

激光与光电子学进展

相位恢复的蒙日-安培方程与迭代角谱复合型方法

马骁, 陈椿元, 冯泽心*

北京理工大学光电学院北京市混合现实与新型显示工程技术研究中心, 北京 100081

摘要 融合几何光学的蒙日-安培方程方法和物理光学的迭代角谱算法, 提出了一种复合型相位恢复方法。针对迭代角谱算法高度依赖初始值的问题, 将蒙日-安培方程的解作为迭代初值, 该初值通常比光强传输方程的解更准确。采用传统迭代角谱算法与混合输入输出算法的交替迭代策略, 以避免算法过早陷入局部最优和迭代停滞。通过数值计算与仿真验证了所提复合型算法的优越性。

关键词 相位测量; 相位恢复; 蒙日-安培方程; 迭代角谱算法; 光强传输方程

中图分类号 O436

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP230663

Composite Phase Retrieval Method Based on Monge-Ampère Equation and Iterative Angular Spectrum

Ma Xiao, Chen Chunyuan, Feng Zexin*

Beijing Engineering Research Center of Mixed Reality and Advanced Display, School of Optics and Photonics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract We propose a new phase retrieval algorithm based on the combination of the Monge-Ampère equation and the iterative angular spectrum algorithm. Since the iterative angular spectrum algorithm is highly dependent on the initial value, we utilize the solution of the Monge-Ampère equation to initialize it, which is expected to yield more accurate results than the solution of the transport of intensity equation. To avoid the algorithm becoming stuck in local minima and iteration stagnation, we adopt an alternating iteration strategy between the traditional iterative angular spectrum algorithm and hybrid input-output algorithm. The effectiveness of the hybrid algorithm is demonstrated by numerical experiments.

Key words phase measurement; phase retrieval; Monge-Ampère equation; iterative angular spectrum algorithm; transport of intensity equation

1 引言

与振幅相比, 相位包含光波场的更多信息。高效、准确地获取相位数据是有效表征及控制光束的必要条件^[1-2]。此外, 相位数据在光学面型检测^[3-4]、生物医学成像^[5]、散射成像^[6-7]、X射线晶体学^[8-9]等领域也至关重要。然而, 相位难以被直接测量, 需采用计算的方法从光强测量信息中提取, 这在数学上是一个典型的反问题。相位恢复是一种简洁、高效、易操作的相位测量手段, 它从与光轴垂直的两个(或多个)相邻平面上测得的光强分布中解构出相位信息, 然而, 该方法依赖于有效的相位恢复算法。因此, 持续探索和研究性能更优

的相位恢复算法是一项重要的研究课题。

相位恢复技术目前的两种主流技术方案是迭代傅里叶变换算法(IFTA)和光强传输方程(TIE)。IFTA的基本原理是通过正反傅里叶变换的反复迭代恢复出瞳面上的相位分布。该方法最早由 Gerchberg 和 Saxton^[10]在 1971 年为解决电子显微镜成像问题而提出(即 GS 算法), 之后逐步发展出迭代角谱(IAS)算法^[11]、杨-顾(YG)算法^[12]、混合输入输出(HIO)算法^[13]等改进算法。尽管这些算法已得到广泛应用, 但仍存在两方面缺陷^[14]: 一方面对初值较为敏感, 不同初值会产生不同的结果; 另一方面易陷入局部极值和迭代停滞。虽然已有方法可以解决部分上述问题, 但均以增

收稿日期: 2023-02-20; 修回日期: 2023-03-23; 录用日期: 2023-04-03; 网络首发日期: 2023-04-13

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金(11704030)、中国人工智能学会-华为 MindSpore 学术奖励基金(CAAIXSJLJJ-2021-014A, CAAIXSJLJJ-2022-010A)

通信作者: *fzx84@126.com

加操作复杂度为代价。

TIE 最早由 Teague^[15] 于 1982 年在傍轴近似条件下从亥姆霍兹方程导出,以定量的形式描述了轴向光强变化与光束相位之间的关系。对 TIE 进行高效、准确地求解是 TIE 相位恢复方法的关键,目前已发展出包括 Green 函数法^[16]、Zernike 多项式展开法^[17]、快速傅里叶变换(FFT)法^[18]、多重网格法^[19]、离散余弦变换法^[20]以及基于最大光强假设的泊松方程迭代法^[21]等多种数值求解算法。尽管 TIE 在求解算法上不断被完善,但其应用范围和测量精度仍受到模型本身的限制^[22]。首先,TIE 必须满足傍轴近似,这意味着其不适用于夫琅禾费衍射和大角度菲涅耳衍射;其次,TIE 必须满足弱离焦近似,这限制了离焦距离的选取。离焦距离过大会导致轴向光强差分的非线性误差增大;反之,离焦距离过小又会使得系统难以定位,同时光强差分信息会被噪声掩盖。多平面测量可以一定程度上缓解上述矛盾^[23-24],但会显著增加系统的复杂度。

为了克服传统 IFTA 算法对初值敏感的缺陷,梁丽等^[25]提出一种将 TIE 和 IAS 算法相结合的混合迭代算法,该算法借助 TIE 得到更为准确的初始值,提升了相位恢复的精度。郭怡明等^[26]利用类似的方法实现了较大离焦距离下的相位恢复。如前所述,求解 TIE 得到的是基于几何光学的近似解,当近似条件不再满足时,其误差会显著增加,对后续 IAS 算法的迭代产生不利影响。因此,倘若能够获得更加准确的初始解,该类算法可以得到进一步改进和提升。

