

## 计算全息图的高效编码方法

李春琦<sup>1,2,3,4</sup>, 黄启泰<sup>1,2,3,4\*</sup>, 任建锋<sup>1,2,3,4</sup><sup>1</sup>苏州大学光电科学与工程学院, 江苏 苏州 215006;<sup>2</sup>苏州大学苏州纳米科技协同创新中心, 江苏 苏州 215006;<sup>3</sup>苏州大学江苏省先进光学制造技术重点实验室, 江苏 苏州 215006;<sup>4</sup>苏州大学教育部现代光学技术重点实验室, 江苏 苏州 215006

**摘要** 利用计算全息图(CGH)能够实现对非球面面形的高精度检测。为了提高CGH的编码效率,提出一种以圆弧为基元对刻线条纹进行分段描述的编码方法,该方法将编码过程分为二值化编码和曲线描述两个步骤。二值化编码采用牛顿迭代法将相位等高分界线离散化;曲线描述结合二分法及残余误差均方根最小准则,利用圆弧对条纹离散点进行编码计算,从而得到刻线条纹。针对一离轴非球面,进行了CGH的设计、编码与制作,在编码精度优于 $\lambda/1000$ 的前提下,运算时间仅需3 h,编码文件仅为39 MB,刻蚀时长仅需40 min,证明所提方法相对于传统编码方法能够大幅度提高编码效率,且误差分析表明CGH的波前root-sum square(RSS)误差仅为 $0.00255\lambda$ ,证明所提编码方法高效可行。

**关键词** 计算全息图; 编码计算; 圆弧; 刻线条纹

中图分类号 O438.1

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP230788

## Efficient Encoding Method for Computer-Generated Hologram

Li chunqi<sup>1,2,3,4</sup>, Huang Qitai<sup>1,2,3,4\*</sup>, Ren Jianfeng<sup>1,2,3,4</sup><sup>1</sup>School of Optoelectronic Science and Engineering, Soochow University, Suzhou 215006, Jiangsu, China;<sup>2</sup>Collaborative Innovation Center of Suzhou Nano Science and Technology, Soochow University, Suzhou 215006, Jiangsu, China;<sup>3</sup>Key Laboratory of Advanced Optical Manufacturing Technologies of Jiangsu Province, Soochow University, Suzhou 215006, Jiangsu, China;<sup>4</sup>Key Laboratory of Modern Optical Technologies of Education Ministry of China, Soochow University, Suzhou 215006, Jiangsu, China

**Abstract** A computer-generated hologram (CGH) can be used to detect an aspheric surface with high accuracy. To enhance the encoding efficiency of the CGH, this paper proposes an encoding method for the segmented description of engraved stripes with a circular arc as the primitive, dividing the encoding process into two steps: binary encoding and curve description. The binary encoding employs the Newtonian iteration method to discretize the phase contour dividing line. The curve description combines the dichotomy and the minimum root-mean-square criterion of the residual error. Furthermore, by leveraging the circular arc to encode the discrete points of the engraved stripes, the engraved stripes are obtained. In this paper, the CGH is designed, encoded, and generated for an off-axis aspheric surface. To obtain an encoding accuracy higher than  $\lambda/1000$ , the operation time is only 3 h, the encoded file is only 39 MB, and the etching time is only 40 min. This demonstrates that the proposed method can considerably enhance the encoding efficiency compared with the traditional encoding method. Error analysis suggests that the wavefront root-sum square (RSS) error of the CGH is only  $0.00255\lambda$ , demonstrating that the proposed encoding method is efficient and feasible.

**Key words** computer-generated hologram; encoding calculation; arc; engraved stripe

## 1 引言

计算全息法是一种高精度的非球面面形检测方

法,该方法利用计算全息图的衍射条纹图样对入射光场进行不同程度的相位调制<sup>[1-3]</sup>,实现零位检测。计算全息图(CGH)的编码过程是将CGH的相位数据转换

