第 60 卷 第 6 期/2023 年 3 月/激光与光电子学进展

研究论文

激光与光电子学进展

先进成像

# 基于逐点移动最小二乘拟合的数字图像相关测量

樊爽[1]，郭玉荣[1,2*]

[1]湖南大学土木工程学院，湖南 长沙 410082；

[2]建筑安全与节能教育部重点实验室，湖南 长沙 410082

**摘要** 为从数字图像相关方法得到的含噪位移场中提取到光滑、准确的应变场，引入移动最小二乘(MLS)拟合方法进行计算。针对MLS拟合方法对大量数据求解困难且求解不稳定的问题，提出逐点移动最小二乘(PMLS)拟合方法进行改进，以提高计算效率和稳定性。采用PMLS拟合方法对模拟实验在连续位移场和不连续位移场两种情况下拟合的应变场精度和可行性进行分析和验证，进而获取连续位移场实验和带裂缝实验两组实测数据图像的应变场。将PMLS拟合方法与经典的逐点最小二乘(PLS)法和MLS拟合方法进行对比。结果表明：所提方法的精度较PLS法得到有效提高，且在窗口较大时可提高16%以上；计算效率较MLS法提高27倍以上，并显著提高MLS法的稳定性；对于不连续位移场，能够有效解决不连续区域出现应变值失真的问题，证明了对不连续位移场的适用性。

**关键词** 测量；数字图像相关；应变场；逐点移动最小二乘拟合

**中图分类号** O348.1 **文献标志码** A **DOI**：10.3788/LOP220724

# Digital Image Correlation Measurement Based on Pointwise Moving Least-Square Fitting

Fan Shuang[1], Guo Yurong[1,2*]

[1]*College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha* 410082, *Hunan, China*;

[2]*Key Laboratory of Building Safety and Energy Efficiency, Ministry of Education, Changsha* 410082, *Hunan, China*

**Abstract** To extract a smooth and accurate strain field from a noisy displacement field obtained by digital image correlation method, the moving least-square (MLS) fitting method is often adopted. However, as the MLS fitting method is computationally expensive and unstable when applied to large datasets, the pointwise moving least-square (PMLS) fitting method is proposed herein to improve the computational efficiency and stability. The feasibility and accuracy of the strain field fitted by the PMLS fitting method were explored on simulation experiment under two conditions of continuous displacement field and discontinuous displacement field, and then the strain field of the two groups of measured data images of the continuous displacement field experiment and the crack experiment were obtained. The PMLS fitting method was compared with the classical point-by-point least-square (PLS) method and the MLS fitting method. The results show that the accuracy of the proposed method is effectively improved compared to the PLS method by more than 16% when a large window is used, the computational efficiency increases by more than 27 times compared to the MLS method, and the stability of the MLS method is significantly enhanced. For the discontinuous displacement field, the problem of strain distortion in the discontinuity regions can effectively be addressed, which confirms the applicability of the proposed method to discontinuous displacement fields.

**Key words** measurement; digital image correlation; strain field; pointwise moving least square fitting

## 1 引 言

数字图像相关(DIC)方法[1-2]是近年来流行的一种利用光学测量全场位移和应变的方法，目前已广泛用于各个研究领域中[3-6]。通过DIC方法测量被测物体的变形，即可得到其位移场，并可直接获取应变场[7]，但由于噪声的存在，计算结果并不可靠。因此，往往需要对DIC方法得到的位移场进行处理才可获得可靠和准确的应变场。

**收稿日期**：2022-02-14；**修回日期**：2022-03-17；**录用日期**：2022-03-30；**网络首发日期**：2022-04-10

**基金项目**：国家自然科学基金(51878259)

**通信作者**：*yurongguo@hnu.edu.cn

通常使用经典逐点最小二乘(PLS)法[8-9]即可获得光滑准确的应变场,该方法通过对离散位移场的局部子域进行分片逐点拟合,利用最小二乘法得到中间点的拟合值和导数值,并将数值分别作为该点的位移和应变,易于编程、复杂度低、计算效率高,目前已被广泛应用。但PLS法在处理不连续位移场时会因窗口过大而容易覆盖位移场中位移突变部分,造成该区域应变计算结果严重失真[10]。有限元法(FEM)[11]通过将DIC方法获得的离散位移数据组装为刚度矩阵,可一次性得到物体表面的应变场,且能够对含孔洞和裂缝的位移场进行准确拟合,但该方法需进行严格的网格划分才能获得较高的计算精度,且编程较为复杂,计算效率较低。最小一乘拟合[12]通过利用绝对值函数取代平方函数进行位移偏差估计以提高精度,但该方法求解困难,需采用智能算法进行求解,编程困难且计算效率较低。近年来提出的改进Hermite有限元平滑法(IHFESM)[13]、快速Hermite元素法(FHEM)[14-15]、局部Hermite(LH)法[16]和正则多项式平滑(RPS)法[17],虽然精度较高,但二维Hermite形函数构造较为复杂,且需进行Tiknonov正则化和广义交叉验证,编程复杂,因此在实际测量中适用性不强。

无网格伽辽金法(EFGM)采用移动最小二乘法来构造近似位移函数,具有求解精度高的特点,还可对不连续位移场进行准确求解,目前已应用于数字图像相关方法中[18]。该方法对含噪位移场进行移动最小二乘拟合,得到光滑的位移场,通过对形函数求导可得应变场。但对于大量数据的拟合,该方法拟合速度缓慢且易出现矩阵求逆计算不稳定的问题。目前使用最广泛的解决方法是将基函数正交化,使求逆矩阵变为对角矩阵,从而减少求逆运算。此方法虽然能避免病态问题,但计算效率并没有得到显著提高[19]。

本文提出逐点移动最小二乘拟合方法,该方法在不改变精度的条件下,大大减少了计算量和求逆矩阵的条件数。采用模拟实验,验证并对比了所提方法与经典PLS方法在连续位移场和不连续位移场两种情况下的应变场计算结果,并与移动最小二乘(MLS)法的计算效率和稳定性进行对比;采用国际实验力学协会开源数据“sample15”实验,证明所提方法在高梯度应变测量上的优势;在带裂缝实验中,采用PLS算法和所提方法计算应变场,讨论两种方法的适用性。

## 2 数字图像相关方法基本原理

DIC方法通过在物体表面形成自然或人为随机分布的散斑点,根据一定的相关原则匹配被测物体表面变形前后的两幅散斑图像中最相似子集的位置,从而计算感兴趣区域(ROI)内各感兴趣点(POI)的位移和应变[3]。DIC方法原理示意图如图1所示。在物体变形前形成的参考图像中以待求点$P\left(x_0, y_0\right)$为中心建立参考子区,在变形后形成的目标图像中通过相关函数搜索与参考子区最匹配的目标子区,其中心位置坐标为$P'\left(x_0', y_0'\right)$。为计算所需的变形变量,对目标子区中像素的灰度值与参考子区中像素的灰度值进行比较,并通常使用归一化最小平方距离(ZNSSD)函数描述参考子区和目标子区之间的相似性[20],定义为

$$C\left(\boldsymbol{p}^*\right)=\left\{\sum_{(i,j)\in S}\frac{f\left(x_i, y_j\right)-\bar{f}}{\sqrt{\sum_{(i,j)\in S}\left[f\left(x_i, y_j\right)-\bar{f}\right]^2}}-\frac{g\left(x_i', y_j'\right)-\bar{g}}{\sqrt{\sum_{(i,j)\in S}\left[g\left(x_i', y_j'\right)-\bar{g}\right]^2}}\right\}, \tag{1}$$