在之前的研究中,研究者基于光线映射和能量守恒定律推导出非傍轴条件下的相位恢复方程^[27],该方程是一个二阶非线性的蒙日-安培方程(MAE),且在傍轴近似和弱离焦近似下可退化为 TIE^[28],此外,数值实验展示了 MAE 相较于 TIE 在精度上的优越性。因此,本文提出基于 MAE 和 IAS 算法的新型混合迭代算法(MAE-IAS),以实现更高精度的相位恢复。首先通过多尺度迭代算法求解 MAE 获得初始相位,进而通过改进的 IAS 算法对相位进一步补偿和优化。最后对上述算法进行了数值仿真比较,展示了 MAE-IAS 算法的优势,为相位恢复提供了一种更加精确且适应性更强的解决方案。

2 基本原理

2.1 MAE 相位恢复算法

首先回顾 MAE 相位恢复的基本原理与求解方法。如图 1 所示,假定存在沿 z 轴传输的波长为 λ 的相干光场,在 $z=0$ 平面的光强分布为 $I_1(x, y)$,其中 $(x, y) \in \Sigma_1$;在 $z=d$ 平面处的光强分布为 $I_2(\xi, \eta)$,其中 $(\xi, \eta) \in \Sigma_2$ 。相位恢复的目的是基于这两个平面的光强分布计算 $z=0$ 处的相位分布 $\varphi(x, y)$ 。为了便于

推导,引入程函 $\phi(x, y)$,其与相位分布 $\varphi(x, y)$ 之间的关系为 $\phi(x, y) = k\varphi(x, y)$,其中 $k = 2\pi/\lambda$ 为波数。 $\phi(x, y)$ 与光线映射 $(\xi, \eta) = \mathbf{T}(x, y)$ 之间的关系^[27]为

$$(\xi, \eta) = \mathbf{T}(x, y) = (x, y) + d \cdot \nabla \phi / \sqrt{1 - |\nabla \phi|^2}, \quad (1)$$

式中: d 为两平面光强之间的轴向距离; ∇ 为哈密顿算子。光在传播过程中满足能量守恒定律,其微分形式为

$$I_1(x, y) = I_2(\xi, \eta) |\mathbf{J}(x, y)|, \quad (2)$$

式中, $|\mathbf{J}(x, y)|$ 是坐标变换的雅可比行列式。将式(1)和式(2)联立,推导并化简得到一个二阶非线性的 MAE^[27]:

$$\det(\mathbf{D}^2 \phi) + \gamma(1 - \phi_x^2) \phi_{xx} + \gamma(1 - \phi_y^2) \phi_{yy} + 2\gamma \phi_x \phi_y \phi_{xy} + \gamma^4 d^2 [1 - I_1(x, y)/I_2(\xi, \eta)] = 0, \quad (3)$$

式中: ϕ_x 和 ϕ_y 分别为程函 ϕ 在 x 、 y 方向上的一阶偏导数; ϕ_{xx} 、 ϕ_{xy} 、 ϕ_{yy} 分别为 ϕ 的二阶偏导数; $\det(\mathbf{D}^2 \phi) = \phi_{xx} \phi_{yy} - \phi_{xy} \phi_{yx}$ 为海森矩阵行列式, \mathbf{D}^2 为海森矩阵; $\gamma = \sqrt{1 - |\nabla \phi|^2}/d$ 。该方程的边界条件可表示为: $\mathbf{T}(\partial \Sigma_1) = \partial \Sigma_2$,其中 $\partial \Sigma_1$ 和 $\partial \Sigma_2$ 分别为区域 Σ_1 和 Σ_2 的边界。

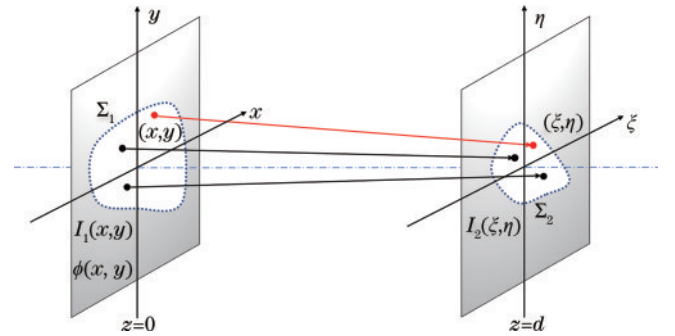


图 1 基于几何光学的光线映射示意图

Fig. 1 Ray mapping based on geometric optics

与 TIE 类似,MAE 也是一种表征相位与光强之间定量关系的偏微分方程,其提供了一种新的相位恢复方法^[28]。尽管 MAE 的数学形式比 TIE 更加复杂,但不存在傍轴和弱离焦近似的约束,是一种更普适的数学模型。同时,MAE 也保留了 TIE 方法的一些优势(如适用于非相干照明)。

作为非线性偏微分方程,MAE 的求解难度很高。此前,JFNK (Jacobian-free Newton-Krylov) 算法已经成功求解自由曲面光学中涉及的 MAE^[27,29-30],它需要有一个良好的相位预估值作为初始值。基于文献[28],本研究仍然引入 TIE 的解作为求解 MAE 的初始值。由于 JFNK 算法直接处理高分辨率图像时计算量较大、运行速度较慢,仍采用多尺度递进的方式提高算法的运行效率,一方面低分辨率下 JFNK 算法计算速度较快,另一方面低分辨率下得到的结果插值后为

更高分辨率的计算提供了良好的初值。具体步骤为:

1) 首先将采集的光强图像下采样到低分辨率,利用 TIE 算法求解出相应的相位分布,作为 JFNK 算法的初始值;

