

激光与光电子学进展

条纹偏折术检测凸球面元件曲率半径方法研究

刘鑫, 李大海*, 张新伟, 葛忍好, 严子良

四川大学电子信息学院, 四川 成都 610065

摘要 为了解决相位测量偏折术测量小曲率半径凸球面时相机所采集到的条纹图案边缘模糊、对比度低的问题,提出了基于逆光线追迹的预畸变条纹偏折术。该方法通过预设待测球面元件的曲率半径建立逆光线追迹模型来获得预畸变条纹图案。利用 N 步相移算法和迭代优化算法获得待测元件坐标和高度,再结合微分几何方法计算待测元件各点的平均曲率半径。在数值模拟中对曲率半径为 8 mm 的球面的测量精度约为 11 μm 。最后,在实验中对曲率半径均值为 8.26 mm 凸球面上的各点进行测量得到的平均曲率半径为 8.28 mm,测量区域的直径由原来的 4 mm 增加到 5 mm。结果表明,相比于传统偏折术,本文方法不仅解决了偏折术测量曲率半径较小凸球面时条纹图案边缘模糊、对比度低的问题,还提高了测量精度、增大了有效测量面积。

关键词 测量; 相位测量偏折术; 凸球面; 小曲率半径; 预畸变条纹; 微分几何

中图分类号 O436

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP220567

Deflectometry-Based Investigation of Radius of Curvature of Convex Spherical Elements Testing Method

Liu Xin, Li Dahai*, Zhang Xinwei, Ge Renhao, Yan Ziliang

College of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, Sichuan, China

Abstract A pre-distortion fringe deflection approach based on reverse ray tracing was proposed to address the blurred edges and low contrast of the fringe pattern captured by the camera while measuring a convex sphere with a small radius of curvature (ROC) using phase measuring deflectometry. In this approach, the pre-distortion fringe pattern was obtained by employing the reverse ray tracing model based on the nominal ROC of the spherical element to be tested. N -step phase shift algorithm and iterative optimization algorithm were applied to obtain the coordinates and height of each point on the element surface and subsequently combine with the differential geometry approach to compute the mean ROC of each point of the element. For a convex surface with an ROC value of 8 mm, the measurement accuracy in numerical simulations was approximately 11 μm . Finally, the mean ROC obtained for the points on the convex sphere with a ROC value of 8.26 mm was 8.28 mm, and the diameter of the measurement area increased from the original 4 mm to 5 mm. The findings reveal that compared with the traditional deflection approach, this approach can not only overcome the issue of blurred edge and low contrast of the fringe pattern when measuring convex spheres with small ROC but also improves the measurement accuracy and effective measurement area.

Key words measurement; phase measuring deflectometry; convex spherical; small radius of curvature; pre-distortion fringe; differential geometry

1 引言

随着近代光学的发展,光学元件的微型化已经成为一种发展趋势。在现代光通信的连接器件、手机镜头以及各种微透镜阵列等场景中对小曲率半径(ROC)凸球面元件的需求日益增加。加工离不开检测,所以对球面参数的测量就显得尤其重要。曲率半

径作为球面元件的重要参数,它的一致性反映了球面元件的质量。对于球面元件,传统的曲率半径测量方法主要有接触式测量(例如:牛顿环法^[1]、球面样板法^[2]、球径仪法^[3]等)和非接触式测量(例如:自准直显微镜法^[4-5]、干涉显微镜法^[6-7]等)。其中:牛顿环法需要人工判断干涉环,测量精度有局限性;球面样板法需要一个与待测球面曲率半径相同的球面样板,对于样板

收稿日期: 2021-12-14; 修回日期: 2022-01-19; 录用日期: 2022-01-24; 网络首发日期: 2022-02-12

基金项目: 国家自然科学基金(U20A20215, 61875142)、四川大学基金(2020SCUNG205)

通信作者: *lidahai@scu.edu.cn

的精度有较高的要求;球径仪通过测量球面某个区域的高度以及弦半径,再利用几何关系计算得到曲率半径,但是,接触式测量对待测球面可能会造成损伤。而非接触式测量中自准直显微镜法需要一套精密的位移测量装置,干涉显微镜法对环境比较敏感且成本高。对于小曲率半径元件的测量并不是单一的上述某种方法,例如,Xu^[8]通过拍摄一幅带有载频的球面非接触干涉图,生成四幅含有同样载频的虚光栅,利用莫尔条纹和图像处理技术来获得球面曲率半径,但是由于拍摄过程中对系统焦距等参数进行了调整,进而会对结果产生误差。Ma等^[9]利用光学轮廓仪对小曲率半径凹球面测量,但是每次测量需要复杂的标定,并且对零级条纹定位的不准确会导致最终的测量结果出现较大误差。以上两种方法在实验中均测量了曲率半径为 10 mm 量级的球面元件,并未对更小曲率半径的元件进行测量,且无法同时完成元件上所有点的测量。在一些特定场景,例如,在眼科学中,人眼的角膜也可以近似看作一个凸球面,由于生物体的限制导致上述方式无法实现测量。