式中:$f\left(x_i, y_j\right)$和$g\left(x_i', y_j'\right)$分别为参考子区中点$Q\left(x_i, y_j\right)$和目标子区中与点$Q\left(x_i, y_j\right)$对应的点$Q'\left(x_i', y_j'\right)$的灰度值;$\boldsymbol{p}^*$为描述$Q\left(x_i, y_j\right)$和$Q'\left(x_i', y_j'\right)$之间关系的变形矢量;$S$为子区内所有点的集合;$\bar{f}$和$\bar{g}$分别是参考子区和目标子区内的灰度平均值,$\bar{f}=\frac{\sum_{(i,j)\in S} f\left(x_i, y_j\right)}{n^*}$,$\bar{g}=\frac{\sum_{(i,j)\in S} g\left(x_i', y_j'\right)}{n^*}$;$n^*$为集合$S$内点的数量。

参考子区中的点$Q\left(x_i, y_j\right)$映射到目标子区中的点$Q'\left(x_i', y_j'\right)$,对应公式为

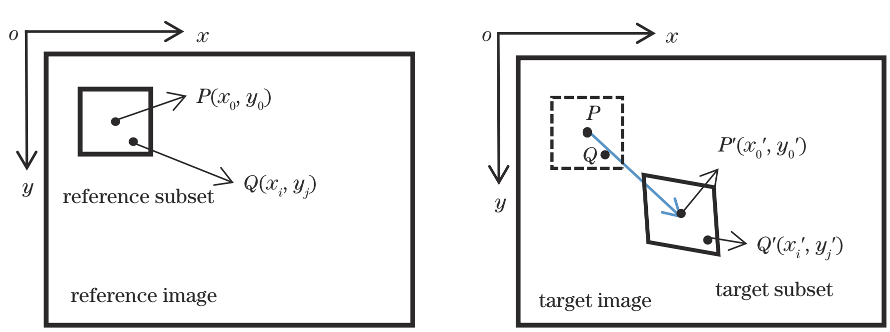


图1 DIC方法原理示意图

Fig. 1 Schematic of DIC method principle

$$\begin{cases} x_i' = x_i + u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y \\ y_j' = y_j + v + \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y \end{cases}, \tag{2}$$

式中：$u$和$v$分别是参考子区中心点$P\left(x_0, y_0\right)$沿水平和竖直方向的位移分量；$\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial u}{\partial y}$、$\dfrac{\partial v}{\partial x}$和$\dfrac{\partial v}{\partial y}$分别是子区的四个位移梯度分量；$\Delta x$和$\Delta y$分别是点$Q\left(x_i, y_j\right)$到参考子区中心点$P\left(x_0, y_0\right)$沿水平和竖直方向的距离。

在求解ZNSSD的极值时，通常使用一阶形函数即可满足要求，即$\boldsymbol{p}^* = \left[u\ v\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\ \dfrac{\partial v}{\partial x}\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\right]^{\mathrm{T}}$。一般采用牛顿迭代法（FA-NR）或反向组合高斯牛顿法（IC-GN）确定$\boldsymbol{p}^*$中的参数。

## 3 逐点移动最小二乘拟合的应变计算方法

### 3.1 经典PLS法的原理及局限性

经典PLS法使窗口内各感兴趣点的拟合值与DIC计算值的偏差的平方和达到最小值，即

$$J_{\mathrm{PLS}} = \sum_{I}^{N}\left[u_{\mathrm{PLS}}^{\mathrm{h}}\left(x_I, y_I\right) - \hat{u}\left(x_I, y_I\right)\right]^2, \tag{3}$$

式中：$\hat{u}\left(x_I, y_I\right)$为DIC计算的位移值；$u_{\mathrm{PLS}}^{\mathrm{h}}\left(x_I, y_I\right)$为PLS法拟合后的位移值；$N$为窗口内感兴趣点的总数量。

对于较均匀变形的拟合，经典PLS法具有较高的精度。但对于不均匀变形和高梯度变形的测量，由于窗口内的感兴趣点对计算点的权重均相同（$\omega = 1$），当拟合窗口较大时，过度平滑导致拟合后的误差较大。为提高对不均匀变形和高梯度变形的测量精度，采用移动最小二乘法进行拟合。

### 3.2 逐点移动最小二乘拟合方法

MLS法的思想是使计算点支撑域内各感兴趣点的拟合值与DIC计算值的偏差的加权平方和达到最小值，即

$$J_{\mathrm{MLS}} = \sum_{I}^{N}\omega\left(x - x_I, y - y_I\right)\times \left[u_{\mathrm{MLS}}^{\mathrm{h}}\left(x_I, y_I\right) - \hat{u}\left(x_I, y_I\right)\right]^2, \tag{4}$$

式中：$u_{\mathrm{MLS}}^{\mathrm{h}}\left(x_I, y_I\right)$为MLS法拟合后的位移值；$\omega(x - x_I, y - y_I)$为计算点$(x, y)$支撑域内的感兴趣点$(x_I, y_I)$的权函数。权函数为非负函数，且具有连续性和光滑性，在$(x, y)$支撑域内大于0，支撑域外等于0，随着与计算点$(x, y)$距离的增加而递减。一般选择样条函数、高斯函数等作为权函数，但多次样条权函数的拟合误差相差不大，而高斯权函数的拟合结果受形状系数的影响较大[21]，故本文选择五次样条函数为权函数，并选取矩形支撑域，假设节点支撑半径为$R$，即

$$\omega(s) = \begin{cases} 1 - 10s^3 + 15s^4 - 6s^5, & s \leqslant 1 \\ 0, & s > 1 \end{cases}, \tag{5}$$

式中：$s = (x - x_I)/R$或$s = (y - y_I)/R$。

由式（4）可得到位移场的近似解：

$$u_{\mathrm{MLS}}^{\mathrm{h}}(x, y) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{u}}, \tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{a}$为基函数$\boldsymbol{p}$的系数；$\hat{\boldsymbol{u}}$为DIC计算的位移场。

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & \cdots & xy^{p-1} & y^p \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{p}, \tag{8}$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \omega(x - x_1, y - y_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega(x - x_2, y - y_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega(x - x_N, y - y_N) \end{bmatrix}。 \tag{10}$$

只需对式（6）求导，即可得到水平应变（$\varepsilon_{xx}$）、竖向应变（$\varepsilon_{yy}$）和剪切应变（$\gamma_{xy}$），为避免矩阵$\boldsymbol{A}$及其导数求逆的计算，从而减小误差和提高计算精度，将系数向量作为常数项进行处理[22]，即

