

基于最小平方中值的点云平面拟合算法

王洋, 王俊元*, 杜文华, 段能全

中北大学机械工程学院, 山西 太原 030051

摘要 三维扫描获取待测对象点云时,不可避免地会出现噪声点和异常值,严重影响点云平面参数估计和平面拟合精度。随机抽样一致性(RANSAC)和主成分分析(PCA)结合的算法可以有效估计点云平面参数并拟合平面,具有一定鲁棒性,但RANSAC算法每次迭代时都需要判断以区分内点与外点,具有冗余性,对运行效率有一定影响,同时其估计结果也会受到迭代次数的影响。针对以上问题,提出了一种结合最小平方中值(LMedS)和PCA的算法拟合点云平面,并选取3种点云模型进行实验,分别为Semantic3D户外场景点云数据库、线激光传感器获取的零件表面点云及普林斯顿大学的室内数据集。实验结果表明,在十万数量级点云中,LMedS算法可以有效估计点云平面参数,与RANSAC算法相比,LMedS算法不仅可以有效估计平面模型,且运行速度有一定提高,耗时少,两者的精度相当,是一种具有较强鲁棒性和优势性的点云平面拟合算法。

关键词 图像处理; 点云; 随机抽样一致性; 主成分分析; 最小平方中值; 平面拟合

中图分类号 TP391

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP213208

Point Cloud Plane Fitting Algorithm Based on Least Square Median

Wang Yang, Wang Junyuan*, Du Wenhua, Duan Nengquan

School of Mechanical Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, Shanxi, China

Abstract When obtaining the point cloud of an object to be measured by three-dimensional scanning, noise points and outliers will inevitably appear, which will significantly affect the accuracy of point cloud plane parameter estimation and plane fitting. An algorithm that combines random sampling consensus (RANSAC) and principal component analysis (PCA) can effectively estimate point cloud plane parameters and fit the plane, with some degree of robustness. However, the RANSAC algorithm needs to judge in each iteration process to distinguish between inner and outer points, which introduces redundancy and affects operation efficiency. Furthermore, its estimation results will be affected by the number of iterations. To solve the above problems, an algorithm that combines least square median (LMedS) and PCA is proposed to fit the point cloud plane, and three point cloud models are selected for experiments: Semantic3D outdoor scene point cloud database, part surface point cloud obtained using a line laser sensor, and indoor dataset of Princeton University. The experimental results show that, in the 100000 order of magnitude point cloud, the LMedS algorithm can effectively estimate the plane parameters of point clouds. Compared with the RANSAC algorithm, the LMedS algorithm can effectively estimate a plane model, with increased running speed, in less time, and with the same accuracy. The proposed method is a point cloud plane fitting method with strong robustness and advantages.

Key words image processing; points cloud; random sample consensus; principal component analysis; least median of squares; plane fitting

1 引言

基于激光传感器的三维扫描技术,具备传感器体积小、测量速度快、与待测对象无接触、测量精度高等特点。激光扫描的方式可以快速获得被测对象表面的三维坐标数据,通过大量且快速采集对象空间点位置

信息,获得待测零件的三维数据点集合,构成点云。目前,三维点云已在逆向工程、文物保护、数字博物馆、城市建筑三维重建等领域得到广泛应用。

现实中许多对象都包含平面特征,例如建筑物墙面、道路、桥梁、电子产品及机械零部件的表面等。通过三维激光扫描获得物体的点云数据,经点云下采样、

收稿日期: 2021-12-13; 修回日期: 2021-12-19; 录用日期: 2022-01-05; 网络首发日期: 2022-01-17

基金项目: 国家自然科学基金(51905496)

