

## 激光与光电子学进展

## 基于倾斜透镜将拉盖尔-高斯光束阵列转换为厄米-高斯光束阵列的位置映射关系

熊光昀<sup>1,2,3</sup>, 唐奥<sup>1,2,3</sup>, 兰斌<sup>1,2</sup>, 沈锋<sup>1,2\*</sup><sup>1</sup>中国科学院大学自适应光学重点实验室, 四川 成都 610209;<sup>2</sup>中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209;<sup>3</sup>中国科学院大学, 北京 100049

**摘要** 倾斜透镜可以将拉盖尔-高斯光束转换为厄米-高斯光束。因此, 推导了基于倾斜透镜的拉盖尔-高斯光束阵列与厄米-高斯光束阵列相互转换的位置映射关系。当倾斜透镜绕任意轴旋转一定角度时, 两光束阵列的位置将会关于该轴对称。实验中, 利用空间光调制器生成了  $1 \times 1$ 、 $2 \times 2$ 、 $3 \times 3$ 、 $3 \times 1$ 、 $1 \times 3$  的拉盖尔-高斯光束阵列, 并用倾斜透镜将其转换为厄米-高斯光束阵列, 通过对比两光束阵列的光场分布, 验证了上述理论分析结果。实验结果与理论分析完全一致。该工作为拉盖尔-高斯光束阵列的轨道角动量测量提供了更明确的理论指导。

**关键词** 拉盖尔-高斯光束阵列; 轨道角动量测量; 倾斜透镜; 位置映射关系; 厄米-高斯光束阵列

中图分类号 O436

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP230454

## Position Mapping Relationship for Converting Laguerre-Gaussian Beam Array into Hermite-Gaussian Beam Array Based on a Tilted Lens

Xiong Guangyun<sup>1,2,3</sup>, Tang Ao<sup>1,2,3</sup>, Lan Bin<sup>1,2</sup>, Shen Feng<sup>1,2\*</sup><sup>1</sup>Key Laboratory on Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209, Sichuan, China;<sup>2</sup>Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209, Sichuan, China;<sup>3</sup>University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract** A Laguerre-Gaussian beam can be converted into a Hermite-Gaussian beam using a tilted lens. In this work, a position mapping relationship was derived between the incident Laguerre-Gaussian beam array and the Hermite-Gaussian beam array converted by the tilted lens. When the tilted lens is rotated around an arbitrary axis by a certain angle, the positions of the two beam arrays will be symmetrical about that axis. In the experiments, Laguerre-Gaussian beam arrays of  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ ,  $3 \times 1$ , and  $1 \times 3$  were generated using a spatial light modulator and converted into Hermite-Gaussian beam arrays via a tilted lens, and the above theoretical analysis was verified through comparison of the distributions of the two beam arrays. The experimental results are in perfect agreement with the theoretical analysis. Based on the theoretical results and the position distribution of the Hermite-Gaussian beam array, the topological charge of the Laguerre-Gaussian beam array can be detected. This work provides clearer theoretical guidance for the orbital angular momentum detection of Laguerre-Gaussian beam arrays.

**Key words** Laguerre-Gaussian beams array; orbital angular momentum detection; tilted lens; position mapping relationship; Hermite-Gaussian beams array

## 1 引言

拉盖尔-高斯(LG)光束是带有螺旋相位的环状光束, 其每个光子都携带  $lh$  的轨道角动量(OAM)<sup>[1]</sup>, 其中,  $l$  为拓扑荷数, 也称为模式数,  $\hbar$  为约化普朗克常

量。由于其特殊的性质, LG 光束在许多领域有着重要的应用。例如: LG 光束的 OAM 可以传递给微小粒子并使其旋转, 从而应用于光学操纵和光学捕获<sup>[2-6]</sup>; LG 光束的模式在理论上是无限的, 且不同模式之间相互正交, 因此可以在光学通信领域提供一个新的维

收稿日期: 2023-01-05; 修回日期: 2023-03-02; 录用日期: 2023-03-29; 网络首发日期: 2023-05-09

基金项目: 中国科学院光电技术研究所前沿部署资助项目(C21K006)、装备预研重点实验室基金项目(6142A04190212)

通信作者: \*shenfeng@ioe.ac.cn

度,增加信道容量<sup>[7-15]</sup>;其特殊的环形结构也可以被应用于光学加工<sup>[16-17]</sup>;LG 光束的干涉原理使其可以应用于光学精密测量中<sup>[18-19]</sup>。

在上述应用当中, LG 光束阵列通常具有更大的优势。例如:在光学操纵和光学加工中, LG 光束阵列可以同时操作多个单位,大大提高工作效率;在光通信领域, LG 光束阵列可以进一步增加信道容量,提高通信速率。在这些应用中,精确测量 LG 光束阵列的拓扑荷数是至关重要的。在以往的报道中,干涉测量法<sup>[20-29]</sup>通常被用来测量 LG 光束阵列。然而,此类方法通常需要额外的干涉光路,增加了光路复杂性。柱透镜<sup>[30]</sup>也可被用来测量 LG 光束阵列,但是需要严格的光束对准,在实际实验中增加了测量难度。而其他的三角形孔径衍射测量法<sup>[31]</sup>、旋转相位板衍射法<sup>[32]</sup>、相移衍射法<sup>[33]</sup>同样需要严格的光束对准,因此不适合用于测量阵列式 LG 光束。

