

激光与光电子学进展

纠缠测量提升两比特量子态分辨效率(特邀)

田博轩, 侯志博*, 项国勇

中国科学技术大学中国科学院量子信息重点实验室, 安徽 合肥 230026

摘要 在给定错误率下, 减小量子态分辨中平均消耗的拷贝数, 称为最小消耗量子态分辨。最小消耗量子态分辨可以把节省的资源用于后续量子任务, 在量子密码等量子任务中具有重要的应用价值。研究了两比特量子态的最小消耗量子态分辨。理论结果表明, 即使两比特量子态只有经典关联, 没有量子纠缠, 纠缠测量仍能远超过两个比特分别进行局域测量的效果。实验结果证实, 当错误率要求足够小时, 纠缠测量实验装置消耗的拷贝数仅为局域测量的 1/12, 就可满足错误率要求。该研究结果突出了纠缠测量在最小消耗量子态分辨中的作用, 显示了量子测量中纠缠的重要意义。

关键词 量子测量; 量子控制; 量子分辨; 量子信息

中图分类号 O413.1

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP232751

Enhancing Minimum-Consumption Discrimination of Two-Qubit Quantum States via Entangling Measurements (Invited)

Tian Boxuan, Hou Zhibo*, Xiang Guoyong

CAS Key Laboratory of Quantum Information, University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, Anhui, China

Abstract Reducing the average number of copies consumed in quantum state discrimination under a given error rate is referred to as minimum-consumption quantum state discrimination. Minimum-consumption quantum state discrimination allows the saved resources to be utilized for subsequent quantum tasks, and it holds significant practical value in tasks such as quantum cryptography. In this paper, we investigate minimum-consumption quantum state discrimination of two-qubit quantum states. The theoretical results indicate that even when two-qubit quantum states only possess classical correlations and no quantum entanglement, entangled measurements still far outperform the effects of performing local measurements on the two qubits individually. Experimental results confirm that when the error rate requirement is low enough, the average number of copies consumed by entangled measurement device is only one-twelfth of that consumed by local measurements, while still meeting the error rate requirement. Our research results highlight the role of entangled measurements in minimum-consumption quantum state discrimination, demonstrating the importance of entanglement in quantum measurements.

Key words quantum measurement; quantum control; quantum discrimination; quantum information

1 引言

量子态用来刻画量子世界中系统的状态, 两个量子态一般不正交, 不能确定性区分。因此, 探究如何最优化量子态分辨效率成了研究量子态分辨问题的关键^[1-17]。当前对这一问题的一类研究主题是近几年提出的最小消耗量子态分辨问题^[1-2, 9-10]。该问题假设拥有无穷个量子态的拷贝, 量子态分辨要求达到给定错

误率 ϵ 。我们需要设计如何对量子态进行测量, 以达到消耗平均最少的拷贝数来满足错误率要求的目标。这一问题所假设的场景与众多实际的量子通信^[18-20]与量子计算^[21-23]等量子任务相符。其致力于快速、低消耗以及高稳定性地实现量子态分辨, 因此在量子信息任务中具有重要价值。

当今对最小消耗量子态分辨的研究已有较大的进展。当 ϵ 足够小时, 已有理论工作证明拷贝消耗数可

收稿日期: 2023-12-25; 修回日期: 2024-01-16; 录用日期: 2024-01-22; 网络首发日期: 2024-02-01

基金项目: 国家自然科学基金 (62222512, 12104439, 12134014, 11974335)、安徽省自然科学基金 (2208085J03)

通信作者: houzhibo@ustc.edu.cn

由概率相对熵表示^[9-10],当 ρ_0 与 ρ_1 是单比特态时,已有工作证明可以通过最优自适应全局策略来达到局域界限,且实验证明该局域界限可进一步被自适应量子集体测量超越^[1]。

然而迄今为止,尚未有对多比特量子态的最小消耗量子态分辨进行研究的工作。为了推进最小消耗分辨量子态的研究,本文将报道我们对多比特量子混态最小消耗分辨的研究工作。本文选取一类特殊的二比特量子态 ρ_0 与 ρ_1 ,理论研究表明,当 ϵ 趋于0时,对二比特态的两个比特进行纠缠测量以实现分辨所需要消耗

的拷贝数远远小于对两个比特分别测量所需要消耗的拷贝数。进一步的实验研究验证了这一点。本文纠缠测量装置所消耗的拷贝数将只有对两个比特分别进行测量时的1/12。该工作同样证明了纠缠测量可以利用测量中的纠缠特性实现巨大的效率提升,具有重要的应用价值。