通信作者: *wangjy@nuc.edu.cn

去噪、配准等处理后,提取出感兴趣的几何特征,可实现对现实物体的三维重建。平面特征是点云最基本的组成部分,对该特征进行提取、配准及拟合有着重要意义。在激光传感器进行三维扫描后,由于测量对象表面粗糙度、设备自身测量误差^[1]及传感器运动过程中的轻微振动,使得获取的点云包含噪声,且目标点云在拟合平面的过程中往往也存在一些难以剔除的异常数据点。噪声和异常点会严重影响点云平面拟合精度及平面参数值的估计,故在进行点云平面拟合时需要排除它们造成的干扰。文献[2]指出,可以将主成分分析方法(PCA)用到点云平面拟合中,且相较于传统的最小二乘拟合,PCA能够有效排除噪声点的影响,得到理想的拟合参数。文献[3]使用PCA对点云法向量进行估计。同时,文献[4-9]指出,在估计平面参数模型时,随机抽样一致性(RANSAC)具有重要意义,它具有一定的鲁棒性,能够在包含噪声的点云中筛选出最佳模型,对该模型进行估计,可得到最合适的平面参数。文献[10]将PCA和RANSAC结合,首先用RANSAC算法预先对点云进行处理,得到理想的模型,然后通过PCA估计该模型,从而得到最佳的拟合平面方程。

RANSAC算法可以事先定义内点数的比例,当内点数超过该比例时便可跳出循环,但是每次迭代过程需要判断以区分内点与外点^[9],对运行效率有一定影响。同时,RANSAC是一种非确定性算法,是在一定的概率下得出的合理结果,其迭代次数也会影响结果的准确性^[11],如果设置迭代次数过小,不能保证结果最优,可能会得到不准确的结果。

本文使用最小平方中值(LMedS)算法替代RANSAC来获取理想的点云平面模型,并结合PCA对该模型进行平面参数估计,最终得到拟合平面方程。并将LMedS和PCA对点云平面参数估计的结果与RANSAC和PCA的结果进行比较来验证LMedS算法的优越性。

2 基于LMedS与PCA的激光点云平面拟合

2.1 PCA平面拟合算法原理

PCA是一种使用广泛的数据降维算法。数据降维指将高维度数据保留一些重要的或感兴趣的特征,剔除噪声及不需要的特征,使获得的数据可更方便地进行后续处理,同时也可提高数据的处理速度。给定空间拟合平面方程为

$$Ax + By + Cz = D, \quad (1)$$

式中: $\mathbf{n}=(A, B, C)$ 为平面的单位法向量, $A^2 + B^2 + C^2 = 1$; D 为坐标原点到平面的距离。

对目标进行三维扫描后,得到点云数据 $P_i\{(x_i, y_i, z_i), i=1, 2, \dots, n\}$ 。为了得到最佳的拟合平面,应该在满足条件 $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ 的情况下,使

得所有数据点到该平面的距离尽可能小。由此转化为极值求解问题,采用拉格朗日乘数法,设定拉格朗日函数,构造成矩阵特征值和特征向量的求解问题,得到3个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 及对应的特征向量 ν_1, ν_2, ν_3 , 取最小特征值 $\lambda_{\min} = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ 对应的特征向量 ν , 将特征向量 ν 作为拟合平面的法向量 \mathbf{n} , 得到拟合平面参数 A, B, C 。利用点云 x, y, z 方向的均值求得参数 D :

$$D = A \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + B \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} + C \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n}. \quad (2)$$

经过上述推导,便得出了拟合平面的参数 A, B, C, D , 从而得到最佳的拟合平面方程。

2.2 LMedS算法原理

LMedS算法最初用在线性回归模型分析中,已知如下线性模型:

$$y_i = x_{i1}\theta_1 + x_{i2}\theta_2 + \dots + x_{ip}\theta_p + e_i, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

式中:误差 e_i 是均值为零、标准差为 σ 的正态分布。线性回归的目的就是在已知 $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}, y_i)$ 的情况下估计出 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^T$, 最小二乘取残差平方的最小值进行估计:

$$\text{minimize} \sum_{i=1}^n r_i^2, \quad (4)$$

式中: $r_i = y_i - x_{i1}\theta_1 - x_{i2}\theta_2 - \dots - x_{ip}\theta_p$ 。LMedS算法替换了式(4)的残差平方和 r_i^2 , 采用了一种随机参数估计的算法,其对噪声和异常数据具有很强的鲁棒性^[12-13]:

$$F = \text{minimize}_{\hat{\theta}} \text{med } r_i^2, \quad (5)$$

式中: $\text{med } r_i^2$ 为样本集中每个子集与其他所有样本残差平方的中值,选择所有子集对应残差平方中值最小的一个作为要估计的模型^[14]。

