

激光与光电子学进展

随机粗糙面穆勒矩阵的数值分析

杨璐, 佟倩, 周芷茵, 何思源, 宋哲*

辽宁师范大学物理与电子技术学院, 辽宁 大连 116029

摘要 穆勒矩阵反映了物体对光波偏振特性的影响, 包含大量的物体表面信息。采用基尔霍夫近似法分析了二维随机粗糙面的散射场和散射穆勒矩阵, 数值模拟了入射角和相对粗糙度变化时铜、铁、镍、玻璃、铌酸锂的散射穆勒矩阵。仿真结果表明, 金属和电介质的穆勒矩阵存在明显差异; 随着入射角的增大, 金属和电介质的 m_{01} 、 m_{10} 、 m_{22} 、 m_{33} 参数变化幅度分别小于 30% 和大于 80%; 随着相对粗糙度的增大, 金属和电介质的 m_{00} 、 m_{11} 、 m_{22} 、 m_{33} 参数变化幅度分别超过 60% 和小于 20%; 金属的 m_{23} 、 m_{32} 参数随入射角的增大而增大, 随着相对粗糙度的增大而减小, 而电介质的 m_{23} 、 m_{32} 参数始终为 0。这些差异可用于识别金属和电介质, 也为物体表面粗糙度的测量提供了一定参考。

关键词 散射; 物理光学; 穆勒矩阵; 粗糙度; 入射角

中图分类号 O436.2

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP220705

Numerical Analysis of Mueller Matrix for Random Rough Surfaces

Yang Lu, Tong Qian, Zhou Zhiyin, He Siyuan, Song Zhe*

School of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, Liaoning, China

Abstract The Mueller matrix describes the influence of an object on the polarization of optical waves. It has various information about the object surface. In this paper, the scattering field and the scattering Mueller matrix of two-dimensional random rough surfaces are analyzed using the Kirchhoff approximation method. The scattering Mueller matrices of copper, iron, nickel, glass, and lithium niobate are numerically simulated using the incidence angle, and the relative roughness is changed. With the increase of the incident angle, the m_{01} , m_{10} , m_{22} , and m_{33} parameters of metals and dielectrics vary by less than 30% and greater than 80%, respectively. The m_{00} , m_{11} , m_{22} , and m_{33} parameters of metals and dielectrics vary by more than 60% and less than 20%, respectively. Further, the m_{23} and m_{32} parameters of metals are increased as the incident angle increases, and are decreased as the relative roughness increases, whereas the m_{23} and m_{32} parameters of the dielectric are always 0. The differences can be used for identifying metal and dielectric and provide some reference to the measurement of object surface roughness.

Key words scattering; physical optics; Mueller matrix; roughness; incident angle

1 引言

在光波长尺度, 大多数物体表面都可以看成是满足某一特定概率密度分布的粗糙面, 光波照到物体后会被散射, 从而携带大量物体表面信息。因此, 研究随机粗糙面的散射特性对激光雷达、工业检测、生物医学等领域有重要意义和应用价值。传统探测技术主要获取目标的强度信息, 人们对随机粗糙面散射特性的研究主要集中在散射光场的分析并开发了多种计算散射场的方法, 如基尔霍夫近似 (KA) 法^[1-2]、微扰 (SP) 法^[3]、双向反射分布函数 (BRDF) 法^[4]、矩量法^[5]、时域

有限差分 (FDTD)^[6]。但强度探测受到背景亮度、颜色等对比度的限制, 不易发现隐藏在背景中的目标, 具有一定的局限性, 而光波的偏振信息不受对比度的影响, 能更好地反映物体的表面特征。因此, 随机粗糙面散射的偏振特性受到越来越多的关注。

穆勒矩阵能很好地描述物体对光波偏振态的调制, 几乎涵盖了物体表面的全部信息, 成为研究粗糙物体偏振特性的主要手段。例如: Bruce 等^[7]利用射线追踪法研究了法向入射二维粗糙面的穆勒矩阵, 分析了穆勒矩阵的对称性; Letnes 等^[8]利用简化瑞利 (Rayleigh) 方程的非扰动解计算了二维随机有损金属

收稿日期: 2022-02-11; 修回日期: 2022-03-14; 录用日期: 2022-03-23; 网络首发日期: 2022-04-03

通信作者: *zhesongkeke@163.com

表面的穆勒矩阵; Yan 等^[9]利用 KA 法研究了金、铁、K5 玻璃和 LaSF30 玻璃随机粗糙面的穆勒矩阵, 发现金属和电介质的 m_{34} 参数有明显差异; Yang 等^[10]研究了 Lambert 表面的穆勒矩阵, 提出一种基于穆勒矩阵估算粗糙度的方法; 黄美娇^[11]利用等效介质理论模型和 FDTD 法研究了粗糙表面的穆勒矩阵, 分析了光学常数和粗糙度对穆勒矩阵的影响; 闫振纲等^[12]利用 KA 法研究了银和玻璃随机粗糙面的穆勒矩阵, 用 6 个穆勒矩阵元素识别金属和电介质; Jiang 等^[13-14]基于 KA 法和蒙特卡罗法研究了铁和玻璃随机粗糙面的穆勒矩阵, 并发现金属和电介质的穆勒矩阵有 6 个元素不同。

上述研究大多分析某个粗糙度下随机粗糙面穆勒矩阵在半球空间的分布, 但穆勒矩阵与光波入射角、物体表面粗糙度等因素有很大关系, 了解穆勒矩阵随入射角和粗糙度的变化规律有助于分析随机粗糙面散射的偏振特性。考虑到 KA 法计算效率和精度较高, 是计算随机粗糙面散射光强常用的方法, 本文采用 KA 法分析了二维随机粗糙面的散射特性, 数值计算了不

同入射角和不同相对粗糙度下的散射穆勒矩阵, 分析了入射角和相对粗糙度对穆勒矩阵的影响, 同时讨论了入射角、相对粗糙度变化时金属和电介质穆勒矩阵元素的差异以及用穆勒矩阵计算物体相对粗糙度的方法。研究结果能够为激光雷达、目标识别、表面检测等提供理论基础和参考。

2 随机粗糙面散射穆勒矩阵的理论分析

大多数粗糙物体表面的高度起伏呈高斯分布, 根据频域滤波法能得到随机粗糙面上任一点的高度^[15], 可表示为

$$f(x_m, y_n) = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{m=-M/2}^{M/2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} b(k_m, k_n) \exp[i(k_m x_m + k_n y_n)], \quad (1)$$