相位测量偏折术(PMD)作为一种非接触高精度元件面形检测方法,主要利用了待测元件的反射性质来实现测量,其具有结构简单、成本低、检测动态范围很大等特点,已经受到了广泛的关注^[10-12]。其原理是通过在显示器上显示条纹,经过待测元件反射之后被相机接收,对相机拍摄的携带待测面信息的条纹进行处理后实现光学元件的测量。对于口径和曲率半径较小而陡度过大的球面,其存在反射率低和边缘条纹过密导致拍摄的条纹对比度低而边缘模糊等问题,这是边缘光路变长以及条纹调制传递函数下降造成的。为了解决反射率低的问题,可以将待测元件靠近显示器来提高反射亮度,但是因为待测元件距离显示器过近,传统的倾斜相机布置 PMD 将无法对小曲率半径元件进行测量,因此 2016 年 Liang 等^[13]通过在显示器上放置一个 45° 倾斜的平面反射镜,光学上构建了一个相机正对被测元件 PMD 系统,并生成预畸变条纹来解决条纹对比度低和边缘模糊问题,但是并没有对该方法的原理进行公开。

在解决小曲率半径球面反射条纹边缘畸变的基础上,本文提出了基于逆光线追迹的将预畸变条纹偏折术与微分几何方法相结合的实现大陡度凸球面元件各点的平均曲率半径测量方法。通过预先建立逆追迹模型和灰度插值的方法,得到了在显示器上需要投影的预畸变条纹,经过待测元件反射后相机拍摄的条纹接近标准正弦条纹,再利用相位提取和迭代公式获得待测元件各点坐标以及高度,最后通过微分几何计算得到各点的曲率半径。模拟和实验结果表明,该方法的测量精度高、结构简单、不需要额外的参考元件、价格低廉。此外测量系统与待测元件并未接触,因此存在人眼角膜地形的在线测量潜力。

2 基本原理

2.1 凸球面条纹偏折术的基本原理

图 1(a)为 PMD 测量系统,主要由显示器、45° 倾斜的平面反射镜、待测面以及相机组成。显示器的法线与待测面的法线平行,相机的光轴与显示器面平行,根据平面镜成像可知,真实相机可看成在显示器后产生了一个等效相机的光路。显示器上播放的条纹经过待测面和 45° 镜反射后被相机 CCD 面接收。

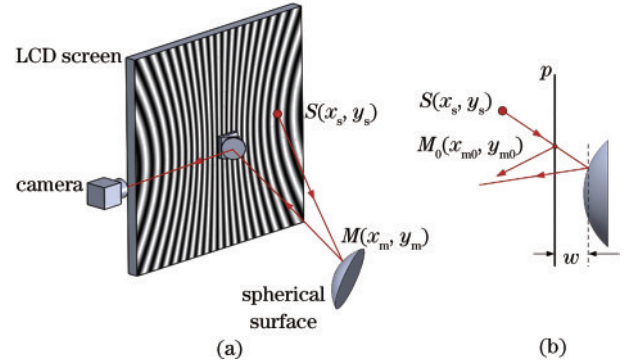


图 1 原理图。(a)PMD 测量系统;(b)球面反射点坐标的获取原理

Fig. 1 Schematic diagram. (a) PMD measurement system; (b) principle of acquiring coordinates of spherical reflection points

根据逆光线追迹^[14],假设光线是由相机成像镜头的入瞳中心发出,经过 45° 镜和待测面反射最终到达显示器。如果已知显示器位置 S ,待测面反射点位置 M 以及相机入瞳中心坐标 C ,则可以计算待测面上各点的斜率和高度,进而得到各点的曲率半径。首先根据斜率计算公式可以得到各点的斜率^[15],表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan x_m = \frac{\frac{x_s - x_m}{d_{m2s}} + \frac{x_c - x_m}{d_{m2c}}}{\frac{z_{m2s} - w}{d_{m2s}} + \frac{z_{m2c} - w}{d_{m2s}}} \\ \tan y_m = \frac{\frac{y_s - y_m}{d_{m2s}} + \frac{y_c - y_m}{d_{m2c}}}{\frac{z_{m2s} - w}{d_{m2s}} + \frac{z_{m2c} - w}{d_{m2s}}} \end{array} \right. \quad (1)$$

式中: $\tan x_m$ 和 $\tan y_m$ 为反射点上 x 和 y 方向上的斜率; (x_s, y_s) 为经过待测面反射之后显示器的坐标,通过投影预畸变条纹解相位获得; (x_c, y_c) 为相机入瞳中心坐标,通过相机标定获得; (x_m, y_m) 为待测球面反射点坐标; d_{m2s} 、 d_{m2c} 分别为反射点与对应显示器坐标和入瞳中心的距离;反射点与显示器平面和入瞳中心在 z 方向上的距离 z_{m2s} 、 z_{m2c} 可以利用点光源显微镜测量获得。在计算过程中引入一个参考平面 P ,参考平面 P 到待测球面反射点的高度 w ,如图 1(b)所示,参考平面上的反射点坐标 (x_{m0}, y_{m0}) 是通过显示器上播放条纹