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x}\sum\limits_{I=1}^{n}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{u}} \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y}\sum\limits_{I=1}^{n}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{v}} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y}\sum\limits_{I=1}^{n}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{u}} + \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x}\sum\limits_{I=1}^{n}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{v}} \end{cases}。 \tag{11}$$

设ROI内有$N$个感兴趣点，对每个计算点$(x, y)$需通过式（5）自动检索到支撑域中的感兴趣点，可得到$N$个权重，其中仅支撑域$\Omega$内感兴趣点的$n$个权重不为0，参与矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的计算。但对于支撑域$\Omega$之外的点$\omega = 0$，对矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的计算并无影响，如图2（a）所示，但对这些无效点的检索过程大大增加了计算时间。且ROI中的感兴趣点分布均匀，故可单独提取计算点$P$矩形支撑域$\Omega$中的感兴趣点，得到一个拟合窗口，如图2（b）所示，窗口宽度与支撑域大小相同，即$2R + 1$。其中每个感兴趣点的权函数为

$$\omega(s) = 1 - 10s^3 + 15s^4 - 6s^5。 \tag{12}$$

设故对于每个计算点$(x, y)$，可得到$n$个权重，且避免了$\omega = 0$的情况，可大大减少程序的计算量。针对移动最小二乘法易形成病态方程组的问题，其合理值主要取决于矩阵$\boldsymbol{A}$的条件数，$\|\boldsymbol{x}_I\|$越大，支撑域$R$越小，基函数的次数$k$数值越大，$\boldsymbol{A}$的条件数也越大，越容易出现病态问题[23]。对于MLS法，因ROI较大，随着$\|\boldsymbol{x}_I\|$的增大容易出现病态问题，故采用局部坐标进行拟合以减小$\|\boldsymbol{x}_I\|$，局部位移场示意图如图2（c）所示。对每个数据点逐点进行移动最小二乘拟合，通过式（6）和

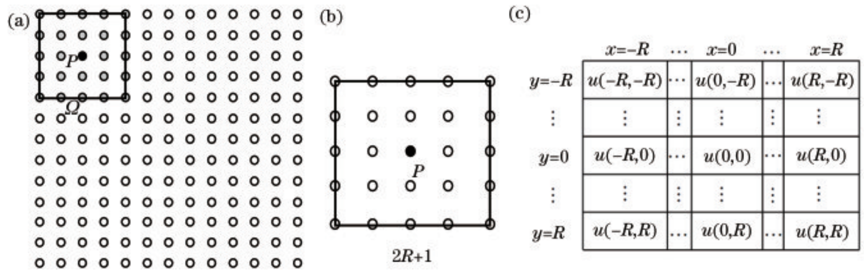


图 2 逐点移动最小二乘法原理。(a)支撑域示意图;(b)一个拟合窗口;(c)局部位移场示意图

Fig. 2 Principle of pointwise moving least square method. (a) Schematic of support domain; (b) a fitting window; (c) schematic of local displacement field

式(11)可得到位移场和应变场,即逐点移动最小二乘(PMLS)法。

由此可以得到,经典 PLS 法是 PMLS 法的特殊形式,区别在于每个感兴趣点的支撑域内,PLS 法的每个计算点支撑域 $\omega=1$,PMLS 法的权函数如式(12)。

### 3.3 逐点移动最小二乘法对不连续位移场的处理

在"裂缝"边界处,PLS 算法在计算应变时可能会计入突变位移而产生较大的误差。无网格法可对断裂问题进行处理,对于场函数不连续的问题,主要有衍射法则、可视性准则和透射法三种处理方式。本文采用可视性准则并采用向量叉乘方法摒弃每个计算点支撑域中不参与计算的感兴趣点[24]。因 PLS 法是 PMLS 法的特殊形式,故利用 PLS 法和 PMLS 法均可对每个计算点支撑域内的无效点进行剔除,对于含有裂缝的情况,主要分为两种,第一种为裂缝不贯穿窗口,如图 3(a)所示,第二种为裂缝贯穿窗口,如图 3(b)所示。对于计算点 $P$,局部位移场中部分无效点对 $P$ 的计算无影响,故可设置 $\omega=0$。

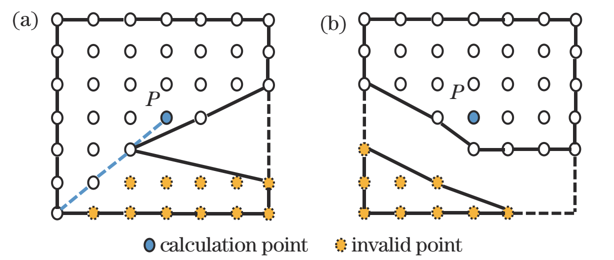


图 3 裂缝处理方法。(a)裂缝不贯穿窗口;(b)裂缝贯穿窗口

Fig. 3 Crack treatment method. (a) Crack does not penetrate the window; (b) crack runs through the window

## 4 模拟实验

### 4.1 连续位移场

采用国际力学协会(SEM)公开数据中的"sample14"中的参考图像,图像大小为 2048 pixel×589 pixel,如图 4(a)所示。感兴趣区域大小为 1024 pixel×496 pixel,

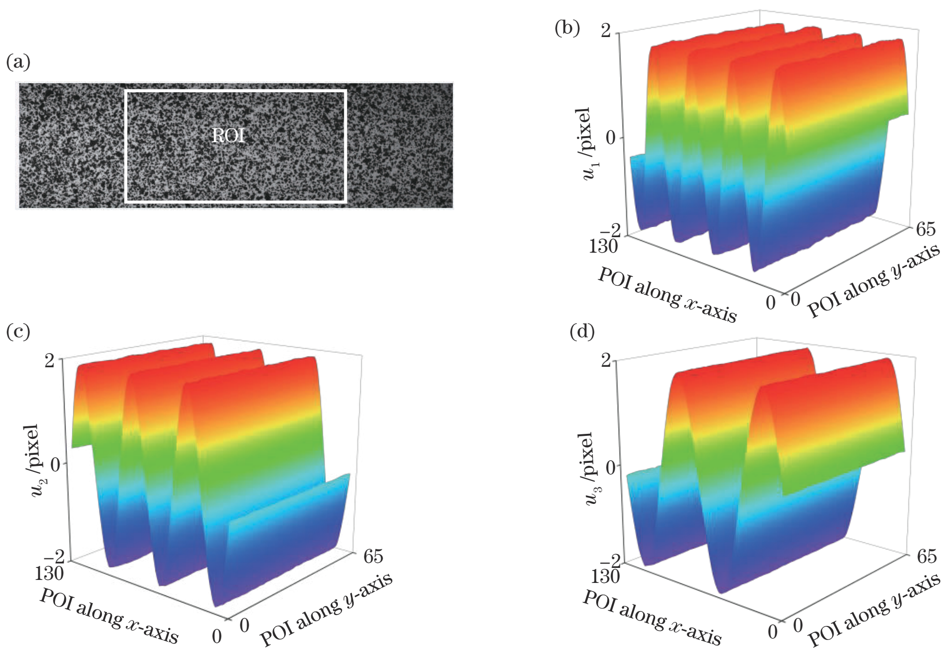


图 4 参考图像和感兴趣区域内 DIC 位移场。(a)参考图像;(b)位移场 $u_1$;(c)位移场 $u_2$;(d)位移场 $u_3$

Fig. 4 DIC displacement fields in the reference image and region of interest. (a) Reference image; (b) displacement field $u_1$; (c) displacement field $u_2$; (d) displacement field $u_3$