式中: (x_m, y_n) 为采样点; M, N 为 x 和 y 方向的采样个数; L_x, L_y 为随机粗糙表面的长度和宽度; k_m, k_n 为对应方向的波数; $b(k_m, k_n)$ 为傅里叶系数, 可表示为

$$b(k_m, k_n) = 2\pi \sqrt{L_x L_y W(k_m, k_n)} \times \begin{cases} N(0, 1), & m = 0, M/2 \text{ or } n = 0, N/2 \\ \frac{N(0, 1) + iN(0, 1)}{\sqrt{2}}, & m \neq 0, M/2 \text{ and } n \neq 0, N/2 \end{cases} \quad (2)$$

式中, $W(k_m, k_n)$ 为高斯功率谱密度函数, 可表示为

$$W(k_m, k_n) = \frac{\delta^2 l_x l_y}{4\pi} \exp\left(-\frac{k_m^2 l_x^2 + k_n^2 l_y^2}{4}\right), \quad (3)$$

式中: δ 为随机粗糙表面的均方根高度; l_x, l_y 分别为 x 和 y 方向的相关长度。根据式(1)~式(3)模拟生成不同粗糙度的随机粗糙面, 如图 1 所示。

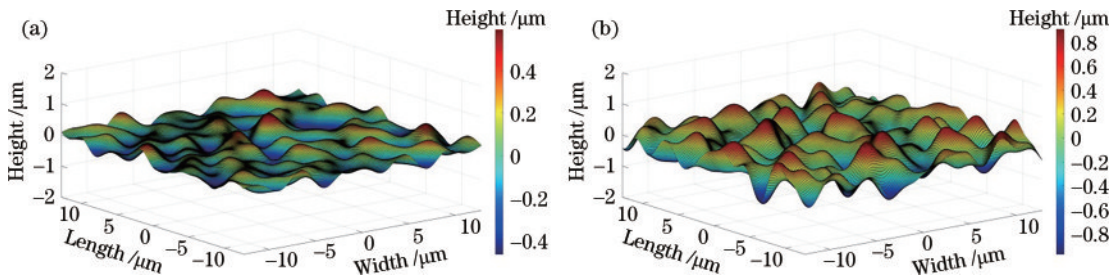


图 1 随机粗糙面示意图。(a) $\delta = 0.3 \mu\text{m}, l_x = l_y = 4.0 \mu\text{m}$; (b) $\delta = 0.4 \mu\text{m}, l_x = l_y = 4.0 \mu\text{m}$

Fig. 1 Schematic diagrams of random rough surface. (a) $\delta = 0.3 \mu\text{m}, l_x = l_y = 4.0 \mu\text{m}$; (b) $\delta = 0.4 \mu\text{m}, l_x = l_y = 4.0 \mu\text{m}$

当一束平面波 k_i 以入射角 θ_i 、方位角 φ_i 入射到粗糙面上时会发生散射, 设入射方位角为 0, 即入射面与 xoz 平面重合, 散射光为 k_s , 散射角为 θ_s 、散射方位角为 φ_s , 如图 2 所示。采用基尔霍夫近似法将粗糙面上各点用微切平面代替, 则光波在每个微切平面上将发生平面反射, 根据菲涅耳反射求得本地场, 结合 Stratton-Chu 方程得到随机粗糙面的散射场^[16]为

$$E(\mathbf{r}) = \frac{i \exp(ikr)}{4\pi r} \iint (A + B + C + D) \times \exp[i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}'] \frac{dx dy}{\sqrt{1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}}, \quad (4)$$

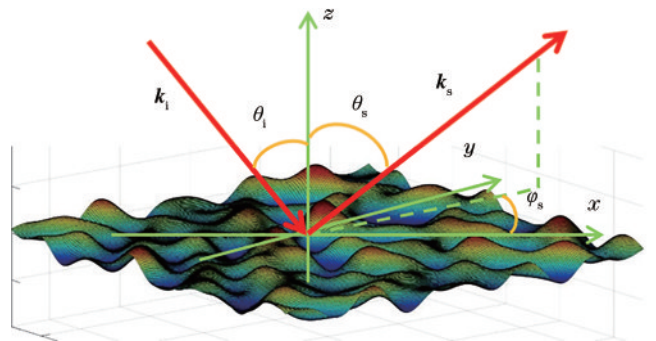


图 2 随机粗糙面散射示意图

Fig. 2 Scattering diagram of random rough surface

$$\begin{cases} \mathbf{E}_i = E_s^i \mathbf{S}_i + E_p^i \mathbf{P}_i \\ \mathbf{E}_r = E_s^r r_s \mathbf{S}_r + E_p^r r_p \mathbf{P}_r \\ \mathbf{A} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_i) \mathbf{k}_i - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_i) \mathbf{E}_i \\ \mathbf{B} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_r) \mathbf{k}_r - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_r) \mathbf{E}_r \\ \mathbf{C} = -(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{n})(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) \\ \mathbf{D} = [\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r)] \mathbf{n} - [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r)] \mathbf{k}_s \end{cases}, \quad (5)$$

式中: $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_r$ 分别为微面元入射光波电场和反射光波电场; $\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_r$ 分别为入射波和反射波垂直入射面分量(s波)的单位矢量; $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_r$ 分别为入射波和反射波平行入射面

分量(p波)的单位矢量; \mathbf{n} 为微面元的法向量; r_s, r_p 分别是s波和p波的反射系数。随机粗糙面散射光电场可表示为

$$\mathbf{E}_s = E_s^s \mathbf{S}_s + E_p^s \mathbf{P}_s. \quad (6)$$

为描述光波经过粗糙面散射后偏振态的变化,将入射光和散射光分别用琼斯矢量和斯托克斯矢量表示,则散射光与入射光之间的关系可表示为

$$\begin{bmatrix} E_p^s \\ E_s^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{pp} & f_{sp} \\ f_{ps} & f_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_p^i \\ E_s^i \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_p^s E_p^{s*} + E_s^s E_s^{s*} \\ E_p^s E_p^{s*} - E_s^s E_s^{s*} \\ E_p^s E_s^{s*} + E_s^s E_p^{s*} \\ i(E_p^s E_s^{s*} - E_s^s E_p^{s*}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_p^i E_p^{i*} + E_s^i E_s^{i*} \\ E_p^i E_p^{i*} - E_s^i E_s^{i*} \\ E_p^i E_s^{i*} + E_s^i E_p^{i*} \\ i(E_p^i E_s^{i*} - E_s^i E_p^{i*}) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式中: f 为散射系数,第1个下标表示入射光的偏振方向,第2个下标表示散射光偏振方向; m_{ij} ($i, j=0, 1, 2, 3$) 为穆勒矩阵元;上标*表示复共轭。联立式(7)和式(8),得到