并利用相移算法^[16]求解得到。为了得到反射点的坐标和高度 w , 利用下式构造一个迭代优化流程^[17], 对反射点坐标和高度进行修正, 直到前后两次高度的变化量小于阈值时结束运算, 最终得到反射点坐标和高度 w 。将各点高度 w 作为球面方程 $w(x_m, y_m)$ 的真实值, 利用微分几何中计算曲面的曲率算法来求得待测球面各点的曲率。

$$w = \int \tan x_m dx + \tan y_m dy, \quad (2)$$

$$x_m = x_{m0} - w \times \frac{x_{m0} - x_c}{z_{m2c}}, y_m = y_{m0} - w \times \frac{y_{m0} - y_c}{z_{m2c}}. \quad (3)$$

在微分几何^[18]中, 曲面的曲率分为主曲率、高斯曲率和平均曲率。本文中所提到的曲率半径为曲面的平均曲率半径, 是平均曲率的倒数。球面方程为 $w(x_m, y_m)$ 的平均曲率 H 定义为在该曲面上某一点的最大主曲率 k_1 和最小主曲率 k_2 的平均值, 计算公式为

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}, \quad (4)$$

式中: E, F, G 为曲面 w 的第一类基本量; L, M, N 为曲面 w 的第二类基本量。分别表示为

$$E = 1 + (\tan x_m)^2, F = \tan x_m \cdot \tan y_m, G = 1 + (\tan y_m)^2, \quad (5)$$

$$L = \frac{d(\tan x_m)}{dx_m}, M = \frac{d(\tan x_m)}{dy_m}, N = \frac{d(\tan y_m)}{dy_m}. \quad (6)$$

由此可知, 曲面各点的平均曲率半径为

$$R = \frac{1}{H}. \quad (7)$$

2.2 基于逆光线追迹的预畸变条纹图案生成

影响曲率半径测量中反射后显示器坐标获取的因素有很多, 在本文中由于待测面的曲率半径在 8 mm 左右, 反射后在边缘处条纹密度过大超出测量的动态范围, 进而影响相位提取和坐标的获取, 最终导致曲率半径计算结果产生误差。因此, 采用了在显示器上投影预畸变的条纹, 经过系统后成像在计算区域上的条纹接近标准正弦条纹, 以便于后续相位及坐标的获取。

如图 2 所示, 首先建立 CCD 像素坐标 $P(u, v)$ 以及根据下式生成以 CCD 像素坐标为自变量的标准正弦条纹图案。

$$I(u, v) = a + b \cos\left[\frac{2\pi(u, v)}{T}\right], \quad (8)$$

式中: 背景光 a 和调制度 b 均取 0.5; 条纹周期 T 取 11 显示器像素, 像素大小为 0.2705 mm。然后, 通过逆光线追迹获得经过系统反射之后的显示器坐标 $S(x_s, y_s)$, 并用一个数学映射函数来表示 CCD 坐标与反射之后的显示器坐标之间的关系,

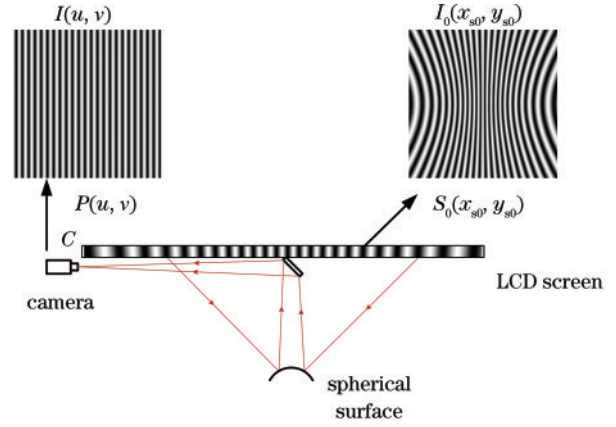


图 2 预畸变条纹生成原理图

Fig. 2 Schematic for generating pre-distortion fringe

$$P(u, v) = R[S(x_s, y_s)]. \quad (9)$$

当 CCD 上的灰度分布为标准正弦条纹 $I(u, v)$ 时, 利用式(9)可以得到反射之后的显示器坐标 $S(x_s, y_s)$ 对应的灰度分布 $I(x_s, y_s)$, 再利用三次样条插值算法可得真实显示器像素点坐标 $S_0(x_{s0}, y_{s0})$ 对应的灰度分布 $I_0(x_{s0}, y_{s0})$, 即实际显示器需要投影的预畸变条纹图案。