2013 年, Vaity 等<sup>[34]</sup>提出了使用倾斜透镜测量单束 LG 光束的方法, Kotlyar 等<sup>[35]</sup>对此进行了理论分析。通过倾斜透镜将 LG 光束转换为厄米-高斯(HG)光束,由 HG 光束暗条纹的数量及方向来确定 LG 光束的  $l$ , 该方法简单高效,只需要在光路的最后放置一个倾斜透镜即可,无需复杂的干涉光路和严格的光束对准。另外,该方法对于 LG 光束的入射位置不敏感,当 LG 光束的入射位置偏离倾斜透镜中心时,仅仅影响 HG 光束在接收面上的位置,不会影响其质量,因此也可以用来测量 LG 光束阵列<sup>[36]</sup>。但是在文献<sup>[36]</sup>中,被测量的  $3 \times 3$  的 LG 光束阵列中各光束具有相同的  $l$ , 因此并没有分析 LG 光束阵列与转换得到的 HG 光束阵列之间的位置映射关系。本文研究发现当使用倾斜透镜测量 LG 光束阵列时,得到的 HG 光束阵列中的每个单元与 LG 光束阵列的位置关系不是一一对应的,因此在测量中容易造成混淆。综上可知,明确其位置映射关系,对于使用倾斜透镜测量 LG 光束阵列是至关重要的。

本文对使用倾斜透镜将 LG 光束阵列转换为 HG 光束阵列的位置映射关系进行了理论分析和实验验证,实验结果与理论分析完全一致。该工作为 LG 光束阵列的测量提供了更明确的理论指导,使倾斜透镜可以更好地应用于 LG 光束阵列的拓扑荷数的测量。

## 2 理论分析

LG 光场<sup>[37]</sup>通常可以描述为

$$F_{LG, \rho l} = \sqrt{\frac{2\rho!}{\pi(\rho+|l|)!}} \frac{1}{w(z)} \left[ \frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right]^{|l|} L_{\rho}^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left[ \frac{ikr^2 z}{2(z^2 + z_R^2)} \right] \exp(i l \varphi) \exp \left[ \frac{-r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[ -i(2\rho + |l| + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_R} \right) \right], \quad (1)$$

式中:  $k=2\pi/\lambda$  为波数;  $(r, \varphi)$  为极坐标;  $l$  为方位指数, 也称拓扑荷数;  $\rho$  为径向指数;  $z_R$  为瑞利距离; 高斯项的  $1/e$  半径为  $w(z) = w_0 \left[ (z^2 + z_R^2)/z_R^2 \right]^{1/2}$ ;  $w_0$  为腰斑半径;  $L_{\rho}^{|l|}(x)$  为拉盖尔多项式。为简便起见, 本文只考虑在高斯光束束腰处嵌入光学涡旋的光场。

$$E_0(x, y) = \exp(i l \varphi) \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right), \quad (2)$$

式中:  $(x, y)$  为直角坐标;  $\varphi = \arctan(y/x)$ 。将  $\varphi$  代入式(2)可得

$$E_0(x, y) = \left\{ \cos[\arctan(y/x)] + i \sin[\arctan(y/x)] \right\}^l \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right) = \left( \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^l \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right), \quad (3)$$

式中: 第一部分的分母  $(\sqrt{x^2 + y^2})^l$  不利于最后结果的导出, 因此可将其省略<sup>[35]</sup>; 分子  $(x + iy)^l$  可由二项式公式  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$  替代。因此, LG 光场的表达式可以写为

$$E_0(x, y) = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} x^k (iy)^{l-k} \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right). \quad (4)$$

另外, 图 1 为绕  $x$  轴旋转  $\theta$  的倾斜透镜,  $f_x$  为  $x$ - $z$  平面的焦距,  $f_y$  为  $y$ - $z$  平面的焦距,  $S_x$  为  $x$ - $z$  平面的焦点,  $S_y$  为  $y$ - $z$  平面的焦点, 其光线传输矩阵<sup>[38]</sup>可以表示为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f_x} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_y} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

式中:  $f_x = f/\cos \theta$ ;  $f_y = f \cos \theta$ 。

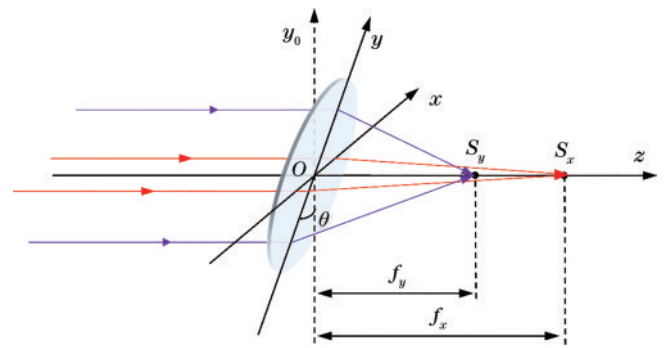


图 1 绕  $x$  轴旋转  $\theta$  的倾斜透镜

Fig. 1 Tilted lens rotates around the  $x$ -axis with an angle of  $\theta$

因此, 倾斜透镜的透过率函数可以表示为

$$t(x, y) = \exp \left( -\frac{ik}{2f_x} x^2 - \frac{ik}{2f_y} y^2 \right). \quad (6)$$

入射的 LG 光场  $E_0(x, y)$  通过倾斜透镜, 再经过菲涅耳衍射得到的光场  $E_1(\xi, \eta, d)$ , 可以描述为

$$E_1(\xi, \eta, d) = \left( -\frac{ik}{2\pi d} \right) \exp\left[ \frac{ik}{2d}(\xi^2 + \eta^2) \right] \times \iint E_0(x, y) t(x, y) \exp\left[ \frac{ik}{2d}(x^2 + y^2) - \frac{ik}{d}(x\xi + y\eta) \right] dx dy, \quad (7)$$

式中:  $(x, y)$  为输出平面上的直角坐标;  $(\xi, \eta)$  为接收平面上的直角坐标;  $d$  为衍射距离。将式(6)代入式(7)中, 并整理指数项可得

$$E_1(\xi, \eta, d) =$$

$$c_1 \iint E_0(x, y) \exp[ax^2 + by^2 + c(x\xi + y\eta)] dx dy, \quad (8)$$

式中:  $c_1 = \left( -\frac{ik}{2\pi d} \right) \exp\left[ \frac{ik}{2d}(\xi^2 + \eta^2) \right]$ ;  $a = \frac{ik}{2d} - \frac{ik}{2f_x}$ ;