$$\begin{cases} m_{00} = \frac{1}{2} (|f_{pp}|^2 + |f_{ss}|^2 + |f_{sp}|^2 + |f_{ps}|^2) \\ m_{01} = \frac{1}{2} (|f_{pp}|^2 - |f_{ss}|^2 - |f_{sp}|^2 + |f_{ps}|^2) \\ m_{02} = \frac{1}{2} (|f_{pp} + f_{sp}|^2 + |f_{ps} + f_{ss}|^2) - m_{00} \\ m_{03} = \frac{1}{2} (|f_{pp} + if_{sp}|^2 + |f_{ps} + if_{ss}|^2) - m_{00} \\ m_{10} = \frac{1}{2} (|f_{pp}|^2 - |f_{ss}|^2 + |f_{sp}|^2 - |f_{ps}|^2) \\ m_{11} = \frac{1}{2} (|f_{pp}|^2 + |f_{ss}|^2 - |f_{sp}|^2 - |f_{ps}|^2) \\ m_{12} = \frac{1}{2} (|f_{pp} + f_{sp}|^2 - |f_{ps} + f_{ss}|^2) - m_{10} \\ m_{13} = \frac{1}{2} (|f_{pp} + if_{sp}|^2 - |f_{ps} + if_{ss}|^2) - m_{10} \\ m_{20} = \frac{1}{2} (f_{pp} f_{ps}^* + f_{ps} f_{pp}^* + f_{sp} f_{ss}^* + f_{ss} f_{sp}^*) \\ m_{21} = \frac{1}{2} (f_{pp} f_{ps}^* + f_{ps} f_{pp}^* - f_{sp} f_{ss}^* - f_{ss} f_{sp}^*) \\ m_{22} = \frac{1}{2} [(f_{pp} + f_{sp})(f_{ps} + f_{ss})^* + (f_{ps} + f_{ss})(f_{pp} + f_{sp})^*] - m_{20} \\ m_{23} = \frac{1}{2} [(f_{pp} + if_{sp})(f_{ps} + if_{ss})^* + (f_{ps} + if_{ss})(f_{pp} + if_{sp})^*] - m_{20} \\ m_{30} = \frac{1}{2} i(f_{pp} f_{ps}^* - f_{ps} f_{pp}^* + f_{sp} f_{ss}^* - f_{ss} f_{sp}^*) \\ m_{31} = \frac{1}{2} i(f_{pp} f_{ps}^* - f_{ps} f_{pp}^* - f_{sp} f_{ss}^* + f_{ss} f_{sp}^*) \\ m_{32} = \frac{1}{2} i[(f_{pp} + f_{sp})(f_{ps} + f_{ss})^* - (f_{ps} + f_{ss})(f_{pp} + f_{sp})^*] - m_{30} \\ m_{33} = \frac{1}{2} i[(f_{pp} + if_{sp})(f_{ps} + if_{ss})^* - (f_{ps} + if_{ss})(f_{pp} + if_{sp})^*] - m_{30} \end{cases}, \quad (9)$$

式中,符号 $| \cdot |$ 表示复数的模。

3 散射穆勒矩阵的数值模拟

穆勒矩阵包含了物体与光波相互作用后对偏振的所有传输特性,即双向衰减、相位延迟、退偏振。其中: m_{00} 反映了物体对入射光散射、反射光强的能力; m_{01} 、 m_{02} 、 m_{03} 分别反映了物体对入射光的水平、垂直、圆性双向衰减能力; m_{10} 、 m_{20} 、 m_{30} 反映了物体对非偏振光的起偏能力; m_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 反映了物体对入射光的退偏振和相位延迟能力^[17]。因此模拟随机粗糙面的穆勒矩阵有助于分析物体的偏振特性。

选取铜、铁、镍、玻璃、铈酸锂等5种材料进行研究,光波长取激光雷达常用波长 $\lambda = 905 \text{ nm}$, 5种材料的折射率如表1所示^[18-19]。根据式(4)~式(9),利用 Matlab2018b 分别数值模拟了均方根高度 δ 为 0.2λ 和 0.3λ 、相关长度 l 为 2λ 和 4λ 情况下不同入射角时与入射光镜像方向 ($\theta_s = \theta_i$, $\varphi_s = \varphi_i = 0$) 的散射穆勒矩阵以及入射角为 $\theta_i = 30^\circ$ 、相对粗糙度 δ/l 变化时,镜像方向的散射穆勒矩阵,结果如图3~图6所示。其中,只列出了数值不为0的 m_{00} 、 m_{01} 、 m_{10} 、 m_{11} 、 m_{22} 、 m_{23} 、 m_{32} 、 m_{33} 元素。

从图3可以发现:穆勒矩阵元的绝对值呈对称分布,即 $|m_{ij}| = |m_{ji}|$ ($i, j=0, 1, 2, 3$), 且 $m_{00} = m_{11}$ 、 $m_{22} = m_{33}$; 5种材料的 $|m_{01}/m_{00}|$ 、 $|m_{10}/m_{00}|$ 均随入射角增大呈增大趋势,但电介质的变化幅度大于金属,这表明入射角越大,材料对入射光的水平双向衰减能力和起偏能力越强,电介质的双向衰减能力和起偏能力大于金属,且对入射角变化更敏感;随着入射角的增大,5种材料的 $|m_{11}/m_{00}|$ 均为1,电介质的 $|m_{22}/m_{00}|$ 、 $|m_{33}/m_{00}|$ 呈先减小后增大趋势,金属的 $|m_{22}/m_{00}|$ 、 $|m_{33}/m_{00}|$ 呈减小趋势,电介质的 $|m_{23}/m_{00}|$ 、 $|m_{32}/m_{00}|$ 为0,金属的 $|m_{23}/m_{00}|$ 、 $|m_{32}/m_{00}|$ 呈增大趋势。因此不能确定材料对入射光的退偏能力和相位延迟,还需分解穆勒矩阵提取表征退偏和相位延迟的参数进行分析^[20]。

表 1 波长为 0.905 μm 时材料的折射率

Table 1 Refractive index of the material at a wavelength of 0.905 μm

Target material	Copper	Iron	Nickel	Glass	Lithium niobate
n	0.3+5.768i	3.12+3.87i	2.65+4.63i	1.5	$n_o = 2.23, n_e = 2.16$