考虑初始化模型所需最小样本数为 n , 为了确保估计的可靠性,对迭代次数 K 有一定要求。用 ϵ 表示样本总集中数据的污染率,那么在一定概率 P 下,迭代次数 K 需要满足

$$P = 1 - [1 - (1 - \epsilon)^n]^K. \quad (6)$$

根据式(6),可靠估计的随机样本个数所要确保的迭代次数 K 由表1给出^[15]。需要注意的是,LMedS最高可对包含50%噪声的样本集进行估计,而不影响结

表1 $P=95\%$, 最小样本数为 n 的最小迭代次数 K
Table 1 $P=95\%$, minimum number of iterations K with minimum number of samples n

n	ϵ : contaminated data fraction				
	10%	20%	30%	40%	50%
2	2	3	5	7	11
3	2	4	7	12	22
5	4	8	17	38	95
10	7	27	105	494	3067

果的可靠性。换句话说,该算法的极限就是在包含 50% 噪声的数据中进行估计,高于该值会影响算法的鲁棒性。

2.3 所提算法流程

本研究结合 LMedS 与 PCA 实现点云平面拟合。利用 LMedS 算法在包含噪声与异常值的点云中获取较为理想的估计模型,然后用 PCA 对该模型进行平面拟合,进一步提高运行速度与拟合精度,其具体流程如下:

1) 已知样本集 data, 给定概率 P 、样本污染率 ϵ 及初始化模型所需的最小样本数 n , 由表 1 确定最小迭代次数 K , 以保证在抽样过程至少得到一个符合模型的子集。

2) 由于是拟合平面, 故此时应从样本集 data 中随机选取 3 个样本构成抽样集 S , 利用 PCA 估计初始化平面参数, 得到初始平面模型方程 $Ax + By + Cz = D$ 。

3) 计算样本集 data 中所有样本点到初始化模型平面的距离 d_i , 其表达式为

$$d_i = \frac{|Ax_i + By_i + Cz_i - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (7)$$

根据 LMedS 算法可知, 式(5)中残差 r_i 为此时的距离 d_i , 样本集中每个子集与其他所有样本残差平方的中值 Med 即为该距离 d_i 平方中值, 在每次迭代中记录得到的 Med。

4) 重复步骤 1)~3), 迭代 K 次, 从所有 Med 中选择其最小值所对应的平面参数作为最终拟合平面的参数, 得到最佳的拟合平面模型。

为了定量分析算法的拟合精度, 计算样本集 data 中所有样本点到平面模型距离的标准偏差 σ , 并以此作为平面拟合结果的评价指标:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{N - 1}} \quad (8)$$