$b = \frac{ik}{2d} - \frac{ik}{2f_y}$ ;  $c = -\frac{ik}{d}$ 。求出式(8)的积分结果则可以

得到 HG 光束的形式<sup>[35]</sup>, 并且, 该转换是相互的, 入射的 HG 光束经过倾斜透镜同样能够转换为 LG 光束。

当入射光场为 LG 光束阵列时, 入射光场阵列  $E_{\text{array, in}}$  可以表示为

$$E_{\text{array, in}}(x, y) = \sum_{j=1}^N E_0(x + X_j, y + Y_j), \quad (9)$$

式中:  $j$  是 LG 光束阵列中各光束的次序;  $N$  为阵列中各光束的总数量;  $X_j, Y_j$  分别为各光束在输出平面的  $x, y$  方向的偏移量。简单起见, 我们只考虑其中一束 LG 光场  $E_0(x + X_j, y + Y_j)$ 。那么, 与式(8)中形式类似, 其通过倾斜透镜再经过菲涅耳衍射得到的光场  $E_2(\xi, \eta, d)$  可以表示为

$$E_2(\xi, \eta, d) = c_1 \iint E_0(x + X_j, y + Y_j) \exp[ax^2 + by^2 + c(\xi x + \eta y)] dx dy = c_1 c_2 \iint E_0(x, y) \exp\left\{ ax^2 + by^2 + c\left[ x\left(\xi - \frac{2a}{c}X_j\right) + y\left(\eta - \frac{2b}{c}Y_j\right) \right] \right\} dx dy, \quad (10)$$

式中:  $c_2 = \exp[ax_j^2 + bY_j^2 - c(\xi X_j + \eta Y_j)]$ 。

将式(4)代入式(10), 再分离变量, 可得

$$E_2(\xi, \eta, d) = c_1 c_2 \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (i)^{l-k} \int x^k \exp\left[ a_1 x^2 + cx\left(\xi - \frac{2a}{c}X_j\right) \right] dx \times \int y^{l-k} \exp\left[ b_1 y^2 + cy\left(\eta - \frac{2b}{c}Y_j\right) \right] dy, \quad (11)$$

式中:  $a_1 = a - \frac{1}{\omega_0^2}$ ;  $b_1 = b - \frac{1}{\omega_0^2}$ 。

利用如下积分公式<sup>[39]</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \exp(-Ax^2 - Bx) dx = \sqrt{\pi} \left( \frac{i}{2} \right)^m A^{-\frac{m+1}{2}} \exp\left( \frac{B^2}{4A} \right) H_m\left( \frac{iB}{2\sqrt{A}} \right), \quad (12)$$

可以将式(11)推导为

$$E_2(\xi, \eta, d) = c_1 c_2 \left( -\frac{1}{2} \right)^l \pi (-a_1)^{-\frac{1}{2}} (-b_1)^{-\frac{l+1}{2}} \exp\left[ \frac{c^2 \left( \xi - \frac{2a}{c}X_j \right)^2}{-4a_1} + \frac{c^2 \left( \eta - \frac{2b}{c}Y_j \right)^2}{-4b_1} \right] \times \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \left( -i \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} \right)^k H_k \left[ \frac{-c \left( \xi - \frac{2a}{c}X_j \right)}{2\sqrt{a_1}} \right] H_{l-k} \left[ \frac{-c \left( \eta - \frac{2b}{c}Y_j \right)}{2\sqrt{b_1}} \right]. \quad (13)$$

利用如下求和公式<sup>[39]</sup>

$$\sum_{k=0}^l \binom{l}{k} v^k H_k(X) H_{l-k}(Y) = (1+v^2)^{\frac{l}{2}} H_l\left( \frac{vX+Y}{\sqrt{1+v^2}} \right), \quad (14)$$

并代入  $a = \frac{ik}{2d} - \frac{ik}{2f_x}$ ,  $b = \frac{ik}{2d} - \frac{ik}{2f_y}$ ,  $c = -\frac{ik}{d}$ , 则式(13)

可以被推导为

$$E_2(\xi, \eta, d) = c_1 c_2 \left( -\frac{1}{2} \right)^l \pi (-a_1)^{-\frac{1}{2}} (-b_1)^{-\frac{l+1}{2}} \exp\left\{ \frac{c^2 \left[ \xi + \left(1 - \frac{d}{f_x}\right) X_j \right]^2}{-4a_1} + \frac{c^2 \left[ \eta + \left(1 - \frac{d}{f_y}\right) Y_j \right]^2}{-4b_1} \right\} \times \left( 1 - \frac{b_1}{a_1} \right)^{\frac{l}{2}} H_l \left\{ \frac{i \left[ \frac{c \left[ \xi + \left(1 - \frac{d}{f_x}\right) X_j \right]}{2a_1} - \frac{c \left[ \eta + \left(1 - \frac{d}{f_y}\right) Y_j \right]}{2b_1} \right]}{\sqrt{\frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_1}}} \right\}, \quad (15)$$

式中:  $H_l(x)$  为厄米多项式; 光场  $E_2(\xi, \eta, d)$  为 HG 光束的形式, 根据式(15)中横坐标  $\left[ \xi + \left(1 - \frac{d}{f_x}\right) X_j \right]$  与纵

坐标  $\left[ \eta + \left(1 - \frac{d}{f_y}\right) Y_j \right]$  的表达形式, 光场  $E_2(\xi, \eta, d)$