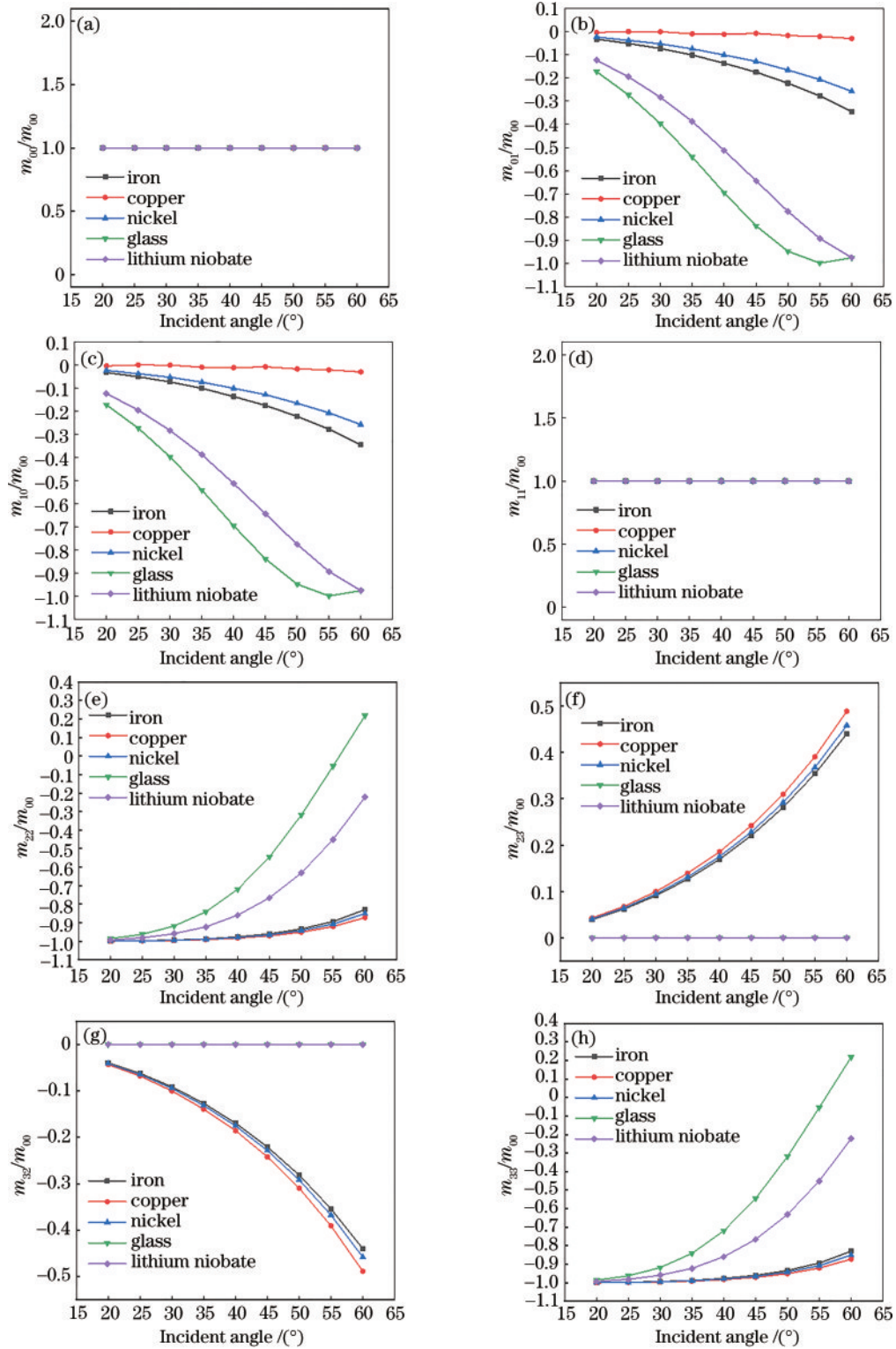


图 3 随机粗糙面散射穆勒矩阵随入射角变化曲线 ($\delta = 0.2\lambda, l = 4\lambda$)。(a) m_{00}/m_{00} ;(b) m_{01}/m_{00} ;(c) m_{10}/m_{00} ;(d) m_{11}/m_{00} ;

(e) m_{22}/m_{00} ;(f) m_{23}/m_{00} ;(g) m_{32}/m_{00} ;(h) m_{33}/m_{00}

Fig. 3 Variation curve of scattering Mueller matrix on random rough surface with incident angle ($\delta = 0.2\lambda, l = 4\lambda$). (a) m_{00}/m_{00} ;

(b) m_{01}/m_{00} ; (c) m_{10}/m_{00} ; (d) m_{11}/m_{00} ; (e) m_{22}/m_{00} ; (f) m_{23}/m_{00} ; (g) m_{32}/m_{00} ; (h) m_{33}/m_{00}