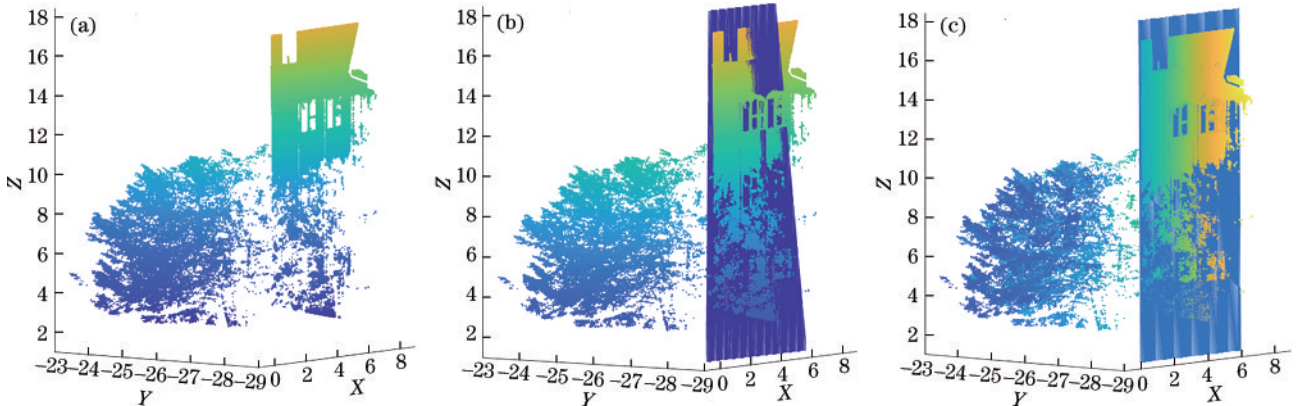


图 2 圣加仑大教堂墙面点云拟合效果。(a) 墙点云; (b) RANSAC 和 PCA 拟合; (c) LMedS 和 PCA 拟合
Fig. 2 Fitting effect of point cloud on wall of St. Gallen Cathedral. (a) Wall point cloud; (b) RANSAC and PCA fitting; (c) LMedS and PCA fitting

式中: $\bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n d_i$, N 为样本集 data 的所有样本个数。

3 实验及结果分析

3.1 实验环境及数据来源

激光点云形式多样, 不同的点云模型也具有不同的特征, 为验证所提算法的普适性及有效性, 选取不同类型噪声进行实验。点云平面拟合中的噪声可分成两类^[1]: 距离目标点云较远, 小而稀疏的散乱噪声点; 偏离目标点云且较大的块状噪声点。选取 3 组包含不同类型噪声的点云数据模型进行平面拟合实验, 给定概率 $P=95\%$ 、样本污染率 $\epsilon=20\%$ 、初始化模型所需的最小样本数 $n=3$ 。为了对比算法的耗时和精度, 将所提算法与 RANSAC 算法的平面拟合结果进行对比实验。实验在 MATLAB R2019a 环境下、Intel(R) Core (TM) i7-9700 CPU 上进行。

Semantic3D 户外场景点云数据库^[16] 提供了包含超过 40 亿个点的大型数据集, 涵盖一系列不同的自然场景: 建筑物、自然地形、景观等。从该数据集中选取圣加仑大教堂的一处墙面点云进行拟合, 数据包含大量树干所构成的噪声点, 如图 1 所示。图 2 为其拟合结果, 该树干所构成的噪声点属于偏离目标点云的较大

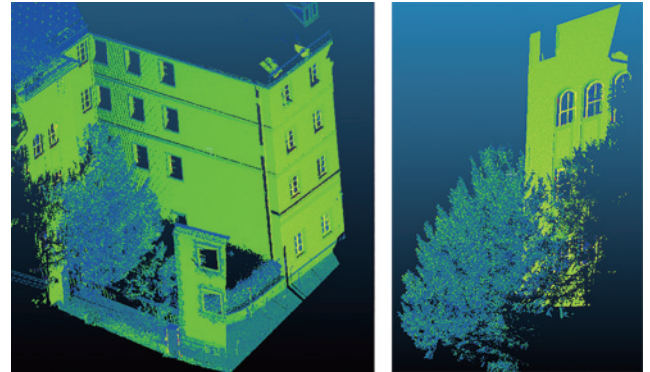


图 1 圣加仑大教堂一处墙面点云
Fig. 1 Point cloud on wall of St. Gallen Cathedral

块状噪声点,且该块状噪声点的体积很大。点个数为 185747,平面参数估计结果、标准偏差 σ 及程序运行时

间如表 2 所示,所有值取程序运行 50 次结果的平均值作为参考,下同。

表 2 圣加仑大教堂墙面点云拟合平面参数对比

Table 2 Comparison of plane parameters of point cloud fitting on wall of St. Gallen Cathedral

Method	Points	A	B	C	D	σ	Time /s
RANSAC	185747	0.0354	0.9993	0.0037	-27.7172	1.0377	1.32
LMedS	185747	0.0325	0.9960	0.0034	-27.7268	0.9398	0.90

通过图 3(a)的线激光传感器平台,获取图 3(b)的钣金零件表面点云,进行平面拟合实验,图 4 为其拟合效果。由图 4 可知,该点云包含两种噪声点,悬浮在目标点云附近的小体积块状噪声点及距离较远小而稀疏的散乱噪声点。数据点总数为 332520,拟合结果如表 3 所示。