收稿日期: 2023-03-07; 修回日期: 2023-03-28; 录用日期: 2023-04-12; 网络首发日期: 2023-04-25

通信作者: \*huangqitai@suda.edu.cn

成刻蚀条纹数据,然后刻蚀设备以条纹为刻蚀路径进行加工制作。

常用的编码方法有很多,例如非极大值抑制法、迭代求解法、直线逼近法等。非极大值抑制法<sup>[4]</sup>先确定每个待测点的支持域,在支持域内利用曲率检测算法对特征点进行筛选,在满足误差范围的情况下利用尽量少的数据点逼近原曲线。迭代求解法<sup>[5]</sup>对等相位曲线进行等步长采样及迭代求解,刻蚀设备直接以离散点坐标数据生成直线式的加工路径,对于 40 mm 口径的 CGH,加工文件大小大约为 1~2 GB。直线逼近法<sup>[6-9]</sup>利用变步长搜索法以编码精度为需求确定误差边界曲线,并根据相位梯度分布大小动态选取编码步长,对刻线条纹进行离散化分割,刻蚀设备沿相邻离散点连线生成的多边形路径进行加工,对于 32 mm 口径的 CGH,将产生 200 MB 左右的编码数据。但是,以上方法本质上都属于直线式的加工方法,编码效率低、运算数据量极大、加工文件大,而且对于复杂曲线的刻线条纹,将产生更多的运算数据,这都限制了计算全息法的广泛应用。

为了在编码精度满足需求的同时,提高对 CGH 的编码效率,本文将编码过程分为二值化编码和曲线描述两个步骤,提出一种分段圆弧曲线描述刻线条纹的编码方法。该方法首先根据 CGH 的补偿相位分布获取相位等高分界线,接着用牛顿迭代法将条纹分界线离散化,得到一系列的离散采样点,完成二值化编码;然后依据条纹曲线的形态对其进行分类,并设定划分的判断条件及对应的索引范围;最后基于二分法和残余误差均方根最小准则,以编码误差为反馈条件,以圆弧为基元对离散点进行拟合计算并寻求拟合坐标区间最优解,得到分段曲线描述刻线条纹,实现高效的编码计算,从而提高光刻机的数据处理速度,减少机器处理时间,降低成本。

## 2 编 码

CGH 属于衍射光学元件,刻蚀条纹图案由相位分

布决定。通过编码将 CGH 的相位数据转换成刻蚀条纹数据,然后将刻蚀条纹数据转换成刻蚀设备可识别的位置数据并刻蚀在基板上,从而得到全息图。因此,编码计算直接决定了 CGH 的相位调制能力,影响着对非球面的检测精度,对计算全息图的设计是至关重要的。本文将编码过程分为二值化编码和曲线描述两个步骤。

### 2.1 二值化编码

二值化编码将连续的相位分布转换成相位等高分界线,即连续的刻线条纹。每当相位改变  $2\pi$ ,就能够确定一条刻线条纹,每条条纹包括上、下两条分界线。将相位函数对  $\pi$  取模,也就是获得任意高度值为  $\pi$  的等高分界线,

$$\Phi(x, y) = Lm\pi, \quad (1)$$

式中:  $m$  为衍射级次;  $L$  为刻线条纹序数,  $L=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $(x, y)$  为采样坐标。由于分界线是坐标平面的光滑曲线,需要将其离散化得到离散采样点。而式(1)为非线性方程,无法求解出每个采样坐标的解析解,所以创建关于采样坐标和刻线条纹序数的非线性函数,并利用牛顿迭代法求解采样坐标的数值解。

$$f(x, y, L) = \Phi(x, y) - Lm\pi = 0, \quad (2)$$

$$y = Y_0 - \frac{f(x, y, L)}{f'_y(x, y, L)}, \quad (3)$$

式中:  $Y_0$  为初始点的纵坐标;  $f'_y$  为待求点坐标在非线性函数中对  $y$  的偏导值。对于简单形式的刻线条纹,利用牛顿迭代法求解的坐标数据是一一对应的关系,即一个横坐标对应一个纵坐标。然而,实际的刻线条纹形式复杂,将呈现出不同的曲线形态,一个坐标可能对应多个解。若直接对其进行离散采样,牛顿迭代法可能会失效。因此需要根据条纹形态将其分类,使牛顿迭代法能够准确地求解出每一类条纹曲线的采样坐标。图 1 为划分的闭合曲线、回旋曲线和常规曲线的示意图。