还可以表示为  $E_2 \left[ \xi + \left(1 - \frac{d}{f_x}\right) X_j, \eta + \left(1 - \frac{d}{f_y}\right) Y_j, d \right]$  的形式。因此,当入射的 LG 光场由  $E_0(x, y)$  变为带有有一定偏移量的  $E_0(x + X_j, y + Y_j)$  后,仍能被转换为 HG 光束,并且该变化不会影响光场质量,而倾斜透镜后的 HG 光场也将由位于坐标中心处的  $E_1(\xi, \eta, d)$  变为带有有一定偏移量的  $E_2 \left[ \xi + \left(1 - \frac{d}{f_x}\right) X_j, \eta + \left(1 - \frac{d}{f_y}\right) Y_j, d \right]$ 。所以,当入射光场为 LG 光束阵列  $E_{\text{array, in}}(x, y)$  时,转换得到的 HG 光束阵列可以表示为

$$E_{\text{array, out}}(\xi, \eta, d) = \sum_{j=1}^N E_2 \left[ \xi + \left(1 - \frac{d}{f_x}\right) X_j, \eta + \left(1 - \frac{d}{f_y}\right) Y_j, d \right] \quad (16)$$

式中:  $E_{\text{array, out}}$  表示出射的光场阵列,同样地, HG 光束阵列作为入射光场时,也能在接收平面得到 LG 光束阵列。由上述分析可以得出结论,当倾斜透镜绕  $x$  轴旋转  $\theta$  时,有  $f_x = f / \cos \theta > f_y = f \cos \theta$ , 由于接收平面需位于两焦点  $S_x, S_y$  之间以获得高质量的 HG 光束阵列,则有  $f_x > d > f_y$ , 因此可得,  $1 - \frac{d}{f_x} > 0, 1 - \frac{d}{f_y} < 0$ 。

由此可知, LG 光束阵列  $\sum_{j=1}^N E_0(x + X_j, y + Y_j)$  与 HG 光束阵列  $\sum_{j=1}^N E_2 \left[ \xi + \left(1 - \frac{d}{f_x}\right) X_j, \eta + \left(1 - \frac{d}{f_y}\right) Y_j, d \right]$  的位置关于  $x$  轴对称。另外,由于透镜具有圆对称性,不难得出一个更加普适的结论,当倾斜透镜关于任意轴旋转  $\theta$  时, LG 光束阵列和被转换得到的 HG 光束阵列的位置都是关于该轴对称的。

因此,在实际应用中, LG 光束阵列的  $l$  信息,可以根据上述理论推导的位置映射关系,以及实验中转换得到的 HG 光束阵列的位置分布来测量。

### 3 实验装置与结果

实验装置如图 2 所示,本文采用具有单模光纤耦合输出的 532 nm 激光器。准直扩束器(CBE)可对光纤出射的光束进行准直和扩束。孔径光阑  $A_1$  用来控制光束尺寸,使其与空间光调制器(SLM)工作区域相匹配。可调谐偏振片 P 将入射光束的偏振状态调整至与 SLM 的一致。SLM 上加载用于生成 LG 光束阵列的相位型的复振幅编码全息图<sup>[40-41]</sup>。由透镜  $L_1, L_2$  和孔径光阑  $A_2$  组成的  $4f$  系统用于选出第一级衍射光束,其焦距  $f_1 = f_2 = 150$  mm,孔径光阑  $A_2$  被放置在透镜  $L_1$  的后焦面上。于是,在透镜  $L_2$  的后焦面上可以用电荷耦合器件(CCD)观察生成的 LG 光束阵列。倾斜透镜  $L_3$  位于透镜  $L_2$  后焦面上,用于将 LG 光束阵列转换为 HG 光束阵列,其焦距  $f_3 = 400$  mm。最后,转换得到的 HG 光束阵列由 CCD 观察记录。

图 3 是加载到 SLM 上用于生成 LG 光束阵列的相位图,图 3 右侧给出了相位在  $0 \sim 2\pi$  之间变化的色度图,图中数字分别对应各光束的  $l$ 。图 3(a)为生成  $l = -5$  单束 LG 光束的相位图。图 3(b)为生成  $l = -1, 2, -3, 4$  的  $2 \times 2$  的 LG 光束阵列的相位图,图中直角坐标反映了 LG 光束阵列的位置分布,  $X_j, Y_j$  分别表示  $l = 2$  的 LG 光束在  $x, y$  方向上的横向偏移量。图 3(c)为生成  $l = -1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, -9$  的  $3 \times 3$  的 LG 光束阵列的相位图。图 3(d)为生成  $l = 2, -5, 8$  的  $3 \times 1$  的 LG 光束阵列的相位图。图 3(e)为生成  $l = 4, 5, 6$  的  $1 \times 3$  的 LG 光束阵列的相位图。

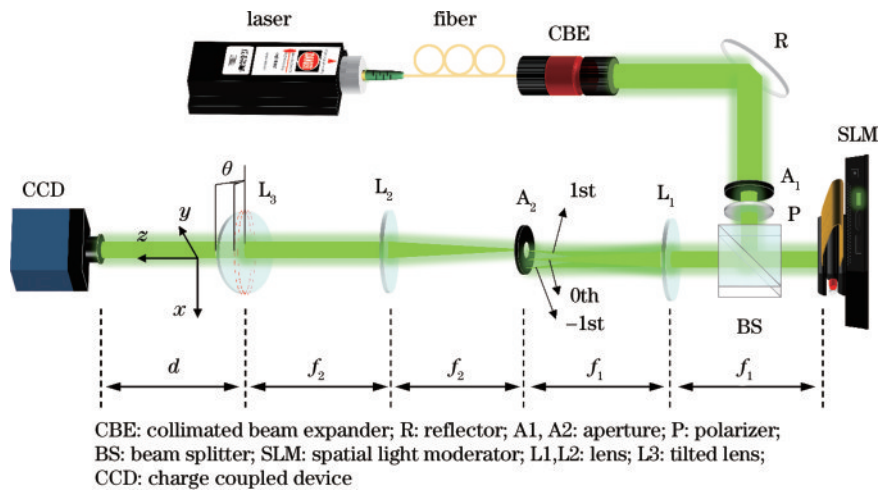


图 2 利用倾斜透镜将 LG 光束阵列转换为 HG 光束阵列的示意图

Fig. 2 Experimental setup for converting the LG beams array into the HG beams array by a tilted lens