3 数值模拟

3.1 模型的建立与球面模拟

为了验证本文方法, 利用逆光线追迹建立如图 1 所示模型, 模拟中令参考平面 P 与待测球面顶点重合, 相机在显示器的正后方且光轴垂直于显示器面, 入瞳坐标设为 $C(0, 0, 0)$ 。为了更接近实验情况, 待测球面到相机和显示器的距离 z_{m2c} 与 z_{m2s} 分别为 373.227 mm 和 103.891 mm, 预设待测球面曲率半径为 8 mm, 光轴与相机光轴重合, 整个系统为相机正对待测球面。利用 2.2 节的方法得到显示器像素坐标 $S_0(x_{s0}, y_{s0})$ 对应的预畸变条纹灰度分布 $I_0(x_{s0}, y_{s0})$ 。

图 3(a) 是标准正弦条纹, 图 3(b) 是通过映射函数得到的预畸变条纹, 图 3(c) 和 (d) 分别为标准正弦条纹和预畸变条纹通过光线追迹模拟相机拍摄之后的条纹图, 可以看到投影标准正弦条纹时相机拍摄的图边缘处的条纹比较密集, 投影预畸变的条纹经过相机拍摄之后成近似标准的正弦条纹, 有利于相位的获取。

对图 3(c)、(d) 的条纹图利用十六步相移获得截断相位并使用菱形算法^[19]进行相位展开。图 4(a)、(b) 为投影标准正弦条纹时相机拍摄的水平方向和垂直方向的解包裹相位, 图 4(c)、(d) 为投影预畸变条纹时相机拍摄的条纹水平和垂直方向的解包裹相位。可以看到, 投影标准正弦条纹时相机拍摄的条纹在待测球面边缘处的相位信息产生了误差, 而投影预畸变条纹则可以避免这种误差。通过迭代算法和微分几何计算曲率半径可以获得如图 5 所示的球面结果。图 5(a) 为投影标准正弦条纹计算的曲率半径, 由于相位误差导致

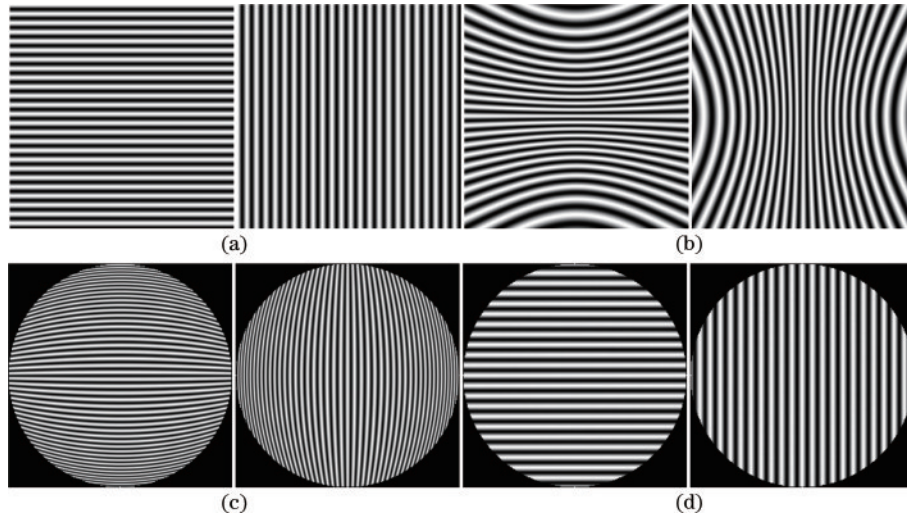


图 3 显示器投影的条纹和相机拍摄的条纹。(a)水平和垂直方向的标准正弦条纹;(b)水平和垂直方向的预畸变条纹;(c)水平和垂直方向投影标准正弦条纹时相机拍摄得到的条纹;(d)水平和垂直方向投影预畸变条纹时相机拍摄得到的条纹

Fig. 3 Fringe projected by the LCD and captured by the camera. (a) Standard sine fringe in horizontal and vertical directions, respectively; (b) pre-distortion fringe in horizontal and vertical directions, respectively; (c) fringe captured by the camera when projecting standard sine fringe horizontally and vertically, respectively; (d) fringe captured by the camera when projecting pre-distortion fringe horizontally and vertically, respectively