子区半径为 31 pixel，感兴趣点阵间隔为 8 pixel，共 7936 个感兴趣点。对源图像水平方向上分别施加 $u_1(x,y)=2\sin(16\pi x/2048)$、$u_2(x,y)=2\sin(12\pi x/2048)$ 和 $u_3(x,y)=2\sin(8\pi x/2048)$ 的变形，即在 $x$ 方向上分别有 8、6 和 4 个周期波，水平位移场 $u$ 计算结果分别如图 4(b)～(d)所示。

对于二维情况，通常选择一次、二次和三次多项式进行计算[16,24]，故分别采用 PLS 方法（一阶、二阶和三阶多项式，分别表示为 PLS-1、PLS-2 和 PLS-3）和 PMLS 法（一次基、二次基和三次基，分别表示为 PMLS-1、PMLS-2 和 PMLS-3）对位移场进行拟合，拟合窗口宽度为 5～31，并采用均方根误差（RMSE）对拟合的位移场和应变场进行评判。图 5 为两种方法在三种变形下计算的窗口宽度与均方根误差的关系，对应最优窗口宽度和最小均方根误差如表 1 所示。

对于位移场，由图 5(a)和表 1 可以得到：PLS 法和 PMLS 法的均方根误差随窗口尺寸变化而变化的趋势基本相同；PLS-2、PLS-3、PMLS-2 和 PMLS-3 的精度明显高于 PLS-1 和 PMLS-1，且均方根误差随窗口变化更平缓；PLS-2、PLS-3、PMLS-2 和 PMLS-3 对应的最优窗口和最小均方根误差基本一致，三种变形的最优窗口分别为 5、5 和 7（或 9），最小均方根误差分别为 0.107 pixel、0.064 pixel 和 0.032 pixel，即当位移场变形较平缓时，最优窗口较大，精度也较高；虽然相同阶次的 PLS 法和 PMLS 法的最优窗口和最小均方根误差基本相同，但随着窗口尺寸的增大，PMLS 法较 PLS 法的变化更加平缓，即 PLS 法对窗口尺寸更敏感；当窗口宽度为 31 时，三种变形的 PMLS-1、PMLS-2 和 PMLS-3 拟合的位移场的精度分别较 PLS-1、PLS-2 和 PLS-3 提高 46%～55%、26%～49% 和 26%～45%。

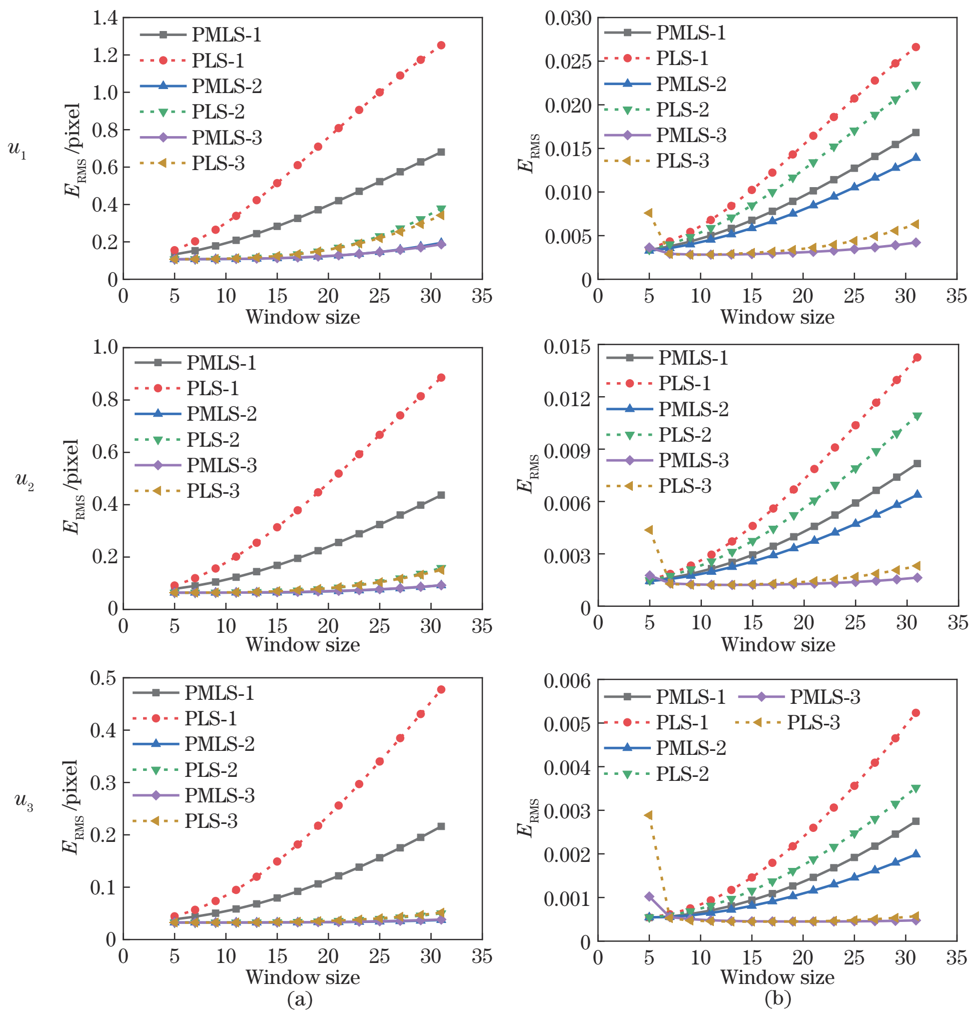


图 5 两种方法在三种变形下的均方根误差。(a)位移场；(b)应变场

Fig. 5 Root mean square errors of the two methods under three kinds of deformation. (a) Displacement field; (b) strain field

对于应变场，由图 5(b)和表 1 可以得到：PLS 法和 PMLS 法的均方根误差随窗口尺寸变化而变化的趋势基本相同；PLS-3 和 PMLS-3 的精度明显高于 PLS-1、PLS-2、PMLS-1 和 PMLS-2，且均方根误差随窗口变化更平缓；相同阶次的 PMLS 法和 PLS 法的最小均方根误差基本一致，但 PMLS 法的最优窗口较 PLS 法更大，且阶数越高最优窗口越大；与位移场相似，PMLS 法较 PLS 法对窗口尺寸的敏感性更低，且 PMLS-1 的