2) 将相位初始值通过线性插值到更高分辨率,利用 JFNK 算法求解出该分辨率下 MAE 的解,并将此解作为下一轮求解 MAE 的初始值;

3) 重复过程 2) 直至达到所采集图像的原始分辨率,得到最终解。

2.2 角谱传输理论与 IAS 算法

MAE 将光的传播过程简化为光线映射,属于几何光学范畴。根据物理光学中的衍射传输理论^[31],两个

平面之间的光传输过程也可以用角谱传递公式进行描述。如图 2 所示, $z=0$ 处的输入光场分布 $U_1(x,y)=\sqrt{I_1(x,y)}\exp[i\varphi_1(x,y)]$,经过距离为 d 的衍射之后,输出光场表示为 $U_2(\xi,\eta)$,根据角谱衍射积分可得:

$$U_2(\xi,\eta)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\left[U_1(x,y)\right]H(f_x,f_y)\right\}=\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\left[\sqrt{I_1(x,y)}\exp[i\varphi_1(x,y)]\right]H(f_x,f_y)\right\}, \quad (4)$$

式中: \mathcal{F} 、 \mathcal{F}^{-1} 分别为傅里叶变换及逆变换符号; $H(f_x,f_y)$ 是角谱传递函数,其表达式为 $H(f_x,f_y)=\exp\left[ikd\sqrt{1-\lambda^2(f_x^2+f_y^2)}\right]$,其中, $k=2\pi/\lambda$, f_x 、 f_y 为空间频率。

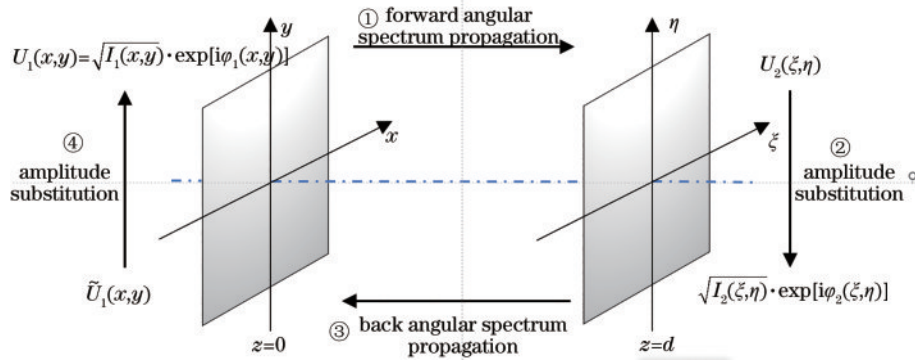


图 2 IAS 算法示意图

Fig. 2 Schematic diagram of IAS algorithm

IAS 算法是 GS 算法的直接扩展,它利用式(4)建立的衍射关系,通过角谱传递公式,利用正向和逆向的反复迭代重建待测面上的相位信息,如图 2 所示,其中: $\tilde{U}_1(x,y)$ 为经反向角谱传播计算得到的光场分布; $\varphi_1(x,y)$ 、 $\varphi_2(\xi,\eta)$ 为角谱计算得到的相位分布。然而,该算法收敛速度较慢,且容易陷入局部最优解,导致相位恢复的精度不高。HIO 型算法^[13,32]引入输入光场的负反馈,收敛速度与效果上相较 GS 算法有很大提升。Guo 等^[33]提出了基于 GS 和 HIO 的混合型方法,进一步提高了算法的收敛性能。本工作将 GS/HIO 混合型算法扩展至 IAS/HIO 算法,在 HIO 迭代运行时,输入光场函数采用文献^[32]中的形式,以加快迭代速度并避免过早地陷入局部最优。该方法的操作流程为:

1) 设定每轮迭代次数为 K_p ,其中前 K_1 次迭代采用 IAS 算法,后 K_p-K_1 次迭代采用 HIO 算法;

2) 按照 1) 中的设置进行第一轮迭代;

3) 判断是否满足收敛条件或者达到最大迭代次数,若满足,则停止迭代,否则进行下一轮迭代;

4) 重复过程 3),直至满足循环终止条件,通过解包裹算法^[34]获得最终相位分布。

2.3 MAE-IAS 复合型相位恢复算法

借助 MAE 的解作为迭代初始值,提出了一种新

的复合型相位恢复方法(MAE-IAS),算法流程图如图 3 所示。将分辨率为 $r_0 \times r_0$ 的原始图像下采样至 $r \times r$,首先获得一个 TIE 解 φ_{TIE} ;将该 TIE 解作为初始值,进一步采用 JFNK 方法由低分辨率到高分辨率逐层求解 MAE;然后将该解 φ_{MAE} 作为初始值,采用物理光学的 IAS/HIO 算法进一步对相位分布进行补偿与优化,直至算法收敛或达到最大迭代次数 K_M ,最终输出重建相位 φ_r 和对应的均方根误差(RMSE)。整个过程层层递进,且上一环节的结果都作为下一环节的初始值,有效地提升了算法的整体收敛性能。该算法将 MAE 和 IAS/HIO 算法有机结合在一起,不仅为后者提供了良好的初始值,而且可有效避免传统 IAS 算法易陷入局部最优和迭代停滞的问题。

3 实验结果与分析

利用运行在 Windows 10 平台(Intel Core i7@3.0 GHz, 128 GB 内存)上的 Python 3.8 进行数值实验,运用 NumPy 和 MindSpore 扩展库进行数值和矩阵运算。波长 λ 设为 650 nm、图像采样分辨率设为 $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$ 、 x 和 y 方向采样间隔均为 $4 \mu\text{m}$ 、离焦距离 $d=3 \text{ mm}$ 。入射光强 $I_1(x,y)$ 设为均匀分布,相位分布设为 peaks 型函数,峰谷(PV)值为 14.16 rad,如图 4(a)所示。参照式(4),利用基于 FFT 的角谱传