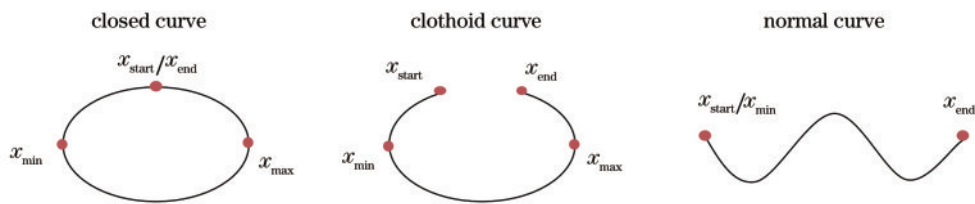


图 1 条纹分类示意图

Fig. 1 Schematic of fringe classification

其中,  $x_{start}$  和  $x_{end}$  为曲线起点和终点对应的坐标,  $x_{min}$  和  $x_{max}$  为曲线在  $x$  方向上的最小和最大值对应的坐标。对于常规曲线,从  $x_{min}$  开始正向步进进行迭代搜索;对于闭合曲线和回旋曲线,根据判断条件将其索引范围划分成 3 个区域,每个区域内沿  $x$  轴进行正向步

进或反向步进。表 1 为条纹划分的判断条件及对应的索引范围。

根据以上分类原则,在条纹起始点之间的不同索引范围利用式(3)进行迭代计算,获取一系列的离散采样点,完成二值化编码计算。

表 1 不同类型的条纹对应的判断条件和索引范围

Table 1 Different types of fringes corresponding to the judgment conditions and index range

| Fringe type    | Judgment condition       | Index range   |
|----------------|--------------------------|---|
| Closed curve   | $x_{start} = x_{end}$    | $x_{start} \rightarrow x_{min} \rightarrow x_{max} \rightarrow x_{end}$ |
| Clothoid curve | $x_{start} \neq x_{min}$ | $x_{start} \rightarrow x_{end}$   |
| Normal curve   | $x_{start} = x_{min}$    |   |

### 2.2 曲线描述

由于二值化编码计算获取的离散采样点数据量极

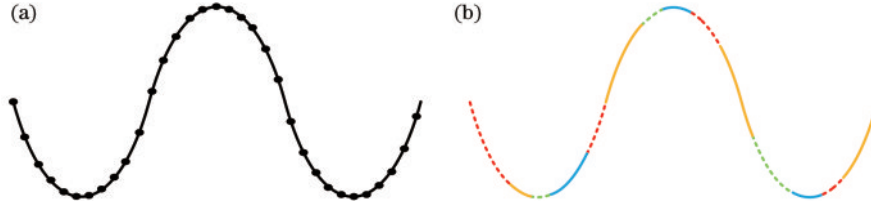


图 2 圆弧描述。(a)原始曲线及采样点;(b)多段圆弧描述离散点的示意图

Fig. 2 Arc description. (a) Original curve and sampling points; (b) schematic of multi-segment arc depicting discrete points

而且,采用圆弧编码的计算复杂度低,且在同等编码精度下,圆弧描述刻线条纹产生的编码数据量远远小于直线描述的编码数据量。另外,当曲线曲率变化较大时,采用圆弧描述的编码效率将显著提升。以下为圆弧编码的计算过程。

将二值化编码计算获取的相位为  $\pi$  的整数倍的离散采样点坐标代入到拟合圆的方程中,有

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R_0^2, \quad (4)$$

式中:  $(x, y)$  为离散采样点坐标;  $(x_0, y_0)$  为拟合圆的圆心坐标;  $R_0$  为拟合圆的半径。对于每个坐标点,代入式(4)中都能得到一个线性方程式。若有  $t$  个离散点,可以得到线性方程组,为

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_t & y_t & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^2 - y_1^2 \\ -x_2^2 - y_2^2 \\ \vdots \\ -x_t^2 - y_t^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中:  $a = -2x_0, b = -2y_0, c = x_0^2 + y_0^2 - R_0^2$ 。将式(5)转换成矩阵表达式  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , 那么有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_t & y_t & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -x_1^2 - y_1^2 \\ -x_2^2 - y_2^2 \\ \vdots \\ -x_t^2 - y_t^2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