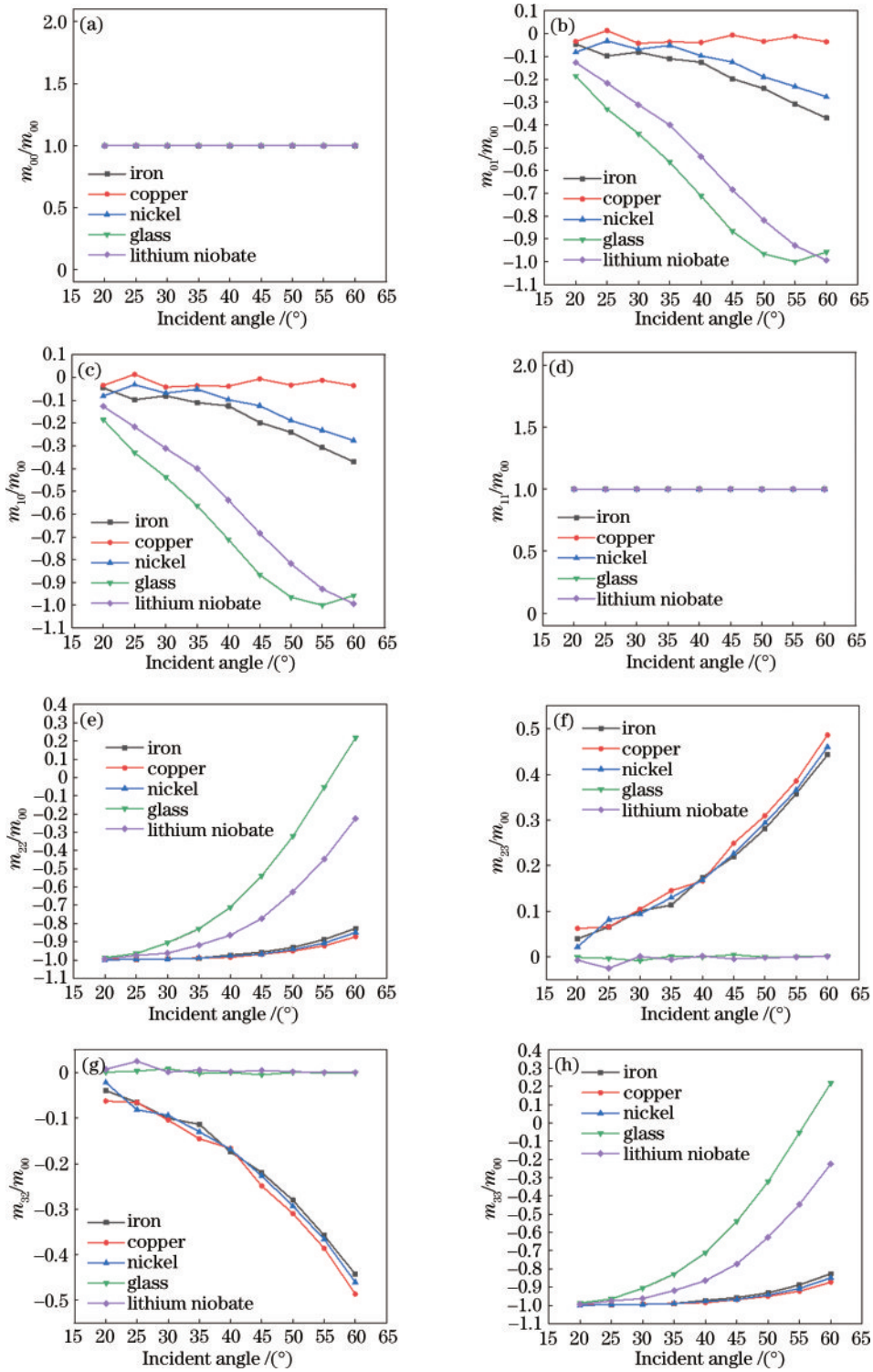


图 4 随机粗糙面散射穆勒矩阵随入射角变化曲线($\delta = 0.2\lambda, l = 2\lambda$)。(a) m_{00}/m_{00} ; (b) m_{01}/m_{00} ; (c) m_{10}/m_{00} ; (d) m_{11}/m_{00} ; (e) m_{22}/m_{00} ; (f) m_{23}/m_{00} ; (g) m_{32}/m_{00} ; (h) m_{33}/m_{00}

Fig. 4 Variation curve of scattering Mueller matrix on random rough surface with incident angle($\delta = 0.2\lambda, l = 2\lambda$). (a) m_{00}/m_{00} ; (b) m_{01}/m_{00} ; (c) m_{10}/m_{00} ; (d) m_{11}/m_{00} ; (e) m_{22}/m_{00} ; (f) m_{23}/m_{00} ; (g) m_{32}/m_{00} ; (h) m_{33}/m_{00}

图 4 和图 5 分别为缩小相关长度和增大均方根高度时穆勒矩阵随入射角变化的曲线。可以发现,穆勒矩阵各元素随入射角变化的趋势与图 3 一致,这表明粗糙度增加不影响穆勒矩阵元随入射角变化的总体趋势。但对穆勒矩阵元数值有影响,表现为图 4、图 5 中

的曲线不光滑,粗糙度越大,曲线起伏越严重,且金属材料的起伏比电介质起伏明显,这表明粗糙度变化对金属影响更大。图 6 中,5 种材料的 m_{00} 均随相对粗糙度增大而减小,这表明反射方向光强减弱,材料对入射光的散射能力增强。 $|m_{01}|, |m_{10}|$ 随相对粗糙度增大而