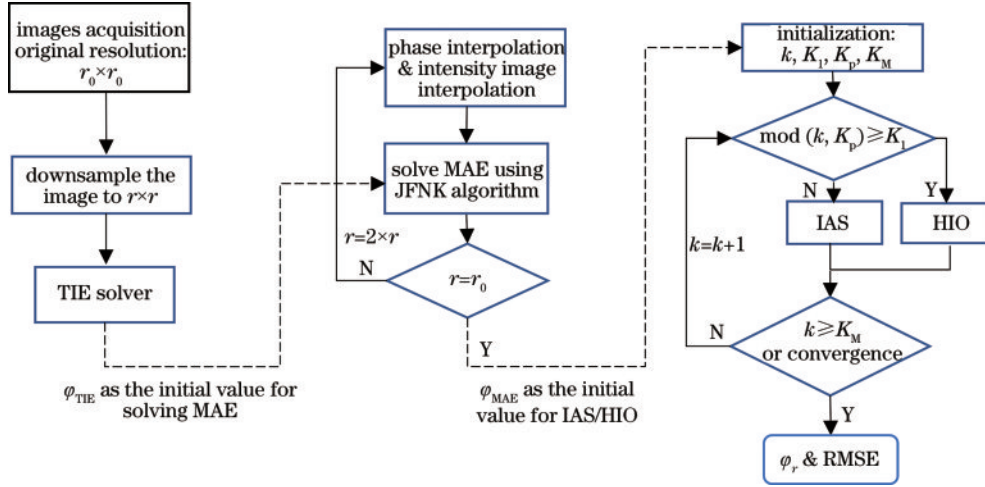
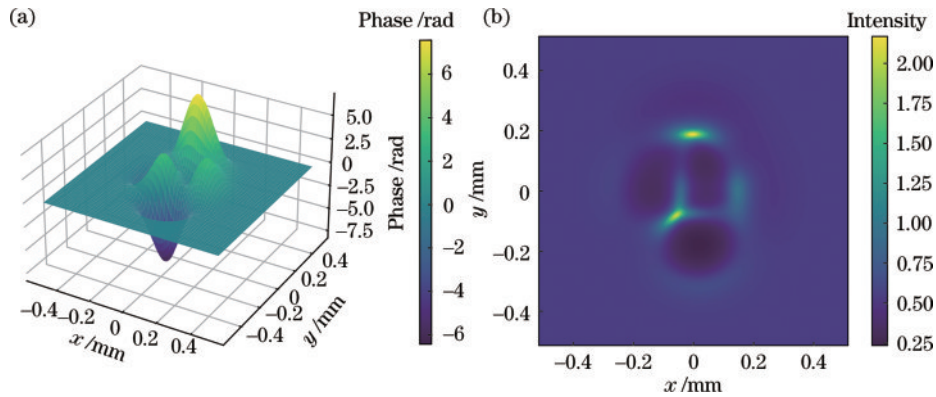


图 3 MAE-IAS复合型算法流程图

Fig. 3 Flow chart of the MAE-IAS hybrid algorithm

图 4 针对 peaks 型相位分布的仿真实例。(a)原始相位分布;(b) $z = 3$ mm 处的光强分布Fig. 4 Simulation examples for peaks-type phase distribution. (a) Original phase distribution; (b) intensity distribution at $z = 3$ mm

输算法计算出离焦面的光强分布 $I_2(\xi, \eta)$, 如图 4(b) 所示。为了满足角谱计算的过采样要求^[35], 同时降低 FFT 的计算误差, 在计算衍射图像前需对原始图像进行补零操作。采用 RMSE 评价相位恢复效果:

$$R_{\text{RMSE}} = \sqrt{(\varphi_r - \varphi_{\text{true}})^2 / N}, \quad (5)$$

式中: φ_r 为重建相位值; φ_{true} 为真实相位值; N 为采样点总数。RMSE 越小, 表示相位恢复精度越高。

在运行 MAE-IAS 算法时, 具体细节设置为:

1) 在求解 TIE 时, 利用基于最大光强假设的泊松方程迭代法^[21], 该算法具有高效简洁、通用性强等优点;

2) 在多尺度递进求解 MAE 时, 首先在 $64 \text{ pixel} \times 64 \text{ pixel}$ 的低分辨率下求解, 之后逐步插值至 $128 \text{ pixel} \times 128 \text{ pixel}$ 和 $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$;

3) 在运行 IAS/HIO 算法时, $K_1=1$ 、 $K_p=80$, 即在每轮循环中先运行 1 次 IAS 算法后运行 79 次 HIO 算法, 最大迭代次数为 1000 次。

根据以上设置, 分别执行 TIE、MAE、TIE-IAS、

MAE-IAS 算法, 其中 TIE-IAS 算法以 TIE 的解作为 IAS/HIO 算法迭代的初始值, 其他设置与 MAE-IAS 算法相同。首先分析上述相位恢复算法在精度上的差别, 结果如图 5 所示。由图 5(a)~(d) 可知: TIE 的精度最低, RMSE 达到 0.14 rad; MAE 的误差在 TIE 的基础上显著降低至 4.8×10^{-2} rad, 整体精度提升 65.7%; 在 IAS/HIO 算法的补偿下(均迭代 1000 次), TIE-IAS 算法和 MAE-IAS 算法的精度相较于迭代之前均大幅提升, RMSE 分别为 1.1×10^{-2} rad 和 1.2×10^{-3} rad, 精度分别提升 92.1% 和 97.5%。对比图 5(f)、(h) 可知, MAE-IAS 算法得到了更加准确的相位分布, 该算法相较于 TIE-IAS 算法精度提升了 89.1%, 这主要得益于 MAE 提供的更加精确的初始值。