图 4 是 CCD 在  $L_2$  后焦面处记录的 LG 光束阵列,图 4 右侧给出了归一化光强在  $0 \sim 1$  之间变化的色度图,图中白色数字对应各光束的  $l$ 。图 4(a)为  $l = -5$

的单束 LG 光束,图中右上角的直角坐标给出了输出平面上 LG 光场的分布方向。图 4(b)为  $l = -1, 2, -3, 4$  的  $2 \times 2$  的 LG 光束阵列。图 4(c)为  $l = -1, 2,$



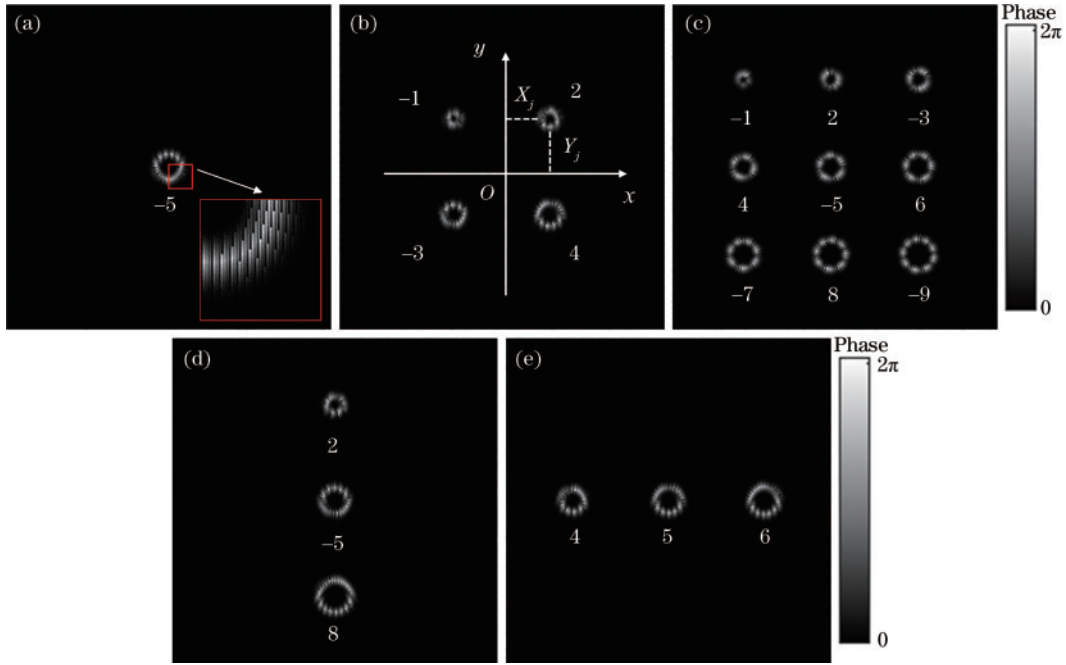


图 3 加载在 SLM 上用于生成 LG 光束阵列的相位图。(a)  $1 \times 1$ ; (b)  $2 \times 2$ ; (c)  $3 \times 3$ ; (d)  $3 \times 1$ ; (e)  $1 \times 3$

Fig. 3 Phase patterns loaded into SLM for generating the LG beams arrays. (a)  $1 \times 1$ ; (b)  $2 \times 2$ ; (c)  $3 \times 3$ ; (d)  $3 \times 1$ ; (e)  $1 \times 3$

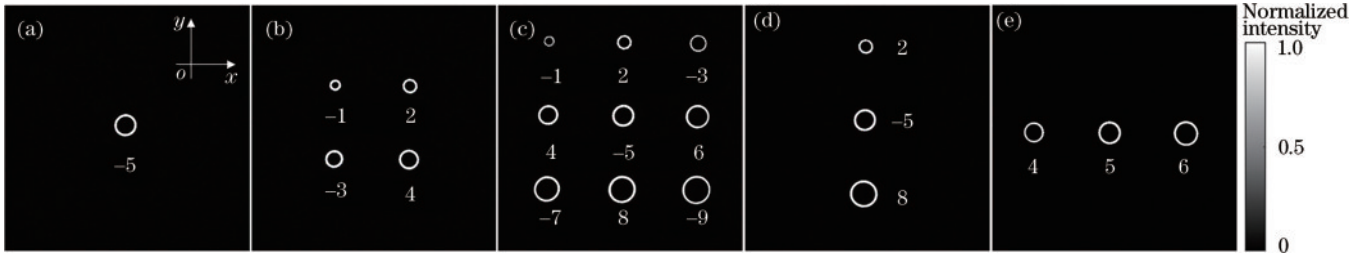


图 4 透镜  $L_2$  焦面上 LG 光束阵列实验结果。(a)  $1 \times 1$ ; (b)  $2 \times 2$ ; (c)  $3 \times 3$ ; (d)  $3 \times 1$ ; (e)  $1 \times 3$

Fig. 4 Experimental results of LG beam arrays at the focal plane of lens  $L_2$ . (a)  $1 \times 1$ ; (b)  $2 \times 2$ ; (c)  $3 \times 3$ ; (d)  $3 \times 1$ ; (e)  $1 \times 3$

$-3, 4, -5, 6, -7, 8, -9$  的  $3 \times 3$  的 LG 光束阵列。图 4(d) 为  $l=2, -5, 8$  的  $3 \times 1$  的 LG 光束阵列, 图 4(e) 为  $l=4, 5, 6$  的  $1 \times 3$  的 LG 光束阵列。以上 5 组 LG 光场的  $l$  信息分别可以表示为矩阵形式