表1 不同变形下两种方法的最优窗口尺寸和均方根误差

Table 1 Optimal window size and root mean square error of the two methods under different deformations

| Deformation | Item | | PLS-1 | PLS-2 | PLS-3 | PMLS-1 | PMLS-2 | PMLS-3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | Displacement | Window size | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| | | $E_{RMS}$ /pixel | 0.155 | 0.107 | 0.107 | 0.133 | 0.107 | 0.107 |
| | Strain | Window size | 5 | 5 | 9 | 5 | 5 | 11 |
| | | $E_{RMS}$ /$10^{-3}$ | 3.535 | 3.400 | 2.793 | 3.360 | 3.268 | 2.815 |
| $u_2$ | Displacement | Window size | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| | | $E_{RMS}$ /pixel | 0.091 | 0.064 | 0.064 | 0.079 | 0.064 | 0.064 |
| | Strain | Window size | 5 | 5 | 11 | 5 | 5 | 13 |
| | | $E_{RMS}$ /$10^{-3}$ | 1.520 | 1.484 | 1.211 | 1.456 | 1.436 | 1.218 |
| $u_3$ | Displacement | Window size | 5 | 7 | 7 | 5 | 9 | 9 |
| | | $E_{RMS}$ /pixel | 0.044 | 0.032 | 0.032 | 0.039 | 0.032 | 0.032 |
| | Strain | Window size | 5 | 5 | 15 | 5 | 5 | 21 |
| | | $E_{RMS}$ /$10^{-3}$ | 0.542 | 0.547 | 0.447 | 0.540 | 0.547 | 0.450 |

精度较PLS-1和PLS-2更高；当窗口宽度为31时，三种变形的PMLS-1、PMLS-2和PMLS-3拟合的应变场精度分别较PLS-1、PLS-2和PLS-3提高37%～47%、38%～43%和16%～33%。对于PLS-3法，当窗口尺寸为5时，由于边缘点数量较少，计算出现奇异，导致应变场误差较大，而PMLS-3法的误差更小。由此可以得到，PMLS-3对位移场和应变场的拟合精度均较高，且受窗口尺寸的影响较小。

为进一步比较两种方法在相同窗口下拟合结果的不同，对变形$u_1$在窗口宽度为15时的相同$y$坐标平均值的位移场和应变场拟合结果进行对比，如图6所示。可以得到，在位移场和应变场的波峰和波谷处，相同阶次的PMLS法得到的结果比PLS法更接近于理论值，且PMLS-3的精度比PMLS-2和PMLS-1更高。例如图6(b)的波谷处，PMLS-1、PLS-1、PMLS-2、PLS-2、PMLS-3和PLS-3拟合的应变场平均值误差分别为8353 με、12403 με、8393 με、12433 με、3573 με和3743 με，PMLS法拟合的误差分别为PLS法的67%、68%和95%。

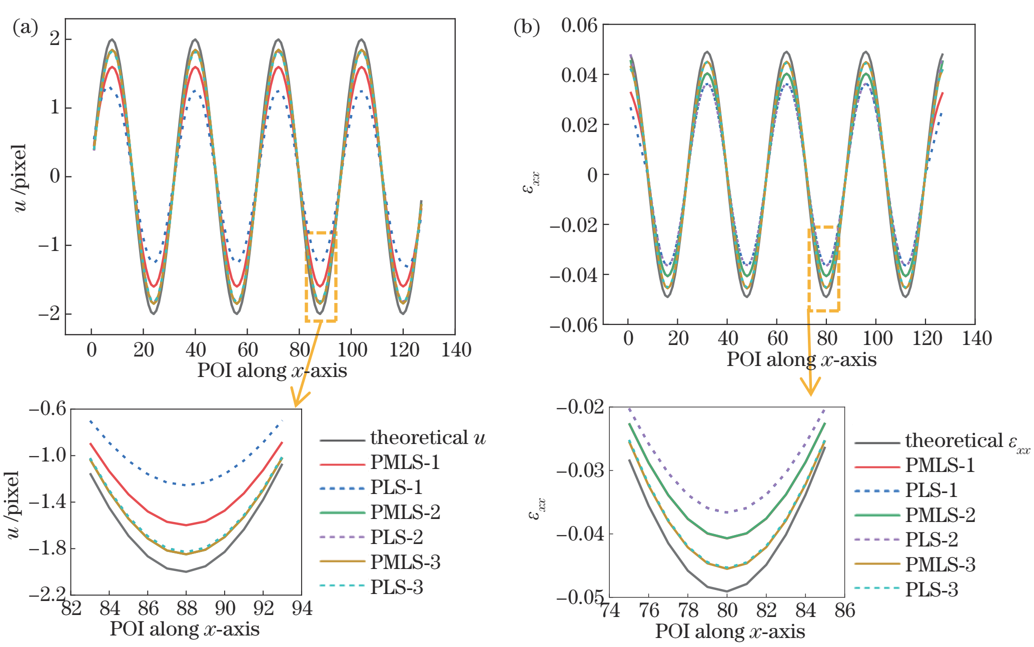


图6 相同$y$坐标平均值下的位移场和应变场拟合结果。(a)位移场；(b)应变场

Fig. 6 Fitting results of displacement field and strain field under the mean value of same $y$ coordinate. (a) Displacement field; (b) strain field

PMLS法和MLS法在计算精度上相同，精度与经典PLS法相当，为进一步比较三种方法的计算效率，对变形$u_1$的一阶方法的计算时间进行对比，结果如表2所示。可以得到：PLS方法的时间最短，MLS方

表 2 三种方法的计算时间

Table 2 Calculation time of the three methods

unit: s

| Method | Window size is 5 | Window size is 9 | Window size is 13 | Window size is 17 | Window size is 21 | Window size is 25 | Window size is 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PLS-1 | 1.528 | 1.781 | 2.291 | 3.003 | 3.594 | 4.139 | 4.535 |
| PMLS-1 | 2.002 | 2.659 | 3.708 | 5.027 | 6.671 | 8.603 | 10.890 |
| MLS-1 | 251.797 | 260.140 | 267.576 | 272.980 | 281.033 | 287.159 | 293.716 |

法的时间最长，且与窗口大小无关；PMLS 法的时间较 PLS 略长，计算速度较经典 MLS 方法提高 27～126 倍，可见 PMLS 法可有效提高 MLS 法的计算效率。

对 PMLS 法和 MLS 法拟合变形 $u_1$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大 2-范数条件数进行对比，如表 3 所示。由此得到：阶数越高，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数越大；MLS 法中 $\boldsymbol{A}$ 的条件数基本与支撑域成反比，而 PMLS 法则相反；PMLS 法的条件数仅为 MLS 法的 $1/4.3\times10^{16}$～$1/4.7\times10^{5}$，显然比 MLS 法更小。故 PMLS 法能够有效地避免病态，提高近似稳定性。

综上所述，对于不同窗口下应变场的拟合，PMLS-3 的精度较 PMLS-1 和 PMLS-2 的精度更高，且相同阶次的 PMLS 法较 PLS 法的窗口敏感性更低，当拟合窗口较大或应变梯度较高时，PMLS 的优势更明显，且计算效率和稳定性较 MLS 法明显提高。