为了全面评估上述算法的性能, 对其运行时间进行了统计, 结果列于表 1。作为线性偏微分方程, TIE 的求解速度最快; MAE 由于求解过程较为复杂, 耗时较长, 在运行效率上仍然存在提升空间; 对于 TIE-IAS 算法和 MAE-IAS 算法而言, 在求得初始解之后, 运行时间主要消耗在角谱迭代过程, 与迭代次数成正比。

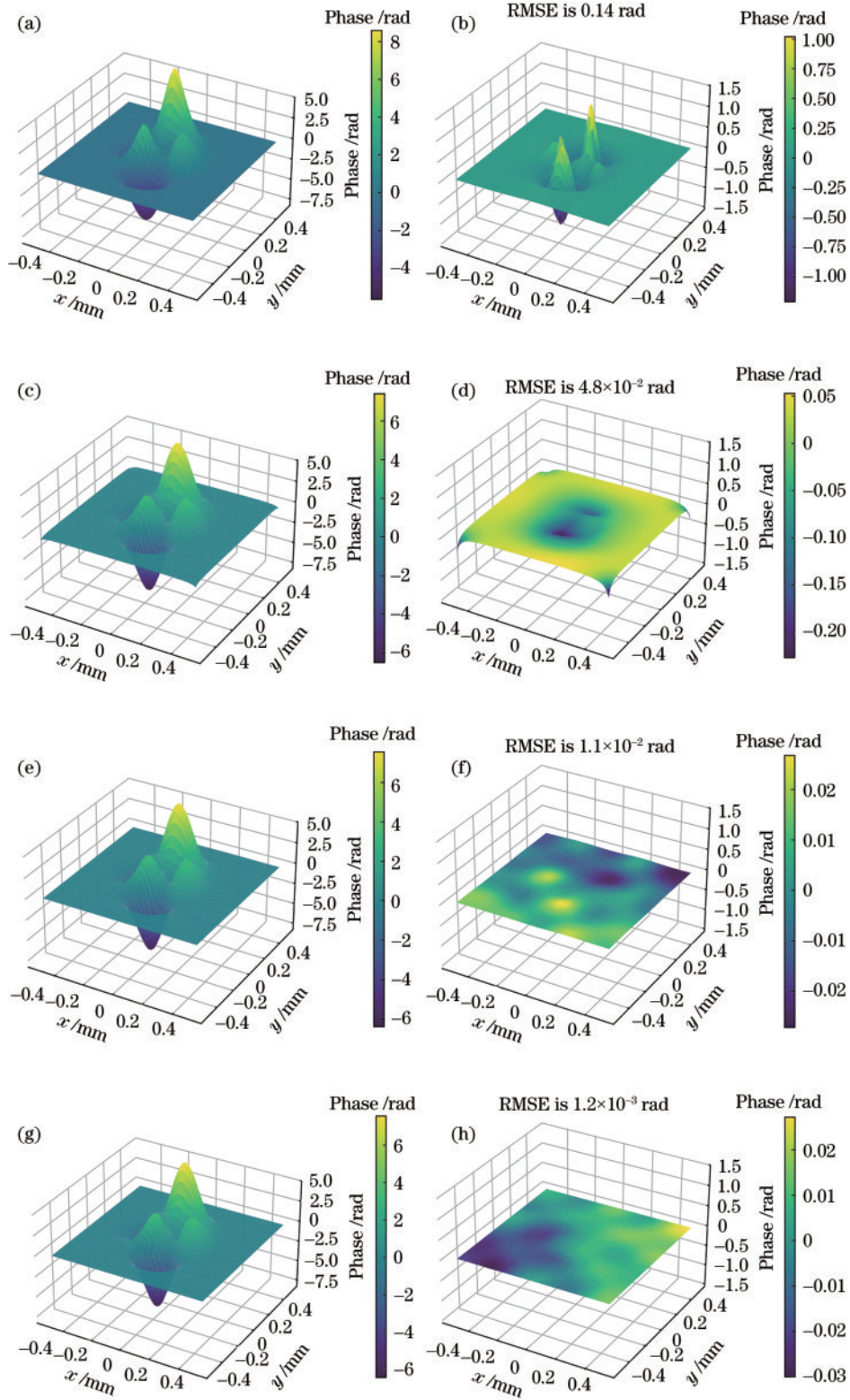


图 5 各相位恢复算法的仿真结果。(a) TIE 算法的重建相位; (b) TIE 的误差; (c) MAE 的重建相位; (d) MAE 的误差;

(e) TIE-IAS 算法的重建相位; (f) TIE-IAS 算法的误差; (g) MAE-IAS 算法的重建相位; (h) MAE-IAS 算法的误差

Fig. 5 Simulation results of each phase retrieval algorithms. (a) Reconstructed phase of TIE; (b) phase error of TIE algorithm; (c) reconstructed phase of MAE; (d) phase error of MAE; (e) reconstructed phase of TIE-IAS algorithm; (f) phase error of TIE-IAS algorithm; (g) reconstructed phase of MAE-IAS algorithm; (h) phase error of MAE-IAS algorithm

此外通过改变两个测量平面之间的距离(离焦距离) d ,研究上述 4 类算法对离焦距离的敏感程度,结果

如图 6 所示。由图 6(a)可知:TIE 的相位恢复精度随着离焦距离的增大而降低,这主要是由非线性误差造

表 1 不同相位恢复算法的运行时间对比
Table 1 Runtime comparison of different phase retrieval algorithms