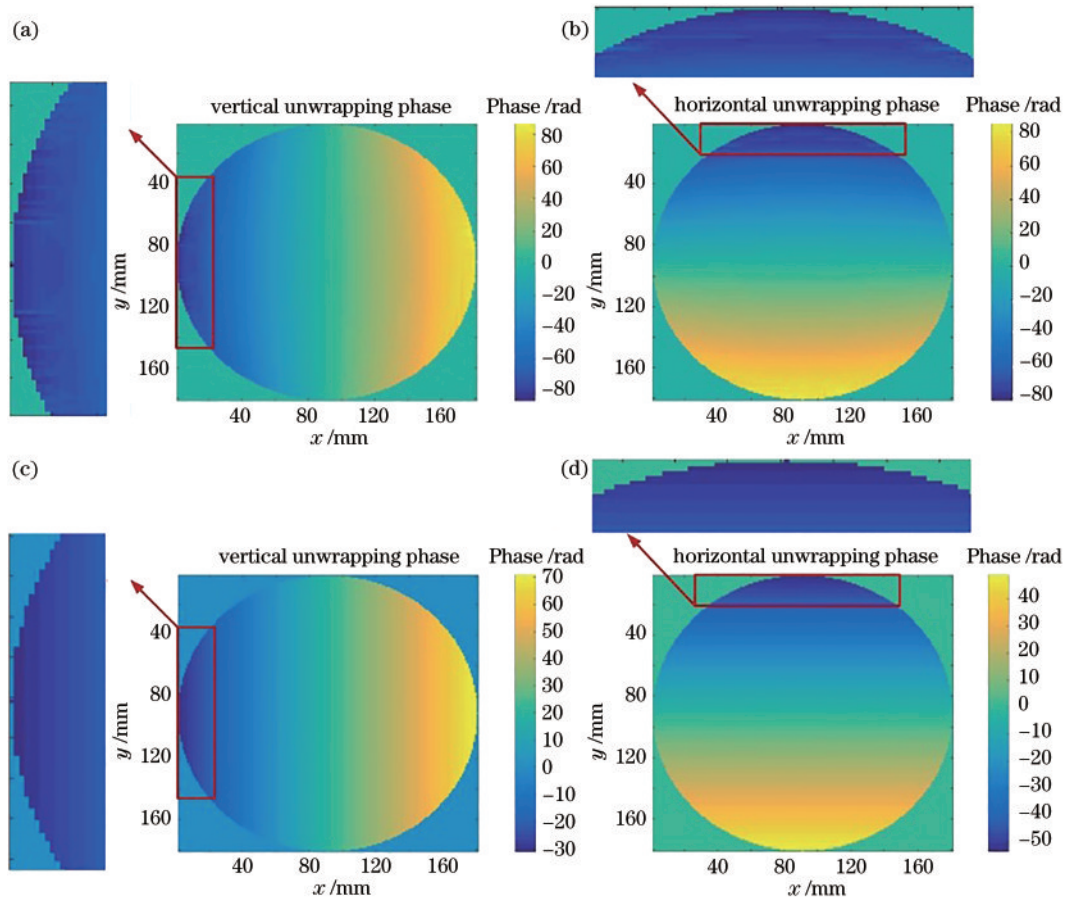


图 4 解包裹相位。(a) (b)投影标准正弦条纹时相机拍摄得到的条纹的水平 and 垂直方向解包裹相位;(c) (d)投影预畸变条纹相机拍摄得到的条纹水平和垂直方向解包裹相位

Fig. 4 Unwrapping phase. (a) (b) Horizontal and vertical unwrapped phases of the fringe captured by the camera when projecting standard sine fringe, respectively; (c) (d) horizontal and vertical unwrapped phases of the fringe captured by the camera when projecting pre-distortion fringe, respectively

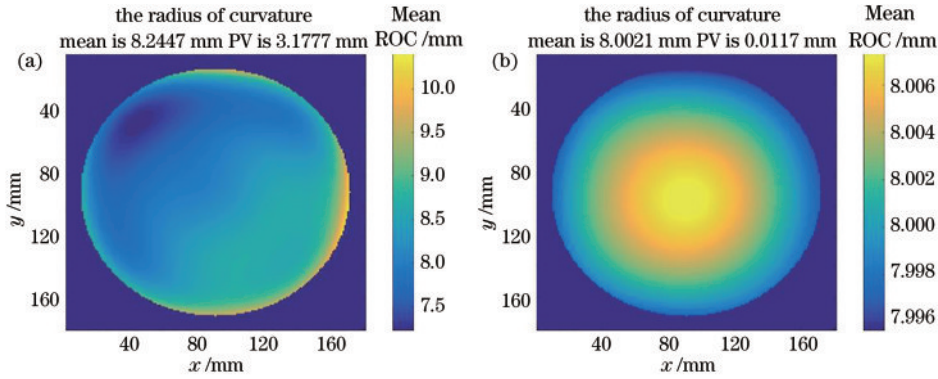


图 5 求得的曲率半径。(a)投影标准正弦条纹得到的曲率半径;(b)投影预畸变条纹得到的曲率半径

Fig. 5 Calculated ROC. (a) ROC obtained by projecting a standard sine fringe; (b) ROC obtained by projecting pre-distortion fringe

计算的曲率半径已经明显与预设曲率半径 8 mm 不同,图 5(b)为投影预畸变条纹计算的曲率半径,其曲率半径均值为 8.0021 mm,峰谷(PV)值为 0.0117 mm,模拟中测量口径为 5 mm。