2 基本原理

2.1 错误率 ϵ 趋于0时的平均消耗拷贝数

本文研究的二比特量子态表达式为

$$\begin{cases} \rho_0 = \frac{1}{3}(|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|^{\otimes 2} + |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|^{\otimes 2} + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|^{\otimes 2}) \\ \rho_1 = \frac{1}{3}(|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0| \otimes |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| \otimes |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|^{\otimes 2}) \end{cases}, \quad (1)$$

式中: $|\varphi_0\rangle = |0\rangle$; $|\varphi_1\rangle = \cos\alpha|0\rangle + \sin\alpha|1\rangle$; $|\varphi_2\rangle = \cos\frac{\alpha}{2}|0\rangle + \sin\frac{\alpha}{2}|1\rangle$ 。本文取 $\alpha = 15^\circ$ 。注意,这两个要区分的量子态都是可分态,不存在量子纠缠。另外,这两个量子态处在对称空间,即交换量子态中两个比特的顺序,量子态不变。

本文考虑了单拷贝测量的情形,即只允许一次测量一个拷贝,并且假定在测量前已知量子态有50%概率为 ρ_0 。这里讨论先验概率固定时 $\epsilon \rightarrow 0$ 的情况,已有的理论工作表明,在允许自适应测量时,最小平均拷贝消耗数^[9-10]由相对熵确定,即

$$\langle N \rangle = - \left[\frac{q}{E(P_0||P_1)} + \frac{1-q}{E(P_1||P_0)} \right] \ln \epsilon + O(\ln \epsilon), \quad (2)$$

式中: q 是测量前 ρ_0 态的先验概率, $E(P_0||P_1) =$

$$\max_{\{M_i\} \in A} D(P_0||P_1) = \max_{\{M_i\} \in A} \sum_i P_{0i} \ln \frac{P_{0i}}{P_{1i}} \text{ 与 } E(P_1||P_0) =$$

$$\max_{\{M_i\} \in A} D(P_1||P_0) = \max_{\{M_i\} \in A} \sum_i P_{1i} \ln \frac{P_{1i}}{P_{0i}} \text{ 为最大相对熵,}$$

$$P_{0i} = \text{tr}(M_i \rho_0), P_{1i} = \text{tr}(M_i \rho_1), \{M_i\} \text{ 表示正值算子测}$$

量(POVM), A 表示一切允许的POVM所构成的集合。这里 A 分为两种集合情况, $A = A_{\text{local}}$ 表示一切局域测量两个比特的测量所构成的集合, $A = A_{\text{entangled}}$ 表示包括纠缠测量的所有两比特测量的集合。

2.2 局域测量

对于第一种情况,可以通过数值计算来得到 $E(P_0||P_1)$ 与 $E(P_1||P_0)$ 的取值。由于本文所研究的两比特量子态的两个比特之间没有纠缠,但具有不同的经典关联。另外,对两个量子态 ρ_0 和 ρ_1 中的第一个比特进行局域测量时,无论选择什么测量,概率分布总是相同的。不同之处在于,具有不同经典关联的第二个比特在测量第一个比特后将会坍缩到不同的态上。因此,无法通过测量第一个比特获得任何相对熵,而测量第二个比特获得的最大相对熵可以通过数值搜索来计算(参考文献[1])。本文考虑的是最优自适应测量的情形。即当我们假设对第一个比特的测量基为 $S_1(\theta_1)|\theta_1\rangle\langle\theta_1|$ 、对第二个比特的测量基为 $S_2(\theta_2)|\theta_2\rangle\langle\theta_2|$ 时, $|\theta\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$, $E(P_0||P_1)$ 与 $E(P_1||P_0)$ 可表示为

$$\begin{cases} E_{\text{local}}(P_0||P_1) = \max_{S_1} \int_0^\pi d\theta_1 S_1(\theta_1) \langle\theta_1|\rho_{01}|\theta_1\rangle \max_{S_2} \int_0^\pi d\theta_2 S_2(\theta_2) P_{\theta_2|\theta_1}^0 \ln \frac{P_{\theta_2|\theta_1}^0}{P_{\theta_2|\theta_1}^1} \\ E_{\text{local}}(P_1||P_0) = \max_{S_1} \int_0^\pi d\theta_1 S_1(\theta_1) \langle\theta_1|\rho_{11}|\theta_1\rangle \max_{S_2} \int_0^\pi d\theta_2 S_2(\theta_2) P_{\theta_2|\theta_1}^1 \ln \frac{P_{\theta_2|\theta_1}^1}{P_{\theta_2|\theta_1}^0} \end{cases}, \quad (3)$$