表 3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数

Table 3 Conditional numbers of matrix $\boldsymbol{A}$

| Method | Support domain is 5 | Support domain is 9 | Support domain is 13 | Support domain is 17 | Support domain is 21 | Support domain is 25 | Support domain is 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MLS-1 | $8.687\times10^{8}$ | $3.375\times10^{8}$ | $1.766\times10^{8}$ | $1.075\times10^{8}$ | $7.175\times10^{7}$ | $5.094\times10^{7}$ | $3.781\times10^{7}$ |
| PMLS-1 | 4 | 10 | 18.667 | 30 | 44 | 60.667 | 80 |
| MLS-2 | $5.760\times10^{17}$ | $7.267\times10^{16}$ | $1.922\times10^{16}$ | $7.011\times10^{15}$ | $3.095\times10^{15}$ | $1.551\times10^{15}$ | $8.509\times10^{14}$ |
| PMLS-2 | 13.356 | 76.890 | $2.860\times10^{2}$ | $7.760\times10^{2}$ | $1.728\times10^{3}$ | $3.367\times10^{3}$ | $5.966\times10^{3}$ |
| MLS-3 | $2.155\times10^{23}$ | $1.450\times10^{16}$ | $4.400\times10^{16}$ | $9.144\times10^{16}$ | $1.678\times10^{17}$ | $2.177\times10^{17}$ | $1.650\times10^{17}$ |
| PMLS-3 | 53.201 | $5.833\times10^{2}$ | $4.271\times10^{4}$ | $1.913\times10^{4}$ | $6.374\times10^{4}$ | $1.735\times10^{5}$ | $4.093\times10^{5}$ |

### 4.2 不连续位移场

将变形 $u_2$ 的目标图像从中间处截断并向右偏移 20 pixel，中间白色区域视为"裂缝"，以此得到不连续位移场的模拟变形散斑图像，如图 7(a)所示。在 DIC 计算中，由于裂缝的存在，应剔除位移场含有的无效点，即当某点位移与相邻点发生一定像素的位移突变（本例取 0.2 pixel）或某点的相关系数低于 0.85 时剔除[25]。利用 PLS 法和 PMLS 法对剔除无效点后的位移场进行拟合，拟合结果如图 7(b)所示。由图 7(b)可以得到：由于裂缝的存在，方法对应变场的精度较连续位移场有所降低，且最优窗口增大；PLS-1、PLS-2 和 PLS-3 的最优窗口宽度分别为 5、9 和 23，对应的均方根误差分别为 0.0023 pixel、0.0027 pixel 和 0.0020 pixel；PMLS-1、PMLS-2 和 PMLS-3 的最优窗口宽度分别为 7、13 和 29，对应均方根误差分别为 0.0024 pixel、0.0027 pixel 和 0.0020 pixel。但在窗口宽度较大时，所提方法的精度仍比 PLS 法高。除此之外，PLS 法和 PMLS 法均可采用可视性准则有效避免不连续问题产生的突变。

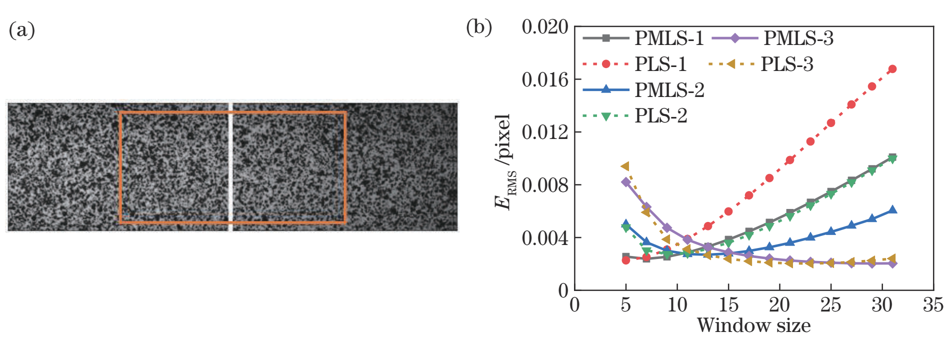


图 7 不连续位移场的目标图像和拟合结果。(a)目标图像；(b)拟合结果

Fig. 7 Target image and fitting results of discontinuous displacement field. (a) Target image; (b) fitting results

# 5 实例分析

## 5.1 连续位移场实验

分析素材取自国际力学协会公开数据中"sample15"中的实验，采用变形图片"P200_K400_N2"作为分析对象，选取参考图像中900 pixel×900 pixel的矩形区域为感兴趣区域，参考图像和目标图像如图8(a)和图8(b)所示，设置感兴趣点阵间隔为10 pixel，共8100个数据点。通过DIC分析得到的竖向位移场$V$如图8(c)所示。采用一阶和三阶的PLS法和PMLS法对该位移场进行拟合，窗口为5时PLS-1和PMLS-1法的拟合结果和窗口为7时PLS-3和PMLS-3的拟合结果如图9所示。

由图9可以得到，两种方法在拟合窗口较小时的应变场结果几乎一致。但对于真实实验，最优窗口不能准确确定，故设置PLS-1和PMLS-1的计算窗口宽度为5和15，PLS-3和PMLS-3的计算窗口宽度为7和21，对细线处的应变场结果进行对比，如图10所示。当应变梯度较低时，PMLS法和PLS法的计算结果基本相同且受窗口尺寸变化影响不大；当应变梯度较高时，如图10中局部放大处，两种方法在不同窗口尺寸时的计算结果不同，PMLS-1、PLS-1、PMLS-3和PLS-3在窗口变化时的最大应变场差值分别为0.007、0.012、0.005和0.008。可以得到：当窗口增大时，PLS法由于过度平滑导致对应变梯度较高区域的拟合精度较低，且受窗口变化影响较大；而PMLS拟合的应变场与窗口较小时的结果差异较小，得到的结果更稳定。

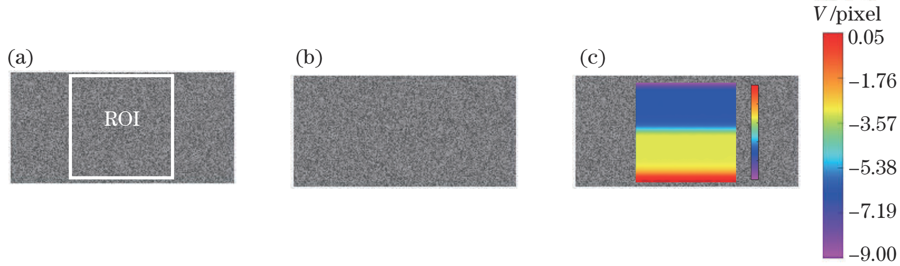


图8 sample15实验。(a)参考图像；(b)目标图像；(c) DIC所得位移场

Fig. 8 sample15 test. (a) Reference image; (b) target image; (c) displacement field obtained by DIC