3.2 不同半径的预畸变模拟分析

为了进一步验证所提方法,在 3.1 节的基础上预设待测凸球面曲率半径分别为 6 mm、7 mm、8 mm、9 mm、10 mm,其余参数均不变,计算得到曲率半径如表 1 和图 6 所示,其中 RMS 为均方根。

表 1 不同曲率半径球面模拟结果

Table 1 Simulation results of spherical surfaces with different

ROC	ROC values		
	Mean	PV	RMS
6	6.0001	0.0122	0.0031
7	7.0014	0.0120	0.0030
8	8.0021	0.0117	0.0029
9	9.0032	0.0116	0.0029
10	10.0044	0.0114	0.0028

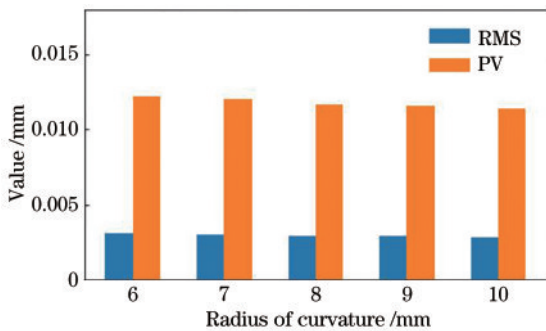


图 6 不同曲率半径计算结果的 PV 与 RMS

Fig. 6 PV and RMS calculated with different ROC values

从表 1 和图 6 可以看出:当预设曲率半径为 6 mm 时,计算得到的平均曲率半径的 PV 为 0.0122 mm, RMS 为 0.0031 mm;随着曲率半径增大,当预设曲率半径为 10 mm 时,计算得到的平均曲率半径的 PV 为 0.0114 mm, RMS 为 0.0028 mm,且预设不同曲率半

径时的计算结果具有较好的一致性。本文方法运用插值算法得到预畸变条纹,但是插值得到的条纹与直接生成的条纹相比仍然存在差异,导致对不同曲率半径凸球面的模拟结果 PV 约为 12 μm , RMS 约为 3 μm ,但总体的误差均较小,最大相对误差约 0.203%。结果表明本文方法能够测量小凸球面各点的平均曲率半径,且具有较高精度,能够满足对小曲率半径球面元件加工精度的检测需求。

4 实验与结果分析

为了验证本文方法的正确性,对一个曲率半径为 8.26 mm、口径为 10 mm 的球面进行测量,测量的实验装置图如图 7 所示。相机固定在显示器边框上,焦距为 50 mm 且光轴与显示器面平行,显示器尺寸为 21.3 英寸(1 英寸=2.54 cm),分辨率为 1600 pixel \times 1200 pixel。显示器上装有一个 45° 倾斜的平面反射镜,其方位调节功能可使相机的光轴在经过 45° 镜反射后近乎垂直于显示器表面,用于减小调整误差。

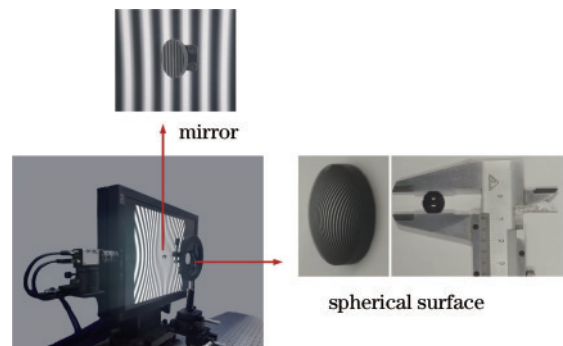


图 7 测量球面元件曲率半径的实验装置图

Fig. 7 Experimental setup for measuring the ROC of spherical element

首先,通过相机标定获得相机坐标,利用带有千分尺的点光源显微镜测得待测球面元件到显示器面的距离 z_{m2s} 和待测球面元件到相机的距离 z_{m2c} ,然后将一个显示器置于光路中播放十六步相移正弦条纹,由相机拍摄之后利用相移算法得到参考平面坐标 (x_{m0}, y_{m0}) ,

最后将显示器换成待测球面。装有 45° 反射镜的显示器播放标准正弦条纹和预畸变条纹,通过对相机拍摄的条纹解相位和相位展开得到显示器坐标 (x_s, y_s) 。图 8 分别为显示器投影水平和竖直方向标准正弦条纹和预畸变条纹时经过待测面反射后相机拍摄到的条纹,可以看出具有较好的条纹对称性,调整误差得到了比较好的控制。图 9 为投影标准正弦条纹和预畸变条纹时相机拍摄得到的条纹对比度,经计算投影畸变条纹时相机拍摄的条纹平均对比度提高了 19.93%。测量时相机聚焦在待测面上,对于大曲率元件周围会产生明显的离焦,所以对比度图上会出现与条纹类似的