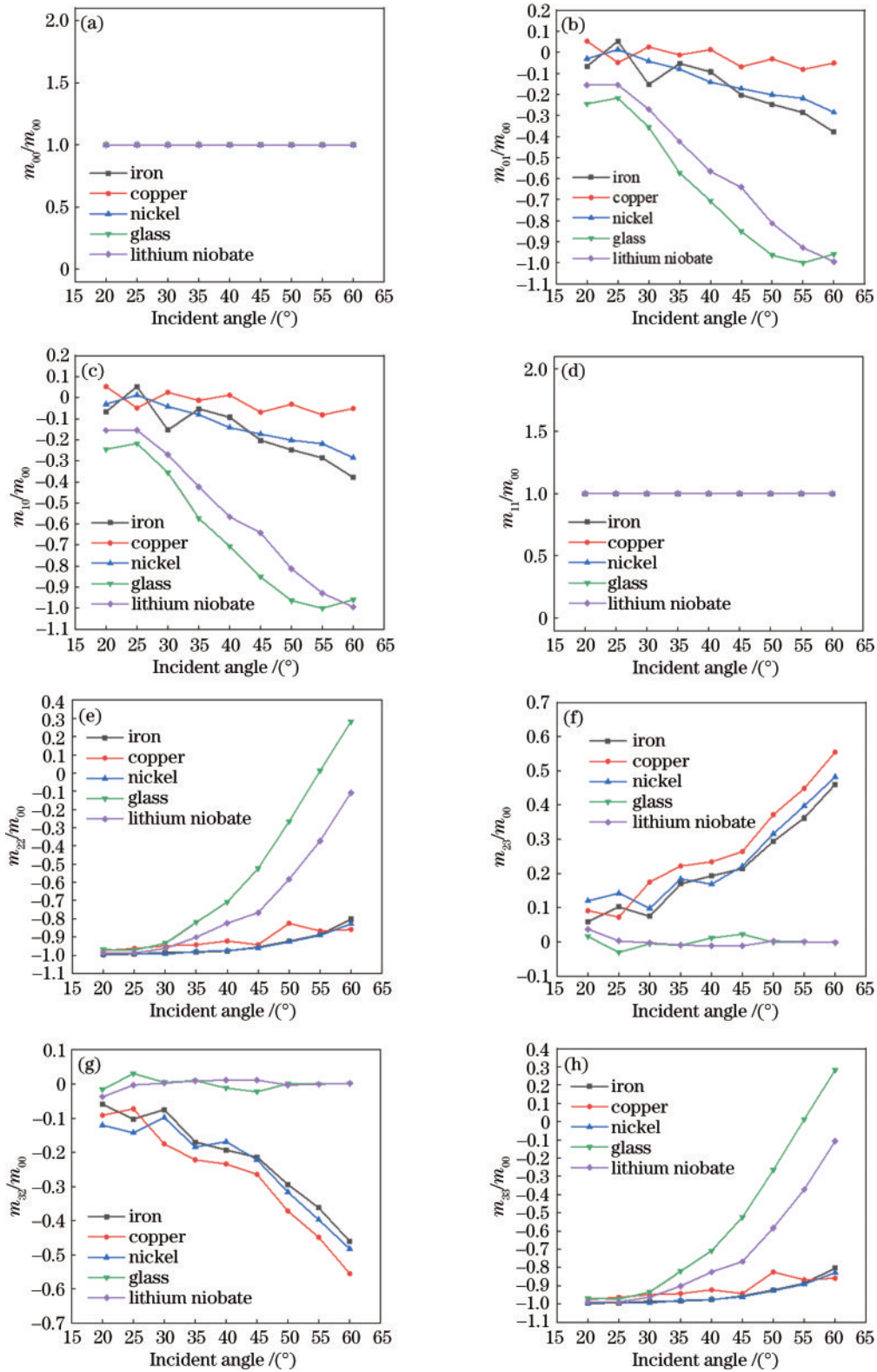


图 5 随机粗糙面散射穆勒矩阵随入射角变化曲线 ($\delta = 0.3\lambda$, $l = 2\lambda$)。(a) m_{00}/m_{00} ; (b) m_{01}/m_{00} ; (c) m_{10}/m_{00} ; (d) m_{11}/m_{00} ; (e) m_{22}/m_{00} ; (f) m_{23}/m_{00} ; (g) m_{32}/m_{00} ; (h) m_{33}/m_{00}

Fig. 5 Variation curve of scattering Mueller matrix on random rough surface with incident angle ($\delta = 0.3\lambda$, $l = 2\lambda$). (a) m_{00}/m_{00} ; (b) m_{01}/m_{00} ; (c) m_{10}/m_{00} ; (d) m_{11}/m_{00} ; (e) m_{22}/m_{00} ; (f) m_{23}/m_{00} ; (g) m_{32}/m_{00} ; (h) m_{33}/m_{00}

减小,表明材料对入射光的水平双向衰减能力和起偏能力减弱; $|m_{11}|$ 、 $|m_{22}|$ 、 $|m_{23}|$ 、 $|m_{32}|$ 、 $|m_{33}|$ 均随相对粗糙度增大而减小,表明材料对入射光的退偏能力增强,相

位延迟减小。此外,金属各穆勒矩阵元随相对粗糙度变化的幅度大于电介质,进一步表明金属材料对粗糙度变化更敏感。

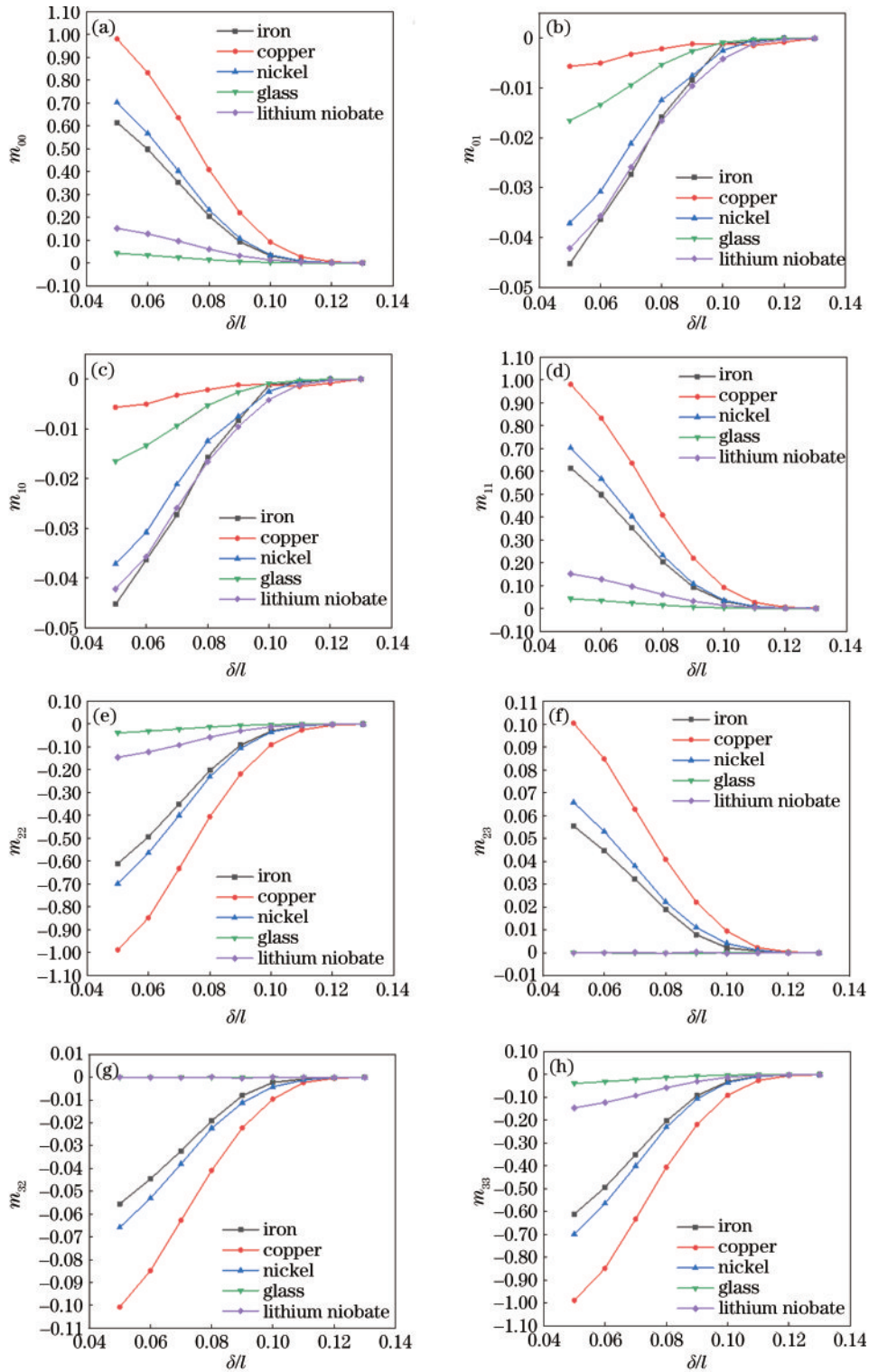


图 6 随机粗糙面散射穆勒矩阵随相对粗糙度变化曲线。(a) m_{00} ; (b) m_{01} ; (c) m_{10} ; (d) m_{11} ; (e) m_{22} ; (f) m_{23} ; (g) m_{32} ; (h) m_{33}