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{\text{LG},a} = [-5] \\ \mathbf{M}_{\text{LG},b} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{\text{LG},c} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{\text{LG},d} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{\text{LG},e} = [4 \ 5 \ 6] \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{M}_{\text{LG},a}$  表示图 4(a) 对应的 LG 光束阵列。

实验中, CCD 到透镜  $L_3$  的距离  $d=180$  mm, 透镜  $L_3$  倾斜角度  $\theta=65^\circ$ , 此时能够获得清晰的 HG 光束阵列。图 5 为 LG 光束阵列经过倾斜透镜转换得到的 HG 光束阵列, 图 5 右侧给出了其归一化光强在  $0 \sim 1$  变化的色度图, 图 5(a)~(e) 分别对应图 4(a)~(e) 中的 LG 光束阵

列, 此时倾斜透镜绕  $x$  轴旋转。以图 5(b) 的  $2 \times 2$  阵列为例, 通过对各光束条纹数量的计数, 可以得到它们分别对应的 LG 光束的  $l$  绝对值。再将图 5(b) 与图 4(b) 进行对比, 可以明确,  $l=-1, -3$  的 LG 光束经过绕  $x$  轴旋转的倾斜透镜转化得到的 HG 光束的光斑方向沿  $y=-x$  方向,  $l=2, 4$  的 LG 光束经过绕  $x$  轴旋转的倾斜透镜转化得到的 HG 光束的光斑方向沿  $y=x$  方向。于是, 可以用图 5 中的数字和正负性反映 HG 光束的暗条纹数和条纹方向, 分别对应 LG 光束的  $l$  及正负。因此, 图 5 中 5 组 HG 光束阵列的条纹信息矩阵可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{\text{HG},a,x} = [-5] \\ \mathbf{M}_{\text{HG},b,x} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{\text{HG},c,x} = \begin{bmatrix} -7 & 8 & -9 \\ 4 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{\text{HG},d,x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{\text{HG},e,x} = [4 \ 5 \ 6] \end{cases} \quad (18)$$

式中: 下标“ $x$ ”指此时倾斜透镜绕  $x$  轴旋转。

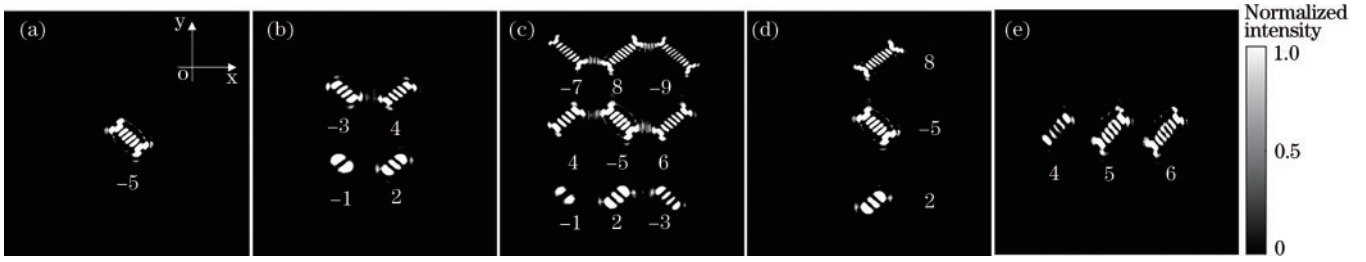


图 5 倾斜透镜  $L_3$  后 HG 光束阵列实验结果, 倾斜透镜绕  $x$  轴旋转。(a)  $1 \times 1$ ; (b)  $2 \times 2$ ; (c)  $3 \times 3$ ; (d)  $3 \times 1$ ; (e)  $1 \times 3$

Fig. 5 Experimental results of HG beams arrays after tilted lens  $L_3$ , the tilted lens is rotated about the  $x$ -axis. (a)  $1 \times 1$ ; (b)  $2 \times 2$ ; (c)  $3 \times 3$ ; (d)  $3 \times 1$ ; (e)  $1 \times 3$

图 6 为 LG 光束阵列经过倾斜透镜转换得到的 HG 光束阵列, 图 6 右侧给出了其归一化光强在 0~1 变化的色度图, 此时倾斜透镜绕  $y$  轴旋转, 图 6(a)~(e) 分别对应图 4(a)~(e) 中的 LG 光束阵列。此时可以看出,  $l$  为正的 LG 光束转换得到的 HG 光束条纹沿  $y = -x$  方向,  $l$  为负的 LG 光束转换得到的 HG 光束条纹沿  $y = x$  方向, 这一结论与文献 [35] 所讨论的情况一致。而这与图 5 中结果不同, 这是因为两种情况下, 倾斜透镜的旋转轴是垂直的。因此, 可得图 6 中 5 组 HG 光束阵列的条纹信息矩阵为

$$\begin{cases} M_{HG,a,y} = [-5] \\ M_{HG,b,y} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \\ M_{HG,c,y} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -5 & 4 \\ -9 & 8 & -7 \end{bmatrix} \\ M_{HG,d,y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix} \\ M_{HG,e,y} = [6 \ 5 \ 4] \end{cases} \quad (19)$$