不连续现象。通过迭代算法得到待测元件各点的高度和坐标,中心黑色缺失区域利用插值算法获得,最后再利用微分几何计算得到待测元件各点的平均曲率半径。图 10(a) 为投影标准正弦条纹计算得到的平均曲率半径,图 10(b) 为投影预畸变条纹计算得到的平均曲率半径。投影正弦条纹计算得到的平均曲率半径为 8.3267 mm, PV 为 0.1928 mm, 测量区域直径为 4 mm。投影预畸变条纹计算得到的平均曲率半径为 8.2808 mm, PV 为 0.1643 mm, 测量区域直径为 5 mm, 经过对比,投影预畸变条纹测量的结果更接近标称值 8.26 mm, 且比投影正弦条纹的有效测量区域大。

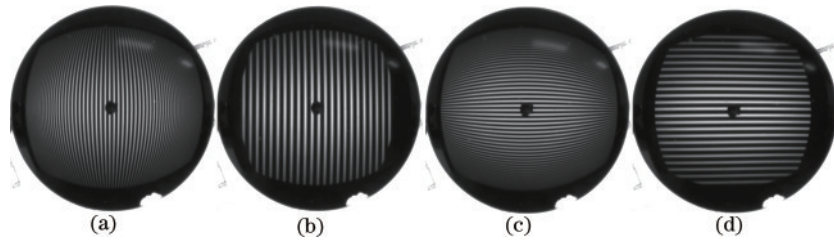


图 8 相机拍摄的条纹图。(a) (b) 投影竖直方向标准正弦条纹和预畸变条纹时相机拍摄得到的条纹; (c) (d) 投影水平方向标准正弦条纹和预畸变条纹时相机拍摄得到的条纹

Fig. 8 Fringe captured by the camera. (a) (b) Fringe captured by the camera when projecting standard sine fringe and pre-distortion fringe in the vertical direction, respectively; (c) (d) fringe captured by the camera when projecting standard sine fringe and pre-distortion fringe in the horizontal direction, respectively

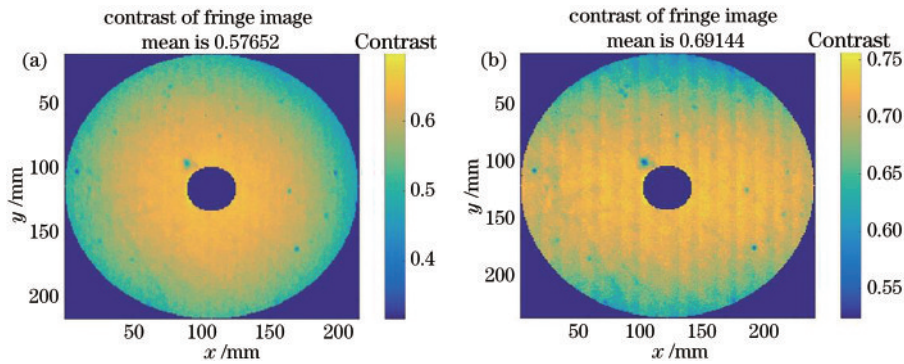


图 9 条纹对比度。(a) 投影标准正弦条纹时相机拍摄的条纹对比度; (b) 投影预畸变条纹时相机拍摄的条纹对比度

Fig. 9 Contrast of fringe. (a) Contrast of fringe captured by the camera when projecting standard sine fringe; (b) contrast of fringe captured by the camera when projecting pre-distortion fringe

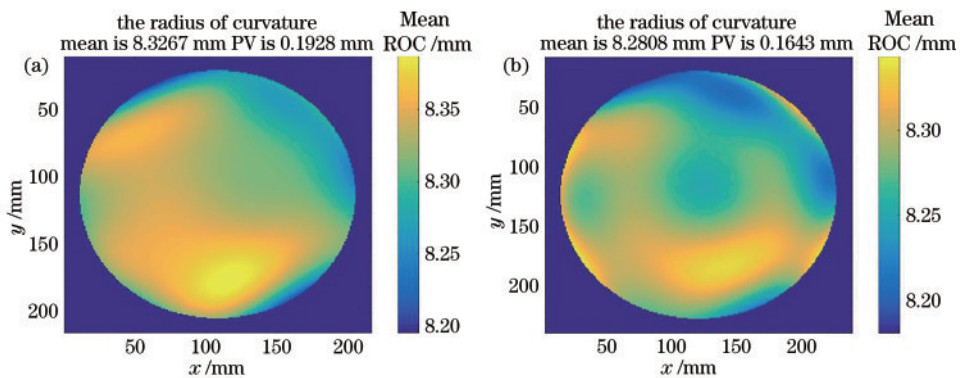


图 10 实验测量的平均曲率半径。(a) 投影标准正弦条纹的结果; (b) 投影预畸变条纹的结果

Fig. 10 Mean ROC values measured in the experiment. (a) Result of projection standard sine fringe; (b) result of projection pre-distortion fringe