矩阵表达式的最小二乘解为

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}, \quad (7)$$

依据  $\mathbf{X}$  即可得到拟合圆的圆心坐标  $(x_0, y_0)$  和圆弧半径  $R_0$ 。由于只需要描述离散点的所在位置,因此采用拟合圆上的一段圆弧描述即可,那么还需要根据  $t$  个离散点的首尾两点坐标计算出圆弧的起始角  $(\theta_1, \theta_2)$ 。

大,所以需要采用数学方法对采样点进行描述。以圆弧为基元对离散点进行编码,得到多段首尾相连的分段曲线描述刻线条纹,从而降低编码数据量。图 2(a) 为原始曲线及采样点,图 2(b) 为多段圆弧描述离散点的示意图,不同线型的曲线表示一段圆弧曲线,每段圆弧描述若干个离散点。可以看出:在曲线的曲率变化较大处,采样点数增多,所需圆弧曲线段数随之增多;在曲率变化较小处,采样点数减少,所需圆弧曲线段数也随之减少。由此可见,圆弧能够贴切地体现曲线曲率的变化情况<sup>[10]</sup>。

由以上关键参数就能够确定任意一段圆弧。

在圆弧拟合算法中,为了寻求一段圆弧能够描述的离散坐标区间的最优解,结合二分法和残余误差均方根最小准则,以编码误差为反馈条件进行迭代求解。图 3 为坐标区间最优解的判决流程,输入为待拟合的离散点坐标,输出为坐标区间最优解,其中 RMS 是编

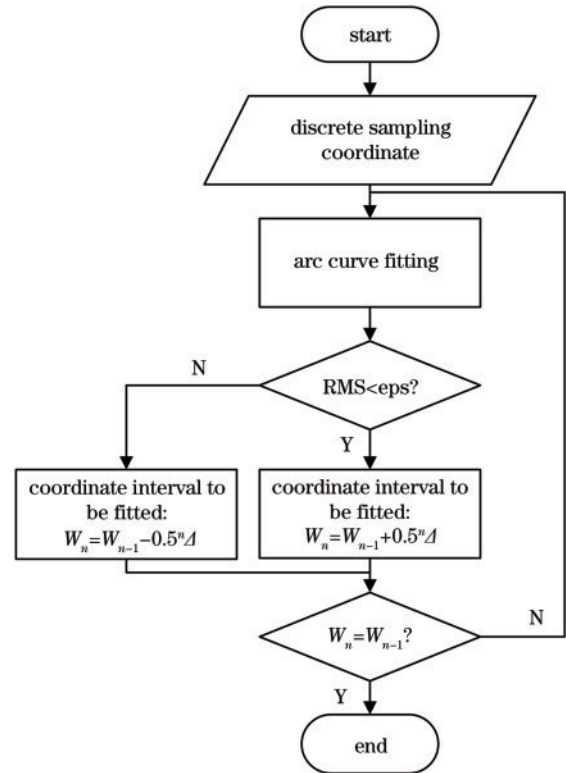


图 3 坐标区间最优解的判决流程

Fig. 3 Decision flow chart of the optimal solution of the coordinate interval



码误差,  $\epsilon$  是编码精度的阈值。图 4 为编码误差示意图, 实线为理想曲线, 虚线是法向误差为  $\delta$  的上下边界, RMS 为所有离散点到拟合圆弧的最短距离的残余误差均方根值。

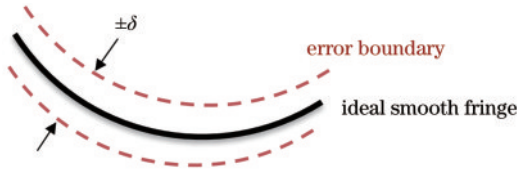


图 4 编码误差示意图

Fig. 4 Schematic of encoding errors

根据编码精度的实际需求设定阈值  $\epsilon$ , 然后依据编码误差 RMS 与阈值  $\epsilon$  的大小关系, 在每次拟合计算时, 基于二分法思想, 在前一次拟合的坐标区间中加入或者舍弃  $0.5\Delta$  个坐标。

$$W_n = W_{n-1} \pm \text{int}(0.5\Delta), \quad (8)$$

式中:  $W_{n-1}$  为前一次循环的坐标区间;  $W_n$  为当前循环的坐标区间;  $n$  为寻找坐标区间最优解的循环次数;  $\Delta$  为设定的加入或者去掉的坐标个数;  $\text{int}$  函数为取整函数。