RGB-D 数据集^[17]是一个包含 300 个普通家庭对象的大型数据集,该数据集是使用 Kinect 相机记录的,场景包括常见的室内环境:办公室工作区、会议室和厨房等区域。从该数据集中选取某卧室方桌进行实验(图 5),桌上包含杯子和帽子等杂物数据点。数据点总个数为 593334,平面拟合效果如图 6 所示,拟合结果如表 4 所示。由图 6 可知,杂物所构成的噪声属于偏离目标点云的较大块状噪声点,但相对于模型一的噪声来说,体积较小。

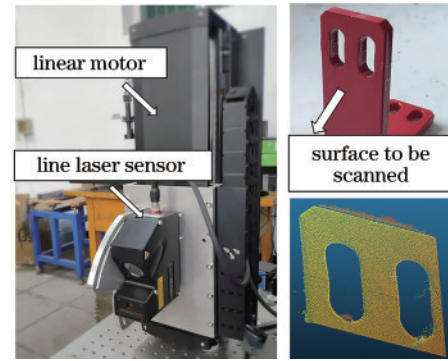


图 3 线激光传感器平台、钣金零件及点云数据。(a)线激光传感器平台;(b)钣金零件及点云数据

Fig. 3 Line laser sensor platform, sheet metal parts, and point cloud data. (a) Line laser sensor platform; (b) sheet metal parts and surface point cloud

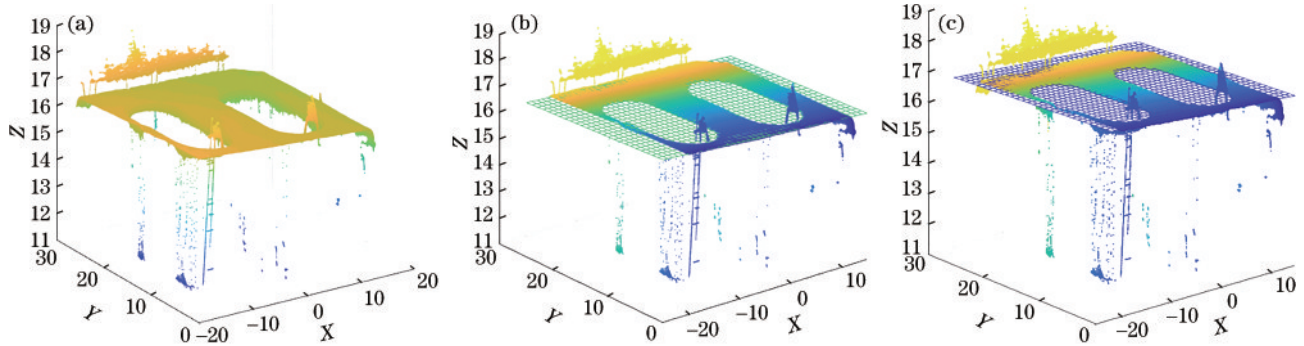


图 4 钣金件表面点云拟合效果。(a) 钣金件零件表面点云;(b) RANSAC 和 PCA 拟合;(c) LMedS 和 PCA 拟合

Fig. 4 Fitting effect of point cloud on sheet metal surface. (a) Sheet metal part surface point cloud; (b) RANSAC and PCA fitting; (c) LMedS and PCA fitting

表 3 钣金零件表面点云拟合平面参数对比

Table 3 Comparison of surface point cloud fitting plane parameters of sheet metal parts

Method	Points	A	B	C	D	σ	Time /s
RANSAC	332520	0.0150	0.0128	0.9998	16.8170	0.2877	2.21
LMedS	332520	0.0149	0.0129	0.9998	16.8281	0.3032	1.57

表 4 包含杯子和帽子等杂物的桌面点云拟合平面参数对比

Table 4 Comparison of fitting plane parameters of desktop point cloud including cups, hats, and other sundries

Method	Points	A	B	C	D	σ	Time /s
RANSAC	593334	0.2309	-0.0450	0.9719	1.3150	0.0282	4.40
LMedS	593334	0.2282	-0.0428	0.9726	1.3156	0.0343	2.81