Fig. 6 Variation curve of scattering Mueller matrix on random rough surface with relative roughness. (a) m_{00} ; (b) m_{01} ; (c) m_{10} ; (d) m_{11} ; (e) m_{22} ; (f) m_{23} ; (g) m_{32} ; (h) m_{33}

4 分析与讨论

从 5 种材料散射穆勒矩阵模拟图可以发现: 1) 随着入射角和粗糙度的变化, 穆勒矩阵各参数的绝对值始终呈对称分布, 电介质的 m_{23} 、 m_{32} 参数始终为 0, 金属的 m_{23} 、 m_{32} 参数不为 0, 这与文献 [7, 9, 12-14] 的

结论一致; 2) 当入射角增大时, 金属的 m_{01} 、 m_{10} 、 m_{22} 、 m_{33} 归一化值变化幅度小于 30%, 而电介质的 m_{01} 、 m_{10} 、 m_{22} 、 m_{33} 归一化值变化幅度超过 80%, 金属的 m_{23} 、 m_{32} 归一化值变化幅度超过 40%, 当相对粗糙度增大时, 金属的 m_{00} 、 m_{11} 、 m_{22} 、 m_{33} 参数变化幅度超过 60%, 而电介质的 m_{00} 、 m_{11} 、 m_{22} 、 m_{33} 参数变化幅度小

于 20%，这些差异为识别金属和电介质提供更多参考；3) 金属的 m_{00} 、 m_{11} 、 m_{22} 、 m_{33} 参数对相对粗糙度变化很敏感，可以用于计算随机粗糙面的相对粗糙度。

图 3~图 6 为数值模拟与入射光镜像方向(反射方向)的穆勒矩阵, 则式(9)可简化为

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{pp}^2 + f_{ss}^2 & f_{pp}^2 - f_{ss}^2 & 0 & 0 \\ f_{pp}^2 - f_{ss}^2 & f_{pp}^2 + f_{ss}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{pp}f_{ss}^* + f_{ss}f_{pp}^* & -i(f_{pp}f_{ss}^* - f_{ss}f_{pp}^*) \\ 0 & 0 & i(f_{pp}f_{ss}^* - f_{ss}f_{pp}^*) & f_{pp}f_{ss}^* + f_{ss}f_{pp}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{pp}^2 + f_{ss}^2 & f_{pp}^2 - f_{ss}^2 & 0 & 0 \\ f_{pp}^2 - f_{ss}^2 & f_{pp}^2 + f_{ss}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2f_{pp}f_{ss} \cos \Delta & -2if_{pp}f_{ss} \sin \Delta \\ 0 & 0 & 2if_{pp}f_{ss} \sin \Delta & 2f_{pp}f_{ss} \cos \Delta \end{pmatrix}, \quad (10)$$

式中： Δ 为散射光 p 分量与 s 分量的相位差。可以发现，随机粗糙面反射穆勒矩阵绝对值是对称分布的。金属是强吸收体和强反射体，具有复折射率，即 f_{pp} 和 f_{ss} 均为复数，且 Δ 随入射角的变化而变化，电介质的 f_{pp} 和 f_{ss} 是实数， Δ 具有 0 或 π 固定的相位延迟，导致金属 m_{23} 、 m_{32} 不为 0，电介质 m_{23} 、 m_{32} 为 0，金属和电介质 m_{01} 、 m_{10} 、 m_{22} 、 m_{33} 随入射角和粗糙度变化幅度不同。此外，物体表面粗糙程度、散射系数 f 、材料折射率等都与光波长有关，因此，穆勒矩阵对光波长有一定依赖性，光波长对穆勒矩阵各元素的影响有待于进一步分析。

对铜 m_{22} 随相对粗糙度变化曲线分别采用线性拟合、非线性拟合、傅里叶拟合，结果如图 7 所示。通过化简拟合结果得到相对粗糙度 δ/l 的表达式，如表 2 所示。误差参数 (X_{DOC}) 可表示为

$$X_{\text{DOC}} = X_{\text{SSR}}/X_{\text{SST}}, \quad (11)$$

式中： X_{SST} 为原始数据与平均值之差的平方和； X_{SSR} 为拟合数据与原始数据平均值之差的平方和。 X_{DOC} 的取值范围为 $[0, 1]$ ， X_{DOC} 越接近 1，表明拟合效果越好，误差越小。计算得到的线性拟合曲线的 X_{DOC} 为

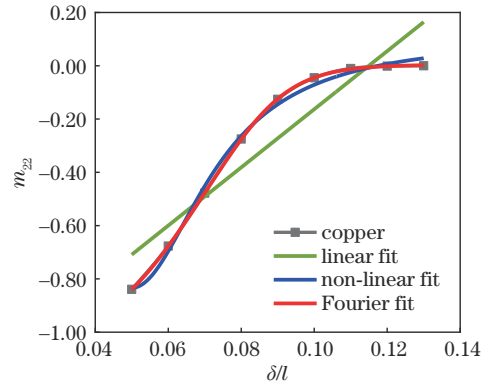


图 7 铜的 m_{22} 与相对粗糙度关系曲线拟合示意图
Fig. 7 Fitting to the relationship curve of m_{22} and relative roughness for copper

0.95064，非线性拟合曲线的 X_{DOC} 为 0.99371，傅里叶拟合曲线的 X_{DOC} 为 1。这表明傅里叶拟合的效果最好，但拟合表达式比较复杂，线性拟合表达式简单，但拟合误差较大，综合考虑后，采用 m_{22} 非线性拟合来计算物体表面的相对粗糙度是适宜的。

表 2 3 种方法拟合得到的 δ/l
Table 2 Fitted δ/l by three methods

Method	Linear fitting	Nonlinear fitting	Fourier fitting
Expression	$\frac{\delta}{l} = \frac{1}{b}(m_{22} - a)$	$\frac{\delta}{l} = -\frac{B + (B^2 + 4C \cdot m_{22} - 4A \cdot C)^{\frac{1}{2}}}{2C}$	$\frac{\delta}{l} = a_0 + a_1 \cos(\omega \cdot m_{22}) + b_1 \sin(\omega \cdot m_{22}) + a_2 \cos(2\omega \cdot m_{22}) + b_2 \sin(2\omega \cdot m_{22}) + a_3 \cos(3\omega \cdot m_{22}) + b_3 \sin(3\omega \cdot m_{22})$
Coefficient	$a = -1.25466,$ $b = 42.24163$	$A = -2.54789, B = 42.24163,$ $C = -174.09065$	$\omega = 2.496, a_0 = 4.097, a_1 = -3.26,$ $b_1 = 5.449, a_2 = -1.36, b_2 = -2.638$ $a_3 = 0.6467, b_3 = 0.06506$