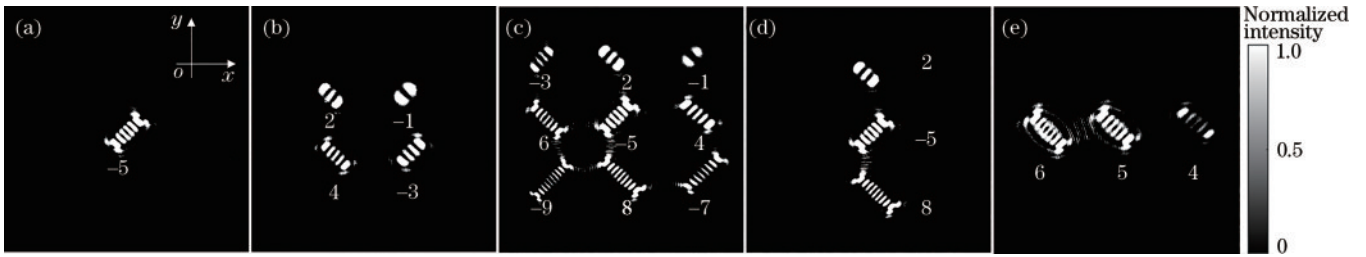


图 6 倾斜透镜  $L_3$  后 HG 光束阵列实验结果, 倾斜透镜绕  $y$  轴旋转。(a)  $1 \times 1$ ; (b)  $2 \times 2$ ; (c)  $3 \times 3$ ; (d)  $3 \times 1$ ; (e)  $1 \times 3$

Fig. 6 Experimental results of HG beams array after tilted lens  $L_3$ , the tilted lens is rotated about the  $y$ -axis. (a)  $1 \times 1$ ; (b)  $2 \times 2$ ; (c)  $3 \times 3$ ; (d)  $3 \times 1$ ; (e)  $1 \times 3$

如图 5 和图 6 所示, 接收平面上各个位置均能获得条纹清晰的 HG 光束, 所以, 当 LG 光束偏离倾斜透镜中心入射时, 仅仅影响转换得到的 HG 光束在接收平面上的位置, 而不影响其光场质量, 这与第 2 节中的结论一致。对比式 (17) 和式 (18) 可以发现, 矩阵  $M_{HG,b,x}$  与  $M_{LG,b}$ 、矩阵  $M_{HG,c,x}$  与  $M_{LG,c}$ 、矩阵  $M_{HG,d,x}$  与  $M_{LG,d}$  均关于  $x$  轴对称, 而矩阵  $M_{HG,a,x}$  与  $M_{LG,a}$ 、矩阵  $M_{HG,e,x}$  与  $M_{LG,e}$  因位于  $x$  轴上而保持不变。由此可以验证第 2 节中结论, 当倾斜透镜绕  $x$  旋转一定角度时, 入射的 LG 光束阵列与转换得到的 HG 光束阵列的位置将关于  $x$  轴对称。对比式 (17) 和式 (19) 可以发现, 矩阵  $M_{HG,b,y}$  与  $M_{LG,b}$ 、矩阵  $M_{HG,c,y}$  与  $M_{LG,c}$ 、矩阵  $M_{HG,e,y}$  与  $M_{LG,e}$  均为关于  $y$  轴对称, 而矩阵  $M_{HG,a,y}$  与  $M_{LG,a}$ 、矩阵  $M_{HG,d,y}$  与  $M_{LG,d}$  因位于  $y$  轴上而保持不变。因此可以证明, 当倾斜透镜绕  $y$  轴旋转时, 入射的 LG 光束阵列与转换得到的 HG 光束阵列也将关于  $y$  轴对称。

两组实验结果共同验证了第 2 节中理论分析得到的位置映射关系, 当倾斜透镜关于任意轴旋转一定角度时, LG 光束阵列和被转换得到的 HG 光束阵列的位置都是关于该轴对称的。由上述分析验证的位置映射关系和实验中转换得到的 HG 光束阵列的光场分布, 便可以得到待测量的 LG 光束阵列的  $l$  信息。

## 4 结 论

本文推导了基于倾斜透镜的 LG 光束阵列与 HG 光束阵列相互转换的位置映射关系。当倾斜透镜绕任意轴旋转时, LG 光束阵列与 HG 光束阵列的位置将会关于该轴对称。通过对比实验生成的 LG 光束阵列的拓扑荷数矩阵, 以及由倾斜透镜转换得到的 HG 光束阵列的条纹信息矩阵, 验证了理论分析的正确性。使用倾斜透镜测量 LG 光束阵列简单高效, 该工作为利用倾斜透镜测量 LG 光束阵列提供了理论支持, 使 LG