Algorithm	Runtime /s
TIE	13.81
MAE	240.19
TIE-IAS	152.35
MAE-IAS	378.29

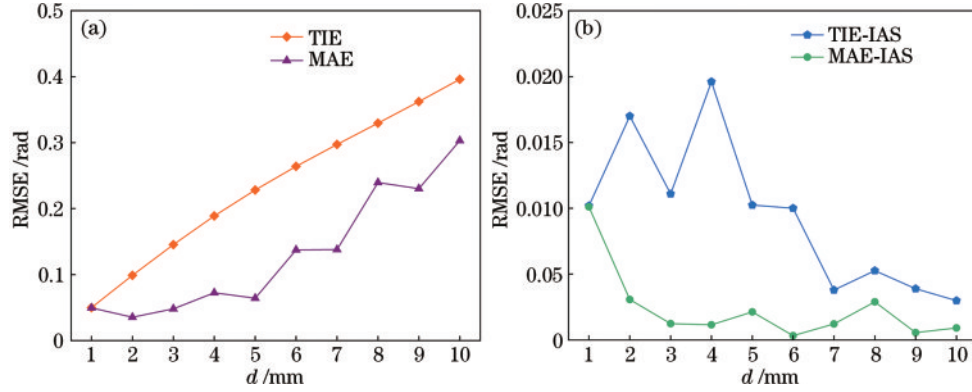


图 6 相位恢复算法的 RMSE 随离焦距离 d 的变化。(a) TIE、MAE; (b) TIE-IAS、MAE-IAS 算法
Fig. 6 RMSE versus d in different phase retrieval algorithms. (a) TIE and MAE; (b) TIE-IAS and MAE-IAS algorithms

最后比较了传统 IAS 算法与改进的 IAS/HIO 算法之间的差异。两种迭代算法的 RMSE 随迭代次数的改变如图 7 所示,其中:图 7(a)中的迭代以 TIE 的解作为初始值;图 7(b)以 MAE 的解作为初始值。从图 7

中可以看出,IAS/HIO 算法的收敛速度和最终的 RMSE 明显好于传统的 IAS 算法。对比图 7(a)和图 7(b)可知,MAE 的解作为初始值使得 IAS/HIO 算法在迭代过程中更加趋近于全局最优解。

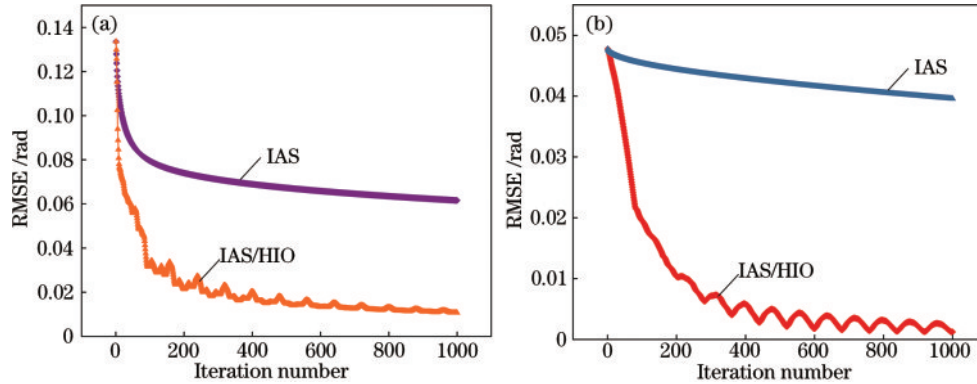


图 7 IAS 算法与 IAS/HIO 算法的 RMSE 误差迭代曲线。(a) 以 TIE 为初始值; (b) 以 MAE 为初始值
Fig. 7 RMSE versus iteration number for IAS and IAS/HIO algorithms. (a) Solving TIE as the initial value; (b) solving MAE as the initial value

为了验证所提 MAE-IAS 复合型算法在非傍轴情形下的相位恢复能力,设置具有较大 PV 值的相位来模拟光线的大角度传播。新的相位分布将使用 xy 多项式表示, $\varphi(x, y) = -0.127k(1.2x^2 + 0.8y^2)$ 。根据角谱衍射理论,由于该情形下光在传播过程中的高频成分增加,仿真中使用更高的分辨率 ($512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$) 对光强进行采样,传输距离为 2 mm,其他设置与前文仿真相同。此外在非傍轴情况下 TIE 方法无

法有效地进行相位恢复,因此通过对相位梯度 $(\xi - x, \eta - y) / \rho$ 作积分求解 MAE 的初始值,其中: (x, y) 和 (ξ, η) 分别为两个光强平面上的均匀采样坐标; ρ 为坐标之间的距离。最后将 MAE 的解作为 IAS/HIO 算法的迭代初始值。最终的相位恢复结果如图 8 所示,在该情形下 MAE-IAS 算法得益于 MAE 提供的初始值,再一次实现了精确的相位恢复 ($R_{\text{RMSE}} = 0.31 \text{ rad}$),证明了该算法在非傍轴条件下的优势。