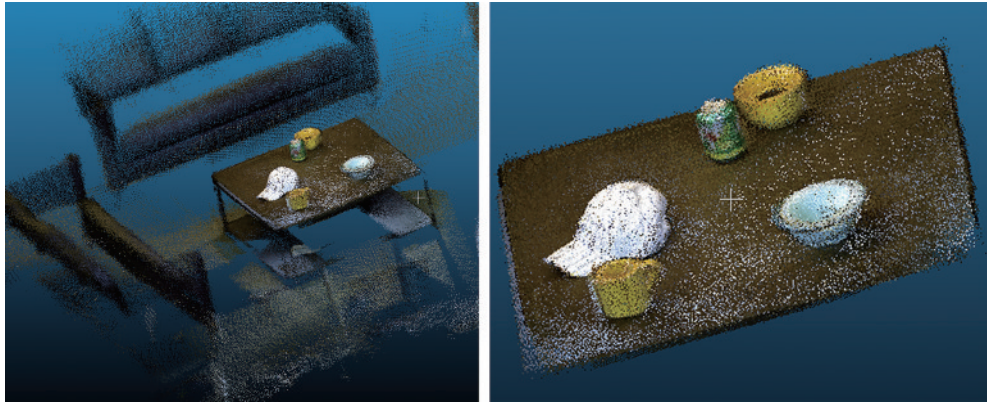


图 5 包含杯子和帽子等杂物的桌面点云

Fig. 5 Desktop point cloud containing sundries such as cups and hats

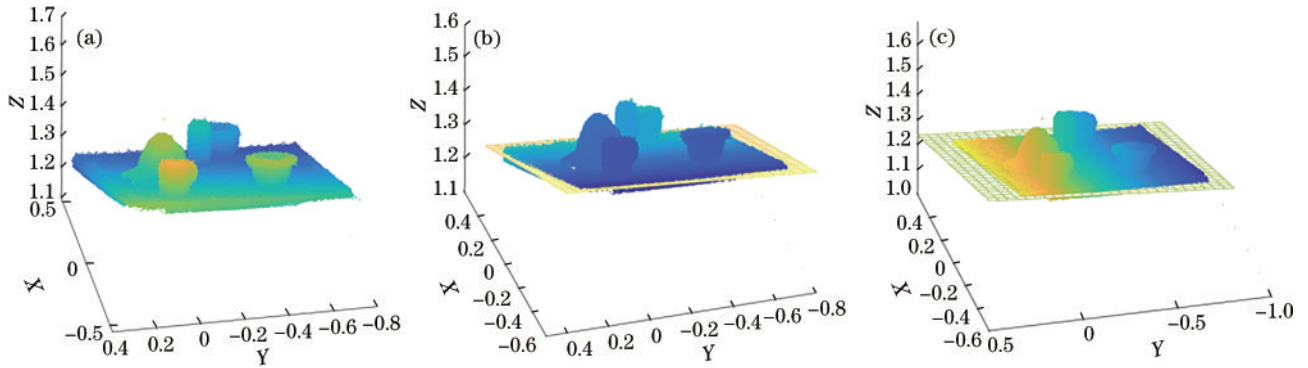


图 6 含杯子和帽子等杂物的桌面点云拟合效果。(a) 桌面表面点云;(b) RANSAC 拟合;(c) LMedS 拟合

Fig. 6 Fitting effect of desktop point cloud with sundries such as cups and hats. (a) Desktop point cloud; (b) RANSAC fitting; (c) LMedS fitting

3.2 结果分析

由图 2(b)、(c)可知,两种算法均排除了树干所构成的大体积块状噪声干扰,成功拟合平面;由图 4(b)、(c)可知,两种算法排除了小体积块状噪声和稀疏散乱

噪声的干扰,成功拟合平面;同样,由图 6(b)、(c)可知,两种算法均排除了帽子及杯子等杂物构成的小体积块状噪声的干扰,成功拟合平面。3 种情况下,两种算法运行时间及标准偏差 σ 如图 7 所示。