根据流程图中的判断条件, 不断更新待拟合的坐标区间, 寻求坐标区间最优解并求解对应的圆弧参数。然后, 对当前刻线条纹序数下的剩余离散点进行新一轮的编码计算并得到所有圆弧参数, 即可利用多段首尾相连的圆弧曲线描述条纹。接着, 遵循分层填充的设计思想<sup>[11]</sup>, 依次对相位为  $\pi$  的整数倍的所有条纹进行编码计

算, 最后将圆弧参数转换成 CGH 的加工文件即可。

### 3 仿真与分析

对一离轴非球面进行检测, 图 5 为 CGH 检测离轴非球面的系统模型, 刻蚀面朝向干涉仪, 通过对 CGH 进行相位调制将干涉仪发出的球面波转换成与待测面波面相匹配的非球面波, 从而完成非球面的面形检测。其中,  $d_1$  为 CGH 到离轴非球面几何中心点的轴向距离,  $d_2$  为干涉仪焦点 F 到 CGH 的距离。

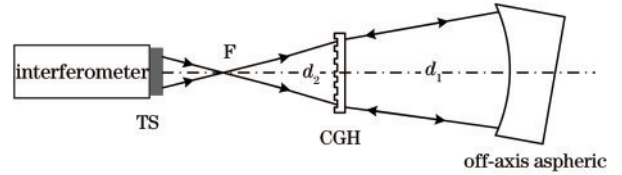


图 5 CGH 检测离轴非球面的系统模型

Fig. 5 Systematic model for CGH detection of off-axis aspheric surface

表 2 为非球面参数和系统参数, 非球面的顶点曲率半径  $R$  为 700 mm、直径  $D$  为 100 mm、二次曲面系数  $K$  为 -1、离轴量为 150 mm, 材料为微晶玻璃;  $d_1$  为 460 mm、 $d_2$  为 271.5 mm、CGH 主全息口径为 40 mm, 材料为熔石英, 检测波长  $\lambda$  为 632.8 nm。

利用 Zemax 软件的光线追迹功能求解 CGH 主全息的补偿相位, 其相位分布如图 6(a) 所示, 单位为弧度, 主全息部分采用相位型 CGH。图 6(b) 为仿真系统的波前图, 残余波像差峰谷值 (PV) 为  $0.0014\lambda$ , RMS 为  $0.0002\lambda$ , 证明该光学系统的成像质量理想。

表 2 非球面参数和系统参数

Table 2 Aspheric parameters and system parameters

| Aspheric parameter | $R$ /mm   | $D$ /mm   | $K$                          | Off-axis distance /mm | Material             |
|--------------------|-----------|-----------|------------------------------|-----------------------|----------------------|
|                    | 700       | 100       | -1                           | 150                   | Zerodur              |
| System parameter   | $d_1$ /mm | $d_2$ /mm | Null pattern in diameter /mm | Substrate material    | Thickness of CGH /mm |
|                    | 460       | 271.5     | 40                           | Fused silica          | 1.5                  |