式中: $\rho_{01} = \rho_{11} = \frac{1}{3}(|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0| + |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|)$

分别表示对 ρ_0 或 ρ_1 第二个比特求迹后,第一个比特约化

$$\text{密度矩阵;} P_{\theta_2|\theta_1}^0 = \frac{\langle\theta_1\theta_2|\rho_0|\theta_1\theta_2\rangle}{\langle\theta_1|\rho_{01}|\theta_1\rangle}, P_{\theta_2|\theta_1}^1 = \frac{\langle\theta_1\theta_2|\rho_1|\theta_1\theta_2\rangle}{\langle\theta_1|\rho_{11}|\theta_1\rangle}$$

表示当 ρ_0 或 ρ_1 的第一个比特的测量结果为 $|\theta_1\rangle$ 时,第二个比特坍缩到测量 $|\theta_2\rangle\langle\theta_2|$ 上的概率。 $S_1(\theta_1)$ 与

$S_2(\theta_2)$ 作为单比特POVM的测量基的权重系数,应满足归一化与半正定化条件,即

$$\begin{aligned} \int_0^\pi S_i(\theta) d\theta &= 2, \int_0^\pi S_i(\theta) \cos 2\theta d\theta = 0, \\ \int_0^\pi S_i(\theta) \sin 2\theta d\theta &= 0, S_i(\theta) \geq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

式中: i 取1或2。对式(3)中积分最优化的计算方法已

由文献 [1] 给出。通过计算得到 $E_{\text{local}}(P_1|P_0) = E_{\text{local}}(P_0|P_1) = 0.0040$, 依据式 (2), 平均拷贝数是 $\ln \epsilon$ 量级。

2.3 纠缠测量

当允许对两比特量子态做纠缠测量时, 情况将大不相同。为说明这一点, 这里引入一组两比特量子态纠缠投影测量基底,

$$\begin{cases} |1, 1\rangle = |\theta\theta\rangle \\ |1, 0\rangle = \frac{|\theta\theta^-\rangle + |\theta^-\theta\rangle}{\sqrt{2}} \\ |1, -1\rangle = |\theta^-\theta^-\rangle \\ |0, 0\rangle = \frac{|\theta\theta^-\rangle - |\theta^-\theta\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases}, \quad (5)$$

式中 $|\theta\rangle$ 已在 2.2 节中定义, $|\theta^-\rangle = \sin\theta|0\rangle - \cos\theta|1\rangle$ 是其正交态。这组基底是角动量耦合表象下的基底。

当 $\theta = \alpha/2 = 7.5^\circ$ 时, 若采用这组基底测量 ρ_0 , 则测量结果为 $|0, 0\rangle$ 的概率为 0, 其余三个基概率大于 0; 若采用这组基底测量 ρ_1 , 则测量结果为 $|1, 0\rangle$ 的概率为 0, 其余三个基概率大于 0。由于出现概率为 0 的情况, 相对熵趋于无穷大。依据式 (2), 平均拷贝数远小于 $\ln \epsilon$, 而局域测量平均消耗的拷贝数为 $\ln \epsilon$ 量级, 因此理论上纠缠测量消耗的拷贝数远小于局域测量。在实际情况下, 由于实验精度限制 (例如波片角度误差, 干涉可见度达不到 100%), 实际实现的量子测量并非理论量子测量。对 ρ_0 的测量结果为 $|0, 0\rangle$ 的概率和对 ρ_1 的测量结果为 $|1, 0\rangle$ 的概率总会略大于 0。因此, 对于纠缠测量, $E(P_0|P_1) = \max_{\{M_i\} \in A_{\text{entangled}}} \sum_i P_{0i} \ln \frac{P_{0i}}{P_{1i}}$ 与 $E(P_1|P_0) = \max_{\{M_i\} \in A_{\text{entangled}}} \sum_i P_{1i} \ln \frac{P_{1i}}{P_{0i}}$ 的取值取决于实验精度。即使考虑实验误差, 纠缠测量的相对熵也能远超局域测量的最好结果 0.0040, 消耗的平均拷贝数也远低于局域测量。这一理论结果揭示了纠缠测量具有远超局域测量的信息提取能力。