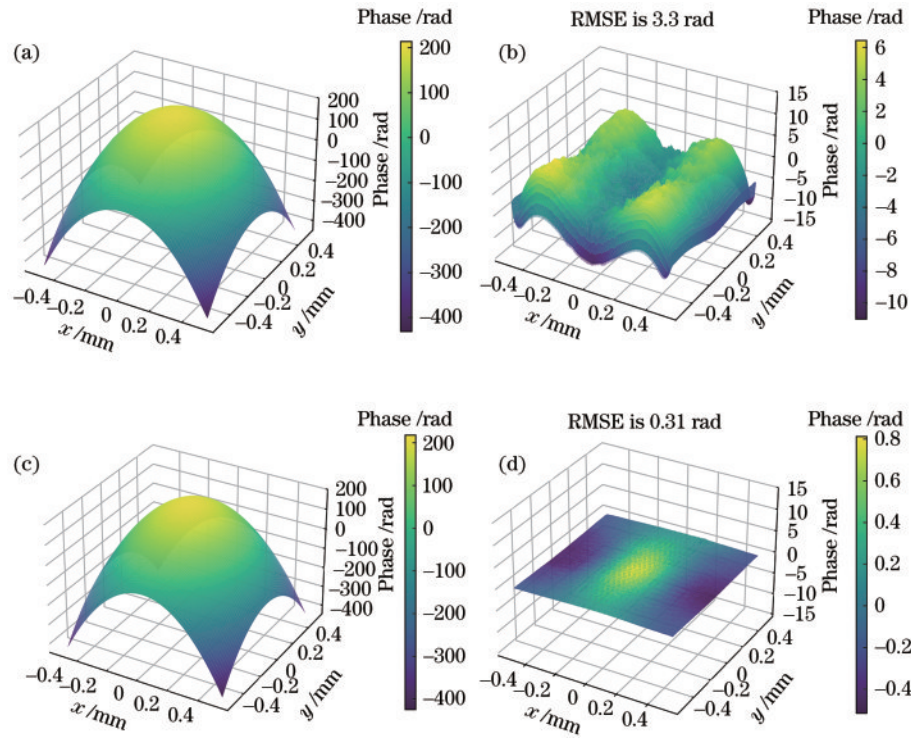


图8 非傍轴情形下的各相位恢复算法的仿真结果。(a)MAE的重建相位;(b) MAE的误差;(c)MAE-IAS算法的重建相位;(d) MAE-IAS算法的误差

Fig. 8 Simulation results of each phase retrieval algorithms under non-paraxial situation. (a) Reconstructed phase of MAE; (b) phase error of MAE; (c) reconstructed phase of MAE-IAS algorithm; (d) phase error of MAE-IAS algorithm

4 结 论

将MAE和IAS/HIO算法相结合,提出了一种复合型相位恢复算法,并通过仿真对相关算法的性能进行了对比。首先,相较于早期提出的TIE-IAS算法,MAE为后续的IAS算法提供了更为理想的初始值,在精度和稳定性上展现出较大的优势;其次,MAE-IAS算法利用角谱迭代对MAE求得的相位分布进行了修复和补偿,且极大地放宽了对离焦距离的要求,有利于光强图像的采集。MAE-IAS算法后续可应用于光学检测、相位成像和衍射光学元件设计等领域。此外,MAE-IAS算法仍然存在改进空间,主要体现在MAE的求解方法上。尽管JFNK算法取得了良好的结果,但并未完全发挥出MAE这一数学模型本身的优势,且运行较为耗时。为此,未来将继续探索求解MAE的更先进方法并推动其在光学领域更加广泛的应用。

参 考 文 献

- [1] Merx S, Stock J, Widiarsari F R, et al. Beam characterization by phase retrieval solving the transport-of-intensity-equation[J]. *Optics Express*, 2020, 28(14): 20898-20907.
- [2] 陈晓义, 段亚轩, 王拯洲, 等. 基于多步相位恢复的激光远场焦斑测量方法[J]. *中国激光*, 2022, 49(7): 0704002.
Chen X Y, Duan Y X, Wang Z Z, et al. Laser far-field
- [3] Michalko A M, Fienup J R. Transverse translation diverse phase retrieval using soft-edged illumination[J]. *Optics Letters*, 2018, 43(6): 1331-1334.
- [4] 王磊, 窦健泰, 马骏, 等. 基于叠层衍射成像的二元光学元件检测研究[J]. *物理学报*, 2017, 66(9): 094201.
Wang L, Dou J T, Ma J, et al. Detection of the binary optical element based on ptychography[J]. *Acta Physica Sinica*, 2017, 66(9): 094201.
- [5] Kandel M E, He Y R, Lee Y J, et al. Phase imaging with computational specificity (PICS) for measuring dry mass changes in sub-cellular compartments[J]. *Nature Communications*, 2020, 11: 6256.
- [6] Katz O, Heidmann P, Fink M, et al. Non-invasive single-shot imaging through scattering layers and around corners via speckle correlations[J]. *Nature Photonics*, 2014, 8(10): 784-790.
- [7] 潘兴臣, 刘诚, 肖伟刚, 等. 相干衍射成像技术的最新进展: 层叠相位重建技术[J]. *激光与光电子学进展*, 2022, 59(22): 2200001.
Pan X C, Liu C, Xiao W G, et al. The latest development of coherent diffraction imaging technology: stacked phase reconstruction technology[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2022, 59(22): 2200001.
- [8] Thibault P, Dierolf M, Menzel A, et al. High-resolution scanning X-ray diffraction microscopy[J]. *Science*, 2008, 321(5887): 379-382.