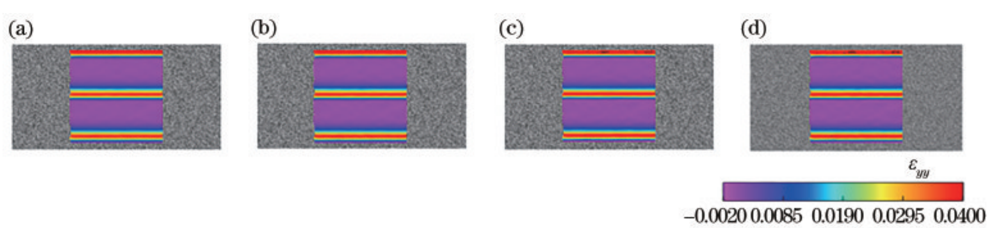


图9 应变场拟合结果。(a) PLS-1; (b) PMLS-1; (c) PLS-3; (d) PMLS-3

Fig. 9 Fitting results for strain field. (a) PLS-1; (b) PMLS-1; (c) PLS-3; (d) PMLS-3

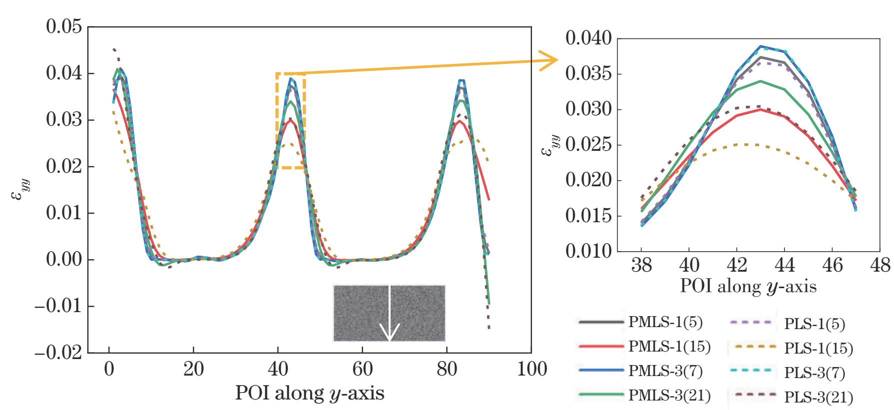


图10 细线处应变场结果对比

Fig. 10 Comparison of strain field results at thin lines

## 5.2 带裂缝实验

分析素材取自开源软件ncorr（http://www.ncorr.com）上的实例"Crack Tip Experiments"，对试件进行预裂，取未加载预裂试件的图像为参考图像，负载

为约4094 N情况下拍摄的图像为目标图像，大小为3352 pixel×2532 pixel。使用偏振滤光片和QM100远程显微镜确定裂缝位置，并采用后向分析法，即将目标图像作为参考图像分析未变形图像，然后再进行坐标转换得到目标图像的位移场，计算该试件的欧拉应变。选取感兴趣区域大小为3066 pixel×1972 pixel，取子区大小为31 pixel，间隔为10 pixel。通过4.2节分析可知：对不连续位移场的拟合，拟合窗口应比连续位移场大，故设置PLS-1和PMLS-1的拟合窗口宽度为7，PLS-3和PMLS-3的拟合窗口宽度为25。对竖向应变场的计算结果和裂尖局部放大图如图11所示。为进一步比较裂尖处应变场拟合结果，对细线处的应变场结果进行比较，如图12所示。

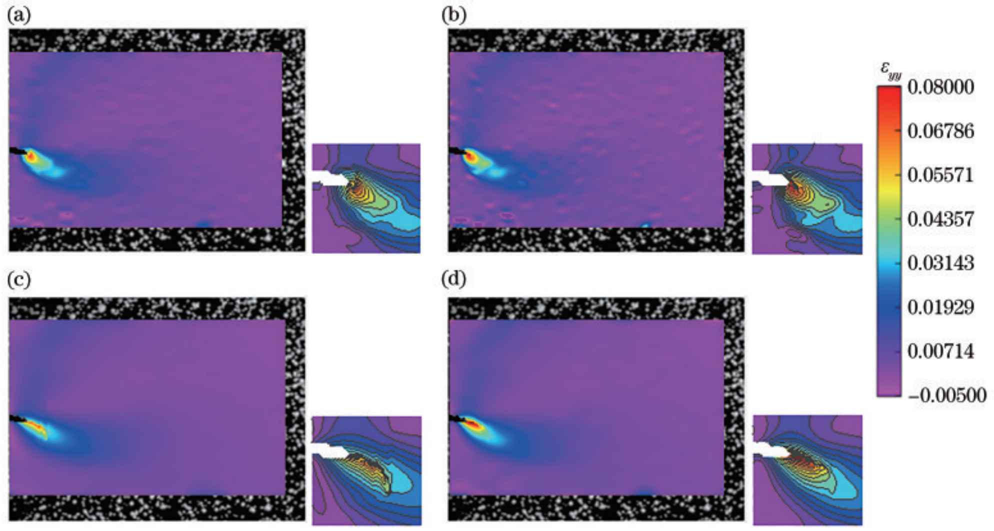


图11 竖向应变场拟合结果及局部放大图。(a) PLS-1; (b) PMLS-1; (c) PLS-3; (d) PMLS-3

Fig. 11 Fitting results of vertical strain field and local enlargements. (a) PLS-1; (b) PMLS-1; (c) PLS-3; (d) PMLS-3

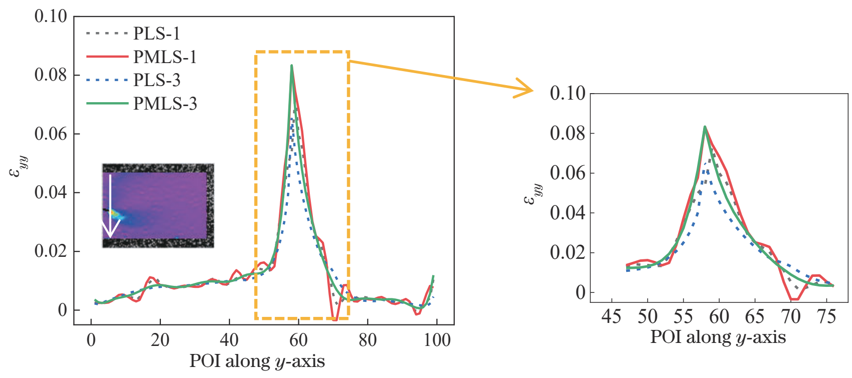


图12 细线处竖向应变场结果对比

Fig. 12 Comparison of vertical strain field results at thin lines

由图11和图12可以得到：两种方法经可视性准则处理后，裂缝附近处并未出现应变集中的现象，PMLS法和PLS法得到的结果均符合实际情况；在距裂尖较远处，PLS法和PMLS法的计算结果接近；在裂尖附近的高梯度变形处，PLS-1、PMLS-1和PMLS-3的结果更接近，但PMLS-3的拟合结果更平滑，且PMLS法在峰值处计算的应变值较PLS法更大。结果说明对裂尖处应变场的拟合，PMLS法更适用。

## 6 结 论

提出了一种逐点移动最小二乘拟合的应变场拟合方法。该方法单独提取计算点支撑域内的感兴趣点并采用局部坐标的形式进行计算，有效解决了移动最小二乘法求解速度慢且易出现病态的问题，并通过模拟实验和两组实例对比PMLS法、经典PLS法和MLS法的计算精度和计算效率。所提方法能够获取与经典PLS法精度相当的应变场，且受窗口尺寸影响较小；对于较大的拟合窗口或梯度较高的变形，PMLS法较PLS法精度更高且对窗口的敏感性较低；相较MLS法，所提方法的计算效率得到有效提高，且更稳定。除此之外，通过可视性准则，所提方法有效剔除PMLS法和PLS法的裂缝附近计算点窗口内的无效点，可获取更加可靠的应变场，提高了两种方法的适用性。

## 参 考 文 献


[1] Yamaguchi I. Speckle displacement and decorrelation in the diffraction and image fields for small object deformation [J]. Optica Acta: International Journal of Optics, 1981, 28(10): 1359-1376.