2.4 纠缠测量实验装置

为了对以上理论进行验证, 我们用参量光实验平台进行了分析。实验装置图如图 1 所示, 与文献 [1] 类似, 将两比特量子态中的一个量子比特编码在光子的偏振上 (水平和垂直偏振为基底), 另一个量子比特编码在光子的路径上 (下图中经过第一个 BD 后的上路径和下路径)。

2.4 纠缠测量实验装置

通过旋转上图中半波片的光轴的方向, 该实验装置可以制备无纠缠的二比特量子态并实现如式 (5) 所示的纠缠基底所构成的投影测量 (详见参考文献 [1] 补充材料)。

通过旋转上图中半波片的光轴的方向, 该实验装置可以制备无纠缠的二比特量子态并实现如式 (5) 所示的纠缠基底所构成的投影测量 (详见参考文献 [1] 补充材料)。

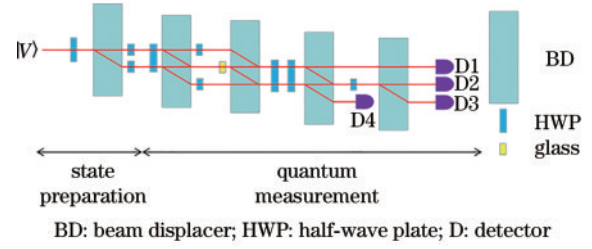


图 1 基于量子行走的纠缠测量装置光路图

Fig. 1 Entangled measurement setup based on photonics quantum walks

3 分析与讨论

利用该实验装置便可以测得输入态为 ρ_0 或 ρ_1 的概率分布, 进而求得相对熵的大小。本文取 θ 在 $-5^\circ \sim 20^\circ$ 之间的等间隔的 100 个取值, 并对每个取值通过测量 100000 个光子来估计相对熵的大小, 实验结果如图 2 所示。

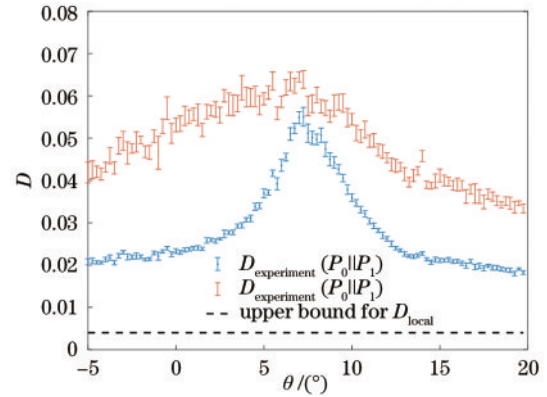


图 2 相对熵测量结果

Fig. 2 Measurement result of relative entropy

图 2 中的两条曲线显示了由实验测得的概率分布计算得到的相对熵, 其误差线的半长度等于标准差。下方的虚线是对两个比特分别做局域测量所能实现的相对熵的上界。可以看出, 无论 θ 取 $-5^\circ \sim 20^\circ$ 之间的何值, 两个相对熵均远大于 D_{local} 的最大可能取值, 即 E_{local} 。特别地, 当 $\theta = 7.5^\circ$ 时, 所测得的相对熵为 $D(P_0|P_1) = 0.0490$ 以及 $D(P_1|P_0) = 0.0544$, 二者均大于 $E_{\text{local}} = 0.0040$ 的 12 倍。因此, 在 ϵ 足够小时, 根据式 (2), 实验中纠缠测量装置消耗的平均拷贝数反比于纠缠测量装置对应的相对熵 0.0490, 相比于局域测量最大相对熵 0.0040, 实际实验实现的纠缠测量装置可以将态分辨所消耗的平均拷贝数减少到 1/12。若能提升测量仪器精度, 则该效率可进一步提升, 限制精度的因素有波片角度精度、干涉可见度、暗计数、随机符合等。

4 结论

本文将最小消耗量子态分辨研究从单比特情形推

广到更为复杂的两比特情形,在要求错误率很小的情况下,分别考虑了局域测量和纠缠测量的分辨性能。揭示了两比特量子态的独特性:这些态的两个比特间的经典关联能被纠缠测量极为敏感地探测到,却较难被局域测量所察觉。这一发现有力地证明了纠缠测量能够更加高效地从量子态中提取信息,将有助于推动量子纠缠测量应用于量子精密测量^[16-17,24]、量子保密通信^[18-20,25]与量子计算^[21-23]等领域。

本文所探讨的两比特态是众多两比特态中的特例,即两比特间只有经典关联而没有纠缠。更一般的两比特间可能会具有纠缠,也许对它们的态分辨问题会有新的现象出现,这值得我们进一步探索。