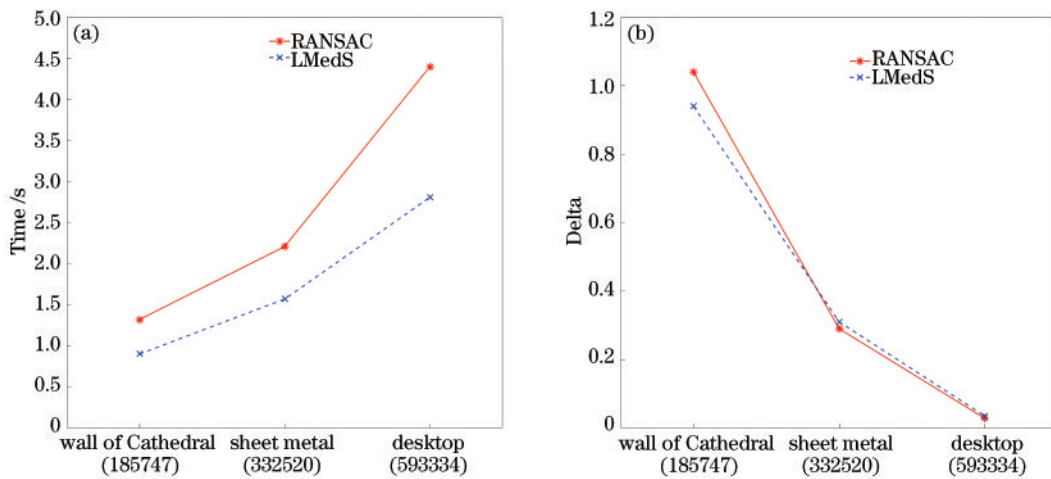


图 7 LMedS 和 RANSAC 拟合结果对比。(a) 两种算法的运行时间;(b) 两种算法的标准差

Fig. 7 Comparison of fitting results between LMedS and RANSAC. (a) Running time of two algorithms; (b) standard deviation of two algorithms

从表 2、表 3 及表 4 可知,LMedS 算法运行时间均小于 RANSAC 算法,同时,从图 7(a)明显可以看出,

随着点数量的增多,两种算法运行时间均有所增加,但 RANSAC 算法运行时间增加得更为显著,因此点云数

量级越高,所提算法优势更明显。

从图 7(b)可知,同一模型相同点数下的标准偏差相差不大,可知两种算法拟合的精度相当。点数量级较小的模型对应的标准偏差 σ 反而较大,这是模型噪声导致的。图 2 中点数为 185747 的墙面点云包含大体积块状噪声点,且噪声距离目标平面点云较远,这对点云平面拟合的影响较大,会一定程度降低拟合精度。图 4 中点数为 332520 的钣金零件表面点云包含很小体积的块状点云和许多分布较远的散乱稀疏噪声点,这对平面拟合也具有较大影响,但并没有模型 1 的噪声干扰强。图 6 包含杂物的桌面点云数量最多,有 593334 个点,但是标准偏差最小,虽然模型 3 包含了一定体积的块状噪声,

但其噪声距离目标平面点云较近,故对平面拟合的精度影响没有前两个模型噪声的干扰性强。由此可以推断,噪声的类型对点云平面有一定影响,但影响较小,噪声偏离目标平面点云的距离才是干扰平面拟合精度的主要因素,距离较大的一定程度降低拟合精度。

模型 1:在 RANSAC 程序运行过程中,50 次的程序运行中出现了 5 次未得到正确模型、算法失败的情况,成功率为 90%。原因在于 RANSAC 算法能否得到正确模型受迭代次数 K 及内点比例的影响,若迭代次数较小则会无法得到合理模型。而 LMedS 在运行过程中没有出现这种情况,而是出现了 2 次有一定误差的拟合结果,如图 8(b)、(c)所示。