5 结 论

在相位测量偏折术中,条纹投影至关重要。在传统投影的标准正弦条纹基础上,本文提出了投影针对小曲率半径的凸球面所使用的预畸变条纹,再通过微分几何来测量小曲率半径凸球面。实验中对一个标称曲率半径为 8.26 mm 的球面测量结果为 8.28 mm, PV 为 0.1643 mm, 通过与投影标准正弦条纹测量所得结果进行对比可知,投影预畸变条纹时经球面反射之后可以拍摄到一幅对比度较高的图片,并且投影预畸变条纹的结果更加接近球面曲率半径真实值,有效测量区域也有所增大,表明投影预畸变条纹与微分几何结合的方法能够用于较大陡度凸球面上多点曲率半径的测量,对凸球面元件曲率半径的在位测量提供了一种新思路。

参 考 文 献

- [1] Raveesha K H, Kumar K, Prasad B K. On alternative methods of determining radius of curvature using Newton's rings set up[J]. *International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy*, 2015, 48: 27-31.
- [2] 果宝智. 光学球面样板曲率半径测量[J]. *激光与红外*, 1985, 15(3): 37-40.
Guo B Z. Measurement of curvature radius of optical spherical template[J]. *Laser & Infrared*, 1985, 15(3): 37-40.
- [3] 沈阳, 张光强, 朱亚一. 直读式球径仪的工作原理与结构设计[J]. *光学仪器*, 1995, 17(6): 38-41.
Shen Y, Zhang G Q, Zhu Y Y. Working principle and structure design of the direct-reading spherometer[J]. *Optical Instruments*, 1995, 17(6): 38-41.
- [4] Lindlein N, Schwider J. Optical measurement methods for refractive microlenses and arrays[J]. *Proceedings of SPIE*, 2001, 4455: 264-271.
- [5] Liu Q, Yang W C, Wu P Y, et al. Confocal microscope method for curvature radius measurement of small lens [J]. *Proceedings of SPIE*, 2012, 8417: 841706.
- [6] Yin X M, Wang S H, Reading I. Vision-based automatic endface inspection of single-fibre optical connectors[J]. *Measurement Science and Technology*, 2005, 16(4): 966.
- [7] Li Z H, Jing W C, Zhang Y M, et al. Application of micro-interferometrics in fiber end surface analysis[J]. *Proceedings of SPIE*, 2002, 4921: 84-88.
- [8] Xu Y X. Measurement of the radius of curvature of a mini spherical surface with virtual grating phase shift technique [J]. *Proceedings of SPIE*, 2010, 7849: 78492S.
- [9] Ma S, Yi S Z, Chen S H, et al. Measurement of radius of curvature of spherical optical surfaces with small curvature and aperture by optical profiler[J]. *Proceedings of SPIE*, 2014, 9272: 92721Q.
- [10] Li M Y, Li D H, Zhang C, et al. Modal wavefront reconstruction from slope measurements for rectangular apertures[J]. *Journal of the Optical Society of America A, Optics, Image Science, and Vision*, 2015, 32(11): 1916-1921.
- [11] Li M Y, Li D H, Jin C Y, et al. Improved zonal integration method for high accurate surface reconstruction in quantitative deflectometry[J]. *Applied Optics*, 2017, 56(13): F144-F151.
- [12] 朱日宏, 孙越, 沈华. 光学自由曲面形检测方法进展与展望[J]. *光学学报*, 2021, 41(1): 0112001.
Zhu R H, Sun Y, Shen H. Progress and prospect of optical freeform surface measurement[J]. *Acta Optica Sinica*, 2021, 41(1): 0112001.
- [13] Liang H N, Olesch E, Yang Z, et al. Single-shot phase-measuring deflectometry for cornea measurement[J]. *Advanced Optical Technologies*, 2016, 5(5/6): 433-438.
- [14] Smith W J. *Modern optical engineering*[M]. 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2008: 35-44.
- [15] Su P, Parks R E, Wang L R, et al. Software configurable optical test system: a computerized reverse Hartmann test[J]. *Applied Optics*, 2010, 49(23): 4404-4412.
- [16] Zuo C, Feng S J, Huang L, et al. Phase shifting algorithms for fringe projection profilometry: a review[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2018, 109: 23-59.
- [17] Wang R Y, Li D H, Zhang X W. Systematic error control for deflectometry with iterative reconstruction[J]. *Measurement*, 2021, 168: 108393.
- [18] 梅向明, 黄敬之. 微分几何[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2008: 69-84.
Mei X M, Huang J Z. *Differential geometry*[M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2008: 69-84.
- [19] 廖薇, 刘佐强, 王华英, 等. 三种基于路径跟踪的位相解包裹算法比较[J]. *激光杂志*, 2014, 35(6): 32-34.
Liao W, Liu Z Q, Wang H Y, et al. Comparison of the three phase unwrapping algorithm based on the algorithm of Path tracking[J]. *Laser Journal*, 2014, 35(6): 32-34.