参 考 文 献

- [1] Tian B X, Yan W L, Hou Z, et al. Minimum-consumption discrimination of quantum states via globally optimal adaptive measurements[EB/OL]. (2023-07-30) [2023-11-09]. <https://arxiv.org/abs/2307.16347>.
- [2] Slussarenko S, Weston M M, Li J G, et al. Quantum state discrimination using the minimum average number of copies[J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118(3): 030502.
- [3] Helstrom C W. Quantum detection and estimation theory [J]. *Journal of Statistical Physics*, 1969, 1(2): 231-252.
- [4] Higgins B L, Booth B M, Doherty A C, et al. Mixed state discrimination using optimal control[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 103(22): 220503.
- [5] Calsamiglia J, de Vicente J I, Muñoz-Tapia R, et al. Local discrimination of mixed States[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 105(8): 080504.
- [6] Higgins B L, Doherty A C, Bartlett S D, et al. Multiple-copy state discrimination: thinking globally, acting locally [J]. *Physical Review A*, 2011, 83(5): 052314.
- [7] Acín A, Bagan E, Baig M, et al. Multiple-copy two-state discrimination with individual measurements[J]. *Physical Review A*, 2005, 71(3): 032338.
- [8] Brody D, Meister B. Minimum decision cost for quantum ensembles[J]. *Physical Review Letters*, 1996, 76(1): 1-5.
- [9] Martínez Vargas E, Hirche C, Sentís G, et al. Quantum sequential hypothesis testing[J]. *Physical Review Letters*, 2021, 126(18): 180502.
- [10] Li Y L, Tan V Y F, Tomamichel M. Optimal adaptive strategies for sequential quantum hypothesis testing[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2022, 392(3): 993-1027.
- [11] Renes J M, Blume-Kohout R, Scott A J, et al. Symmetric informationally complete quantum measurements [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2004, 45(6): 2171-2180.
- [12] Conlon L O, Eilenberger F, Lam P, et al. Discriminating mixed qubit states with collective measurements[J]. *Communications Physics*, 2023, 6: 1-8.
- [13] Peres A, Wootters W K. Optimal detection of quantum information[J]. *Physical Review Letters*, 1991, 66(9): 1119-1122.
- [14] Xu F X, Zhang X M, Xu L, et al. Experimental quantum target detection approaching the fundamental Helstrom limit[J]. *Physical Review Letters*, 2021, 127(4): 040504.
- [15] Cook R L, Martin P J, Geremia J M. Optical coherent state discrimination using a closed-loop quantum measurement[J]. *Nature*, 2007, 446(7137): 774-777.
- [16] Qiao L W, Peng J X, Zhu B Q, et al. Optimal initial states for quantum parameter estimation based on Jaynes-Cummings model[J]. *Chinese Optics Letters*, 2023, 21(10): 102701.
- [17] Duan B, Zou H Y, Chen J H, et al. High-precision whispering gallery microsensors with ergodic spectra empowered by machine learning[J]. *Photonics Research*, 2022, 10(10): 2343-2348.
- [18] Bennett C H. Quantum cryptography using any two nonorthogonal states[J]. *Physical Review Letters*, 1992, 68(21): 3121-3124.
- [19] Gisin N, Ribordy G, Tittel W, et al. Quantum cryptography[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2002, 74(1): 145-195.
- [20] van Enk S J. Unambiguous state discrimination of coherent states with linear optics: application to quantum cryptography[J]. *Physical Review A*, 2002, 66(4): 042313.
- [21] Knill E, Laflamme R, Zurek W H. Resilient quantum computation: error models and thresholds[J]. *Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1998, 454(1969): 365-384.
- [22] Aharonov D, Ben-Or M. Fault-tolerant quantum computation with constant error[J]. *SIAM Journal on Computing*, 2008, 38(4): 1207-1282.
- [23] Bennett C H, DiVincenzo D P. Quantum information and computation[J]. *Nature*, 2000, 404: 247-255.
- [24] 葛萌, 张铁犁, 刘浩, 等. 量子精密测量技术及其在测量领域的典型应用[J]. *宇航计测技术*, 2023, 43(6): 1-6. Ge M, Zhang T L, Liu H, et al. Quantum precision measurement technology and its typical applications in measurement field[J]. *Journal of Astronautic Metrology and Measurement*, 2023, 43(6): 1-6.
- [25] Wei K J, Hu X, Du Y Q, et al. Resource-efficient quantum key distribution with integrated silicon photonics [J]. *Photonics Research*, 2023, 11(8): 1364-1372.