[2] Peters W H, Ranson W F. Digital imaging techniques in experimental stress analysis[J]. Optical Engineering, 1982, 21(3): 213427.

[3] 李桂华，马万龙，朱天天，等．基于数字图像相关方法的空心圆盘热变形测量[J]. 激光与光电子学进展，2021, 58(14): 1412003.
Li G H, Ma W L, Zhu T T, et al. Thermal deformation measurement of hollow disk based on digital image correlation method[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2021, 58(14): 1412003.

[4] 王凡，赵亮，吴晓东，等．基于CT及数字图像相关法的混凝土变形场测量分析[J]. 激光与光电子学进展，2020, 57(20): 200401.
Wang F, Zhao L, Wu X D, et al. Measurement and analysis of concrete deformation field based on CT and digital image correlation method[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(20): 200401.

[5] 吴荣，刘依，周建民，等．数字图像相关在旋转物体全场应变测量中的应用[J]. 光学学报，2020, 40(13): 1312005.
Wu R, Liu Y, Zhou J M, et al. Full-field strain measurement of rotating object using digital image correlation[J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(13): 1312005.

[6] Thimm B, Glavas A, Reuber M, et al. Determination of chip speed and shear strain rate in primary shear zone using digital image correlation (DIC) in linear-orthogonal cutting experiments[J]. Journal of Materials Processing Technology, 2021, 289: 116957.

[7] Bruck H A, McNeill S R, Sutton M A, et al. Digital image correlation using Newton-Raphson method of partial differential correction[J]. Experimental Mechanics, 1989, 29(3): 261-267.

[8] Pan B, Asundi A, Xie H M, et al. Digital image correlation using iterative least squares and pointwise least squares for displacement field and strain field measurements[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2009, 47(7/8): 865-874.

[9] 潘兵，谢惠民．数字图像相关中基于位移场局部最小二乘拟合的全场应变测量[J]. 光学学报，2007, 27(11): 1980-1986.
Pan B, Xie H M. Full-field strain measurement based on least-square fitting of local displacement for digital image correlation method[J]. Acta Optica Sinica, 2007, 27(11): 1980-1986.

[10] 晏班夫，李得睿，徐观亚，等．基于快速DIC与正则化平滑技术的结构形变测试[J]. 中国公路学报，2020, 33(9): 193-205.
Yan B F, Li D R, Xu G Y, et al. Structural deformation test based on fast digital image correlation and regularization smoothing techniques[J]. China Journal of Highway and Transport, 2020, 33(9): 193-205.

[11] Yoneyama S, Koyanagi J, Arikawa S. Measurement of discontinuous displacement/strain using mesh-based digital image correlation[J]. Advanced Composite Materials, 2016, 25(4): 329-343.

[12] 王学滨，董伟，杨梅，等．基于最小一乘拟合的非均匀应变的数字图像相关测量[J]. 光学学报，2020, 40(3): 0312001.
Wang X B, Dong W, Yang M, et al. Inhomogeneous strain measurement based on least absolute deviation fitting for digital image correlation[J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(3): 0312001.

[13] Zhao J Q, Zeng P, Pan B, et al. Improved Hermite finite element smoothing method for full-field strain measurement over arbitrary region of interest in digital image correlation [J]. Optics and Lasers in Engineering, 2012, 50(11): 1662-1671.

[14] Zhao J Q, Song Y, Wu X X. Fast Hermite element method for smoothing and differentiating noisy displacement field in digital image correlation[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2015, 68: 25-34.

[15] 杜鉴昕，赵加清，王海涛，等．一种针对裂尖变形场测量的正则化全局DIC方法[J]. 光学学报，2020, 40(11): 1112001.
Du J X, Zhao J Q, Wang H T, et al. Regularized global digital image correlation method for crack tip deformation field measurement[J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(11): 1112001.

[16] Li X, Fang G, Zhao J Q, et al. Local Hermite (LH) Method: an accurate and robust smooth technique for high-gradient strain reconstruction in digital image correlation[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2019, 112: 26-38.

[17] Li X, Fang G, Zhao J Q, et al. A practical and effective regularized polynomial smoothing (RPS) method for high-gradient strain field measurement in digital image correlation [J]. Optics and Lasers in Engineering, 2019, 121: 215-226.

[18] 朱志辉，冯乾朔，肖权清，等．基于DIC技术和无网格法的裂尖应变场分析方法[J]. 土木工程学报，2021, 54(6): 99-109.
Zhu Z H, Feng Q S, Xiao Q Q, et al. An analysis method for strain field of crack tip based on DIC technology and meshless method[J]. China Civil Engineering Journal, 2021, 54(6): 99-109.

[19] 程玉民．移动最小二乘法研究进展与述评[J]. 计算机辅助工程，2009, 18(2): 5-11, 20.
Cheng Y M. Advances and review on moving least-square methods[J]. Computer Aided Engineering, 2009, 18(2): 5-11, 20.

[20] Pan B. Recent progress in digital image correlation[J]. Experimental Mechanics, 2011, 51(7): 1223-1235.

[21] 相智博．移动最小二乘法矿山地面沉降监测数据同化和预测模型[D]. 太原：太原理工大学，2019: 46-51.
Xiang Z B. Data assimilation and prediction model of mining subsidence monitoring data based on moving least squares[D]. Taiyuan: Taiyuan University of Technology, 2019: 46-51.

[22] 杨建军，杨子乐，黄旺，等．移动最小二乘法导数近似讨论[J]. 计算机辅助工程，2018, 27(1): 28-34.
Yang J J, Yang Z L, Huang W, et al. Discussion on derivative approximation for moving least squares method [J]. Computer Aided Engineering, 2018, 27(1): 28-34.

[23] 杨建军，郑健龙 . 移动最小二乘法的近似稳定性[J]. 应用数学学报，2012，35(4): 637-648.
Yang J J, Zheng J L. Stability of moving least squares approximation[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2012, 35(4): 637-648.

[24] 任颜鑫 . 无网格法研究及在混凝土裂缝分析中的应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学，2007: 52-53.
Ren Y X. Research on element-free method and application in concrete crack analysis[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2007: 52-53.

[25] 韩依颖，刘乃盛，蔡永昌 . 基于DIC方法的混凝土压缩试件裂纹识别[J]. 土木建筑与环境工程，2015，37(S2): 51-55.
Han Y Y, Liu N S, Cai Y C. Application of digital image correlation (DIC) method in experimental research on compression damage of concrete[J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2015, 37(S2): 51-55.