- [9] 李凡, 康乐, 杨福桂, 等. 基于 X 射线近场散斑的波前检测技术研究现状[J]. 光学学报, 2022, 42(8): 0800002. Li F, Kang L, Yang F G, et al. Present research status of X-ray near-field speckle based wavefront metrology[J]. Acta Optica Sinica, 2022, 42(8): 0800002.
- [10] Gerchberg R W, Saxton W O. Phase determination for image and diffraction plane pictures in the electron microscope[J]. Optik, 1971, 34(3): 275-284.
- [11] Misell D L. A method for the solution of the phase problem in electron microscopy[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 1973, 6(1): L6-L9.
- [12] 杨国桢, 顾本源. 光学系统中振幅和相位的恢复问题[J]. 物理学报, 1981, 30(3): 410-413. Yang G Z, Gu B Y. On the amplitude-phase retrieval problem in optical systems[J]. Acta Physica Sinica, 1981, 30(3): 410-413.
- [13] Fienup J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J]. Applied Optics, 1982, 21(15): 2758-2769.
- [14] 王爱业, 潘安, 马彩文, 等. 相位恢复算法: 原理、发展与应用(特邀)[J]. 红外与激光工程, 2022, 51(11): 20220402. Wang A Y, Pan A, Ma C W, et al. Phase retrieval algorithms: principles, developments and applications (invited)[J]. Infrared and Laser Engineering, 2022, 51(11): 20220402.
- [15] Teague M R. Irradiance moments: their propagation and use for unique retrieval of phase[J]. Journal of the Optical Society of America, 1982, 72(9): 1199-1209.
- [16] Teague M R. Deterministic phase retrieval: a Green's function solution[J]. Journal of the Optical Society of America, 1983, 73(11): 1434-1441.
- [17] Gureyev T E, Roberts A, Nugent K A. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation: matrix solution with use of Zernike polynomials[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1995, 12(9): 1932-1941.
- [18] Gureyev T E, Nugent K A. Rapid quantitative phase imaging using the transport of intensity equation[J]. Optics Communications, 1997, 133(1/2/3/4/5/6): 339-346.
- [19] 王潇, 毛珩, 赵达尊. 基于光强传播方程的相位恢复[J]. 光学学报, 2007, 27(12): 2117-2122. Wang X, Mao H, Zhao D Z. Phase retrieval based on intensity transport equation[J]. Acta Optica Sinica, 2007, 27(12): 2117-2122.
- [20] Zuo C, Chen Q A, Asundi A. Boundary-artifact-free phase retrieval with the transport of intensity equation: fast solution with use of discrete cosine transform[J]. Optics Express, 2014, 22(8): 9220-9244.
- [21] Zhang J L, Chen Q A, Sun J S, et al. On a universal solution to the transport-of-intensity equation[J]. Optics Letters, 2020, 45(13): 3649-3652.
- [22] Zuo C, Li J J, Sun J S, et al. Transport of intensity equation: a tutorial[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2020, 135: 106187.
- [23] Waller L, Tian L, Barbastathis G. Transport of intensity phase-amplitude imaging with higher order intensity derivatives[J]. Optics Express, 2010, 18(12): 12552-12561.
- [24] Bie R, Yuan X H, Zhao M, et al. Method for estimating the axial intensity derivative in the TIE with higher order intensity derivatives and noise suppression[J]. Optics Express, 2012, 20(7): 8186-8191.
- [25] 梁丽, 杨玲, 王中科, 等. 基于 TIE 和加速角谱迭代算法的二维相位恢复[J]. 激光与光电子学进展, 2013, 50(2): 021002. Liang L, Yang L, Wang Z K, et al. Two-dimensional phase retrieval based on TIE and accelerate angular spectrum iteration algorithm[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2013, 50(2): 021002.
- [26] 郭恰明, 张方, 宋强, 等. 一种混合迭代算法在大离焦距离 TIE 相位恢复中的应用[J]. 光学学报, 2016, 36(9): 0912001. Guo Y M, Zhang F, Song Q, et al. Application of hybrid iterative algorithm in TIE phase retrieval with large defocusing distance[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(9): 0912001.
- [27] Feng Z X, Cheng D W, Wang Y T. Transferring freeform lens design into phase retrieval through intermediate irradiance transport[J]. Optics Letters, 2019, 44(22): 5501-5504.
- [28] Feng Z X, Ma X, Chen C Y. Relationship and comparison between the Monge-Ampère equation and the transport of intensity equation for phase retrieval[EB/OL]. (2023-03-22)[2023-04-01]. <https://doi.org/10.1364/opticaopen.22091060.v1>.
- [29] Feng Z X, Cheng D W, Wang Y T. Iterative wavefront tailoring to simplify freeform optical design for prescribed irradiance[J]. Optics Letters, 2019, 44(9): 2274-2277.
- [30] Feng Z X, Cheng D W, Wang Y T. Iterative freeform lens design for prescribed irradiance on curved target[J]. Opto-Electronic Advances, 2020, 3(7): 200010.
- [31] 刘宏展, 纪越峰. 一种基于角谱理论的改进型相位恢复迭代算法[J]. 物理学报, 2013, 62(11): 114203. Liu H Z, Ji Y F. An ameliorated fast phase retrieval iterative algorithm based on the angular spectrum theory [J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(11): 114203.
- [32] Lu G W, Zhang Z, Yu F T S, et al. Pendulum iterative algorithm for phase retrieval from modulus data[J]. Optical Engineering, 1994, 33(2): 548-555.
- [33] Guo C L, Liu S, Sheridan J T. Iterative phase retrieval algorithms I: optimization[J]. Applied Optics, 2015, 54(15): 4698-4708.
- [34] Zhao Z X, Zhang H Y, Xiao Z X, et al. Robust 2D phase unwrapping algorithm based on the transport of intensity equation[J]. Measurement Science and Technology, 2019, 30(1): 015201.
- [35] Lатышевская Т. Iterative phase retrieval in coherent diffractive imaging: practical issues[J]. Applied Optics, 2018, 57(25): 7187-7197.