30] Chen Y X, He Y H, Liu L Y, et al. Plasma-based terahertz wave photonics in gas and liquid phases[J]. *Photonics Insights*, 2023, 2(3): R06.