光束阵列在光学操纵、光学加工以及光通信领域可以得到更好的应用。

## 参 考 文 献

- [1] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J, et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes[J]. *Physical Review A*, 1992, 45(11): 8185-8189.
- [2] Tang A, Bin L, Xiong G Y, et al. Completely revealing the amplitude properties of Laguerre-Gaussian vortex beams[J]. *Optics Express*, 2022, 30(16): 28892-28904.
- [3] Gahagan K T, Swartzlander G A. Optical vortex trapping of particles[J]. *Optics Letters*, 1996, 21(11): 827-829.
- [4] Figliozzi P, Sule N, Yan Z J, et al. Driven optical matter: dynamics of electrostatically coupled nanoparticles in an optical ring vortex[J]. *Physical Review E*, 2017, 95(): 022604.
- [5] Shen Y J, Wang X J, Xie Z W, et al. Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities[J]. *Light: Science & Applications*, 2019, 8(1): 1-29.
- [6] Zhang Y X, Liu X F, Lin H, et al. Ultrafast multi-target control of tightly focused light fields[J]. *Opto-Electronic Advances*, 2022, 5(3): 210026.
- [7] Gibson G, Courtial J, Padgett M J, et al. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum[J]. *Optics Express*, 2004, 12(22): 5448-5456.
- [8] Huang H, Yue Y, Ahmed N, et al. Systems and techniques for orbital angular momentum based reconfigurable switching: US20150349910[P]. 2015-12-03.
- [9] Bozinovic N, Yue Y, Ren Y X, et al. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers[J]. *Science*, 2013, 340(6140): 1545-1548.
- [10] Du J, Li S H, Zhao Y F, et al. Demonstration of M-ary encoding/decoding using visible-light Bessel beams carrying orbital angular momentum (OAM) for free-space obstruction-free optical communications[C]//Optical Fiber Communications Conference and Exhibition (OFC), March 22-26, 2015, Los Angeles, CA, USA. Washington, D. C.: Optica Publishing Group, 2015: M2F.4.
- [11] Ke X Z, Guo X L. Realization of optical phase information encode by using orbital angular momentum of light beam[J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2015, 32(1): 69-76.
- [12] Li S H, Xu Z D, Liu J, et al. Experimental demonstration of free-space optical communications using orbital angular momentum (OAM) array encoding/decoding[C]//Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO), May 10-15, 2015, San Jose, CA, USA. Washington, D. C.: Optica Publishing Group, 2015: JTh2A.67.
- [13] 刘海达, 黑小兵, 杨洋, 等. 用于水下光通信高维调制与解调的轨道角动量叠加态[J]. *激光与光电子学进展*, 2023, 60(9): 0901001.
- [14] 南久航, 韩一平. 双路多进制涡旋光通信[J]. *光学学报*, 2021, 41(12): 1206001.
- [15] 韦育, 于永河, 黑小兵, 等. 涡旋光束和光子计数在水下光通信中的应用[J]. *激光与光电子学进展*, 2022, 59(13): 1301001.
- [16] Yang L, Qian D D, Xin C, et al. Direct laser writing of complex microtubes using femtosecond vortex beams[J]. *Applied Physics Letters*, 2017, 110(22): 221103.
- [17] Chen Y, Gao J, Jiao Z Q, et al. Mapping twisted light into and out of a photonic chip[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(23): 233602.
- [18] Emile O, Emile J. Naked eye picometer resolution in a Michelson interferometer using conjugated twisted beams[J]. *Optics Letters*, 2017, 42(2): 354-357.
- [19] Verma G, Yadav G. Compact picometer-scale interferometer using twisted light[J]. *Optics Letters*, 2019, 44(14): 3594-3597.
- [20] Liu L, Gao Y S, Liu X Z. High-dimensional vortex beam encoding/decoding for high-speed free-space optical communication[J]. *Optics Communications*, 2019, 452: 40-47.
- [21] Li X Z, Zhang H. Anomalous ring-connected optical vortex array[J]. *Optics Express*, 2020, 28(9): 13775-13785.
- [22] Kumar P, Nishchal N K. Array formation of optical vortices using in-line phase modulation[J]. *Optics Communications*, 2021, 493: 127020.
- [23] Lee D, Lee H, Migara L K, et al. Widely tunable optical vortex array generator based on grid patterned liquid crystal cell[J]. *Advanced Optical Materials*, 2021, 9(2): 2001604.
- [24] Wang X C, Bai S C, Pan Y, et al. Generation of one-dimensional vortex-arrays with tunable singularity and high peak power in a passively Q-switched microchip laser[J]. *Optics & Laser Technology*, 2021, 143: 107367.
- [25] Yuan Y, Tong L Y, Cai F X, et al. Direct generation of optical vortex arrays by rotating in an all-solid-state Yb: CALGO laser[J]. *Optical Materials Express*, 2021, 11(6): 1594-1602.
- [26] Zhang Q L, Yu D H, Xu J, et al. Experimental observation of optical vortex array by intra-resonator modulated high-order laser resonator[J]. *Optik*, 2021, 225: 165870.
- [27] Zhu L H, Tang M M, Li H H, et al. Optical vortex lattice: an exploitation of orbital angular momentum[J]. *Nanophotonics*, 2021, 10(9): 2487-2496.
- [28] Kumar P, Nishchal N K, AlFalou A. Controllable optical vortex array for image encoding[J]. *IEEE Photonics Technology Letters*, 2022, 34(10): 521-524.
- [29] Long Z X, Zhang H, Tai Y P, et al. Optical vortex array momentum in a superposition state for high-dimensional modulation and demodulation in underwater optical communication[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2023, 60(9): 0901001.

- with deformable hybrid Ferris structures[J]. *Optics & Laser Technology*, 2022, 145: 107524.
- [30] Wang E L, Shi L N, Niu J B, et al. Multichannel spatially nonhomogeneous focused vector vortex beams for quantum experiments[J]. *Advanced Optical Materials*, 2019, 7(8): 1801415.
- [31] Hickmann J M, Fonseca E J S, Soares W C, et al. Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 105(5): 053904.
- [32] Hosseini-Saber S M A, Akhlaghi E A, Saber A. Diffractometry-based vortex beams fractional topological charge measurement[J]. *Optics Letters*, 2020, 45(13): 3478-3481.
- [33] Gao H, Han Y H, Li Y, et al. Topological charge measurement of concentric OAM states using the phase-shift method[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2018, 35(1): A40-A44.
- [34] Vaity P, Banerji J, Singh R P. Measuring the topological charge of an optical vortex by using a tilted convex lens [J]. *Physics Letters A*, 2013, 377(15): 1154-1156.
- [35] Kotlyar V V, Kovalev A A, Porfirev A P. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge[J]. *Applied Optics*, 2017, 56(14): 4095-4104.
- [36] Harshith B S, Samanta G K. Controlled generation of array beams of higher order orbital angular momentum and study of their frequency-doubling characteristics[J]. *Scientific Reports*, 2019, 9(1): 1-7.
- [37] Allen L, Padgett M J, Babiker M. The orbital angular momentum of light[J]. *Progress in Optics*, 1999, 39: 291-372.
- [38] Hodgson N, Weber H. *Laser resonators and beam propagation*[M]. Berlin: Springer Verlag, 2005: 45-46.
- [39] Prudnikov A P, Brychkov Y A, Marichev O I. *Integrals and series: elementary functions*[M]. Britain: Biddles Short Run Book, King's Lynn, 1986: 344, 641.
- [40] Du Y F, Liu D M, Fu S N, et al. Reconfigurable generation of double-ring perfect vortex beam[J]. *Optics Express*, 2021, 29(11): 17353-17364.
- [41] Arrizón V, Ruiz U, Carrada R, et al. Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2007, 24(11): 3500-3507.