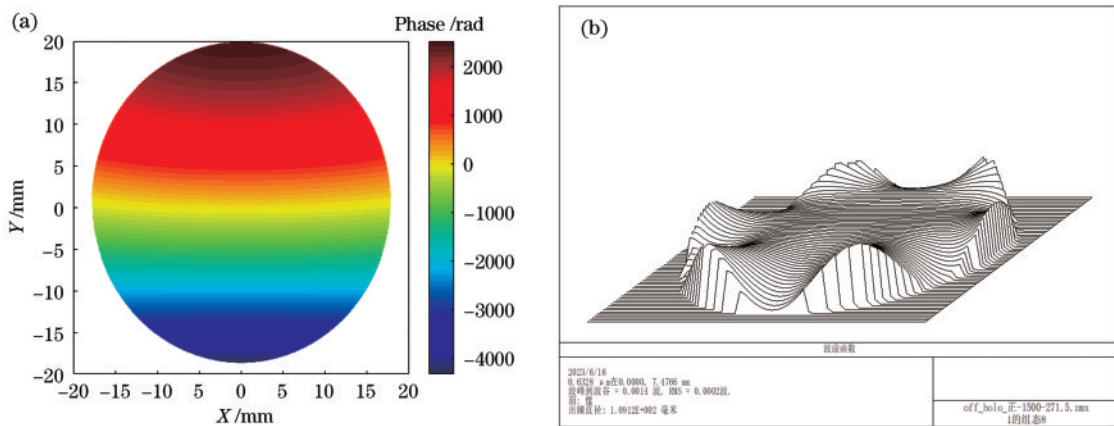


图 6 设计与仿真。(a) 相位分布; (b) 系统波前

Fig. 6 Design and simulation. (a) Phase distribution; (b) system wavefront

获得相位数据之后,即可采用所提二值化编码和曲线描述对其进行编码计算,设定编码精度优于  $\lambda/1000$ ,并依据圆弧参数生成 DXF 格式的加工文件,此时运算时长仅需 3 h,编码文件仅为 39 MB,表明所提编码方法能够提高运算效率,压缩编码数据量。

为了验证所提编码方法在提高编码效率的同时,能够保证检测的可行性,需要对编码误差进行计算。任何偏离理想条纹的情况都会产生波前相位误差,这种相位误差定义为编码误差。编码误差引起的波像差可以表示为

$$\Delta W = |m\lambda\delta/d|, \quad (9)$$

式中: $\lambda$ 为工作波长; $d$ 为刻线间距。主全息图的编码计算误差  $\delta$  为 9.45 nm,最小刻线间距为 11.10  $\mu\text{m}$ ,可以计算出编码误差引起的波前误差为 0.00085 $\lambda$ 。然后对 CGH 的设计、编码和制作过程中的所有误差源引起的波前误差进行分析与汇总,全面评估计算全息图的检测精度,分析结果如表 3 所示。

由表 3 可知,各个误差源引起的波前误差的合成

表 3 波前误差

Table 3 Wavefront errors

| Source of error          | Wavefront error (RMS) |                   |
|--------------------------|-----------------------|-------------------|
| Design residual error    | 0.00020 $\lambda$     |                   |
| Encoding error           | 0.00085 $\lambda$     |                   |
| Pattern distortion error | 0.00180 $\lambda$     |                   |
| Etching error            | Duty-cycle error      | 0                 |
|                          | Etching depth error   | 0.00156 $\lambda$ |
|                          | Amplitude ratio error | 0.00023 $\lambda$ |
| Sum of error (RSS)       | 0.00255 $\lambda$     |                   |

误差(RSS)为 0.00255 $\lambda$ ,证明所提编码方法高效可行。接下来,利用编码文件加工制作 CGH,图 7(a)为 CGH 实物图和衍射区域的分布情况,包括主全息、对准全息和基准全息。图 7(b)为显微镜观察到的 CGH 的微观条纹图样。CGH 的刻蚀时长仅需 40 min,证明所提编码方法能够提高光刻机的数据处理速度,减少机器处理时间。