5 结 论

穆勒矩阵几乎包含了物体表面全部信息，是获取物体偏振特性的重要手段，数值计算随机粗糙面的穆勒矩阵能够为激光雷达、表面检测等提供理论依据。采用基尔霍夫近似法分析了二维随机粗糙面的散射场和散射穆勒矩阵，数值模拟了入射角和相对粗糙度变化时与入射光镜像方向的散射穆勒矩阵，分析了入射角和相对粗糙度对穆勒矩阵各元素的影响，发现金属

穆勒矩阵对粗糙度更敏感，电介质穆勒矩阵对入射角更敏感。金属的 m_{01} 、 m_{10} 、 m_{22} 、 m_{33} 归一化值随入射角变化的幅度小于 30%，电介质的 m_{01} 、 m_{10} 、 m_{22} 、 m_{33} 归一化值随入射角变化的幅度超过 80%，金属的 m_{00} 、 m_{11} 、 m_{22} 、 m_{33} 参数随相对粗糙度变化的幅度超过 60%，电介质的 m_{00} 、 m_{11} 、 m_{22} 、 m_{33} 参数随相对粗糙度变化的幅度小于 20%，金属的 m_{23} 、 m_{32} 参数随入射角增大而增大，随相对粗糙度增大而减小，电介质的 m_{23} 、 m_{32} 参数始终为 0。这些差异可用于金属和电介质的识别，同时提

出了一种通过非线性拟合用 m_{22} 来计算相对粗糙度的方法。研究成果能够为目标的探测和识别提供更多的理论参考,为物体表面粗糙度的测量提供一种新思路。

参 考 文 献

- [1] 郭立新, 吴振森. 二维分数布朗运动(FBM)随机粗糙面电磁散射的基尔霍夫近似[J]. 物理学报, 2001, 50(1): 214-216.
Guo L X, Wu Z S. Electromagnetic scattering from two-dimensional fbm rough surface using Kirchhoff approximation [J]. Acta Physica Sinica, 2001, 50(1): 214-216.
- [2] Leader J. The relationship between the Kirchhoff approach and small perturbation analysis in rough surface scattering theory[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1971, 19(6): 786-788.
- [3] 田炜. 随机粗糙面光散射特性研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2009.
Tian W. Study on optical wave scattering from the random rough surfaces[D]. Xi'an: Xidian University, 2009.
- [4] Feng W W, Li J H, Wei Q N, et al. A hybrid model of polarized BRDF for rough surfaces[J]. Infrared Physics & Technology, 2010, 53(5): 336-341.
- [5] Simonsen I, Maradudin A A, Leskova T A. Scattering of electromagnetic waves from two-dimensional randomly rough perfectly conducting surfaces: the full angular intensity distribution[J]. Physical Review A, 2010, 81: 013806.
- [6] Namiki T. 3-D ADI-FDTD method-unconditionally stable time-domain algorithm for solving full vector Maxwell's equations[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2000, 48(10): 1743-1748.
- [7] Bruce N C. Calculations of the Mueller matrix for scattering of light from two-dimensional surfaces[J]. Waves in Random Media, 1998, 8(1): 15-28.
- [8] Letnes P A, Maradudin A A, Nordam T, et al. Calculation of the Mueller matrix for scattering of light from two-dimensional rough surfaces[J]. Physical Review A, 2012, 86(3): 031803.
- [9] Yan K D, Wang S Y, Jiang S, et al. Calculation and analysis of Mueller matrix in light scattering detection[J]. Chinese Optics Letters, 2014, 12(9): 092901.
- [10] Yang W, Gu G H, Zhou X J, et al. The estimation of surface roughness with the utilization of Mueller matrix [J]. Infrared Physics & Technology, 2016, 76: 748-755.
- [11] 黄美娇. 粗糙面椭偏测量中等效介质理论及各向异性穆勒矩阵分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2018.
Huang M J. Analysis on effective medium approximation and anisotropic Mueller matrix in ellipsometry measurement of rough surfaces[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2018.
- [12] 闫振纲, 孙卫平, 李杰, 等. 基于穆勒矩阵的金属和电介质识别方法[J]. 激光与光电子学进展, 2019, 56(14): 142401.
Yan Z G, Sun W P, Li J, et al. Identification of metals and dielectrics based on Mueller matrix[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2019, 56(14): 142401.
- [13] Jiang Y X, Li Z H. Monte Carlo simulation of Mueller matrix of randomly rough surfaces[J]. Optics Communications, 2020, 474: 126113.
- [14] Jiang Y X, Li Z H. Study on Mueller matrix of random rough surface (Withdrawal Notice) [J]. Proceedings of SPIE, 2020, 11717: 117170K.
- [15] Yan K D, Wang S Y, Jiang S, et al. Full angular Stokes vectors of light scattering from two-dimensional randomly rough surfaces by Kirchhoff approximation method[J]. Journal of Optics, 2014, 16(10): 105714.
- [16] 江舒. 随机粗糙表面近红外偏振散射特性数值分析与实验研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2012.
Jiang S. Numerical analysis and experimental investigation of characteristics of polarization scattering light from random rough surfaces under near infrared incident light[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2012.
- [17] 杨蔚, 顾国华, 陈钱, 等. 穆勒矩阵图像的获取及处理 [J]. 红外与激光工程, 2015, 44(12): 3831-3836.
Yang W, Gu G H, Chen Q, et al. Obtaining and processing of Mueller matrix image[J]. Infrared and Laser Engineering, 2015, 44(12): 3831-3836.
- [18] Weber M J. Handbook of optical materials[M]. Boca Raton: CRC Press, 2003.
- [19] Johnson P B, Christy R W. Optical constants of the noble metals[J]. Physical Review B, 1972, 6(12): 4370-4379.
- [20] 何思源, 周芷茵, 田小凡, 等. 不同入射角下物体的穆勒矩阵[J]. 激光与光电子学进展, 2021, 58(17): 1726001.
He S Y, Zhou Z Y, Tian X F, et al. Investigating the Mueller matrix of objects at different incident angles[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2021, 58(17): 1726001.