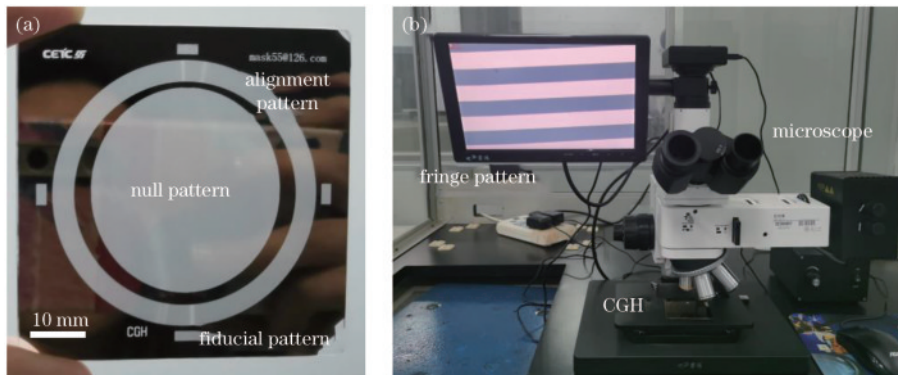


图 7 CGH。(a)实物图;(b)条纹图样  
Fig. 7 CGH. (a) Physical picture; (b) fringe pattern

## 4 结 论

将编码过程分为二值化编码和曲线描述两个步骤,提出一种以圆弧为基元,使用分段圆弧描述刻线条纹的计算全息图编码方法。针对一离轴非球面,进行了 CGH 的相位设计,采用该编码方法对 CGH 进行了编码计算,编码精度优于  $\lambda/1000$ ,运算时长仅需 3 h。并依据圆弧参数输出 DXF 格式的加工文件,编码文件仅为 39 MB,刻蚀时长仅需 40 min。相较于传统编码方法,所提编码方法在编码精度满足需求的同时,能够大幅度提高编码效率,极大地压缩编码数据量,缩短加工设备的刻蚀时长。最后对 CGH 的设计、编码和制作过程中的误差源进行了分析与汇总,波前误差 RSS 仅为 0.00255 $\lambda$ ,证明了该编码方法的可行性。

## 参 考 文 献

[1] Zhao C Y, Burge J. Optical testing with computer

generated holograms: comprehensive error analysis[J]. Proceedings of SPIE, 2013, 8838: 88380H.

[2] Cai W R, Zhou P, Zhao C Y, et al. Diffractive optics calibrator: design and construction[J]. Optical Engineering, 2013, 52(12): 124101.

[3] 黄亚, 王丰璞, 李新南, 等. 基于计算全息的大口径离轴非球面子镜的折衍混合补偿检测方法[J]. 光学学报, 2022, 42(12): 1212004.

Huang Y, Wang F P, Li X N, et al. Large aperture off-axis aspherical segment test using refraction and diffraction mixed compensation based on computer generated hologram[J]. Acta Optica Sinica, 2022, 42(12): 1212004.

[4] Xiao X S, Yu Q H, Zhu Z T, et al. Encoding method of CGH for highly accurate optical measurement based on non-maxima suppression[J]. Chinese Optics Letters, 2017, 15(11): 111201.

[5] 王晓诗, 桂进斌, 李俊昌, 等. 基于迭代的纯相位全息图生成算法比较研究[J]. 激光与光电子学进展, 2023, 60(6): 0609001.

- Wang X S, Gui J B, Li J C, et al. Comparative study of phase only hologram generation algorithms based on iteration[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2023, 60(6): 0609001.
- [6] Zhao C Y, Burge J H. Estimate of wavefront error introduced by encoding of computer generated holograms [C]//2009 Conference on Lasers & Electro Optics & The Pacific Rim Conference on Lasers and Electro-Optics, July 30-August 3, 2009, Shanghai, China. Washington, D.C.: Optica Publishing Group, 2009: ThJ2\_3.
- [7] Cai W R, Zhou P, Zhao C Y, et al. Analysis of wavefront errors introduced by encoding computer-generated holograms[J]. *Applied Optics*, 2013, 52(34): 8324-8331.
- [8] 邱宏伟, 金春水, 于杰, 等. 变步长搜索的计算全息图编码方法[J]. *中国光学*, 2021, 14(2): 368-374.
- Qiu H W, Jin C S, Yu J, et al. CGH encoding with variable step size search[J]. *Chinese Journal of Optics*, 2021, 14(2): 368-374.
- [9] 梁子健, 杨雨英, 赵宏洋, 等. 非球面光学元件面型检测技术研究进展与最新应用[J]. *中国光学*, 2022, 15(2): 161-186.
- Liang Z J, Yang Y Y, Zhao H Y, et al. Advances in research and applications of optical aspheric surface metrology[J]. *Chinese Journal of Optics*, 2022, 15(2): 161-186.
- [10] 涂嘉文, 徐守时, 谭勇. 基于最小均方误差的圆弧分段曲线拟合方法[J]. *计算机应用*, 2001, 21(3): 48-50.
- Tu J W, Xu S S, Tan Y. Method of circular arc fragmented curve-fitting based on least mean-square error [J]. *Computer Applications*, 2001, 21(3): 48-50.
- [11] 陈燕, 陈亮, 程立, 等. 飞秒激光刻蚀透射式石英玻璃光栅工艺研究[J]. *激光与光电子学进展*, 2022, 59(7): 0714006.
- Chen Y, Chen L, Cheng L, et al. Preparation of transmission quartz glass grating via femtosecond laser etching[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2022, 59(7): 0714006.