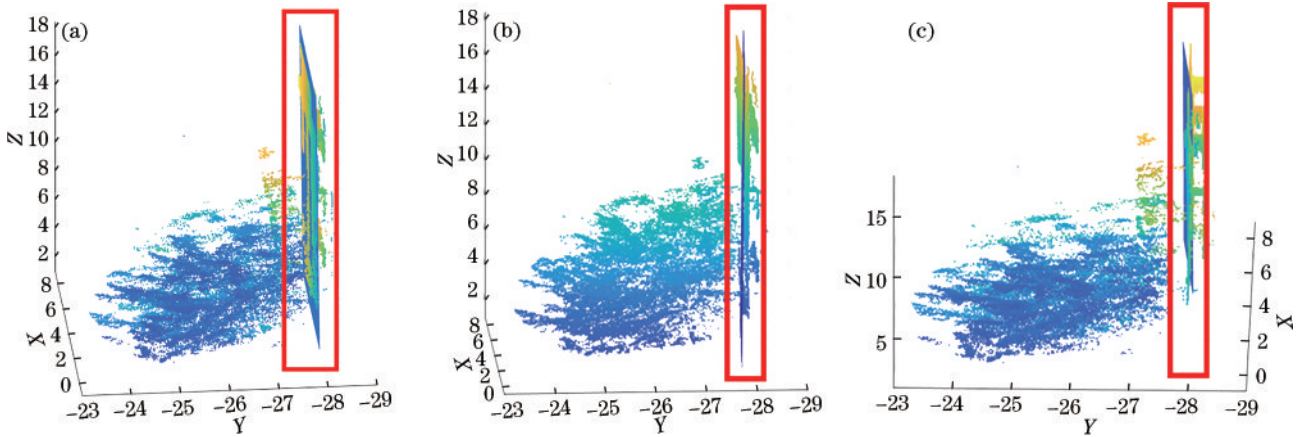


图 8 使用 LMedS 对墙面点云的正确拟合结果及有一定误差的拟合结果。(a) 正确的拟合平面;(b) (c) 大误差拟合平面
Fig. 8 Correct fitting results and fitting results with certain errors of wall point cloud using LMedS. (a) Correct fitting plane; (b) (c) fitting plane with large error

模型 2:在 RANSAC 程序运行过程中,50 次的程序运行中出现了 5 次未得到正确模型、算法失败的情况,成功率为 90%。LMedS 在运行过程中没有出现

这种情况,出现了 1 次有一定误差的拟合结果,如图 9(b)所示。

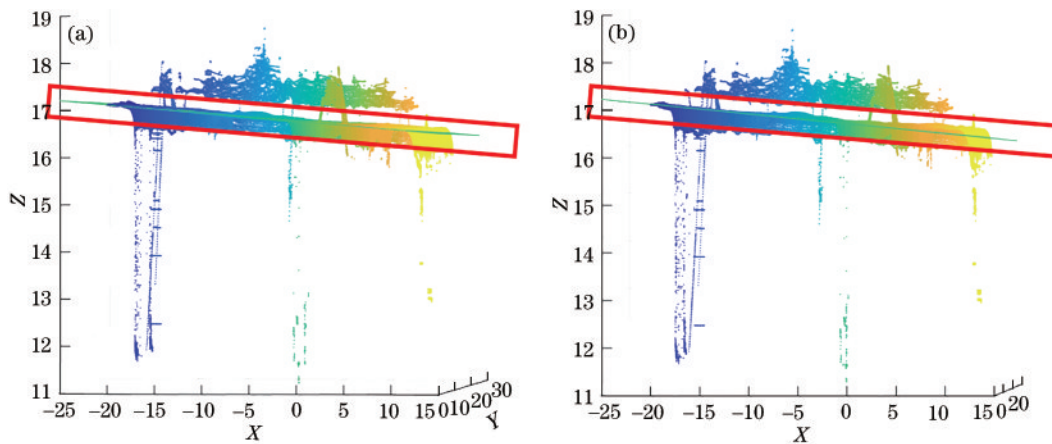


图 9 使用 LMedS 对钣金零件表面点云的正确拟合结果及有一定误差的拟合结果。(a) 正确的拟合平面;(b) 大误差拟合平面
Fig. 9 Correct fitting results and fitting results with certain errors of point cloud on surface of sheet metal parts using LMedS. (a) Correct fitting plane; (b) fitting plane with large error

模型 3:同样,在 RANSAC 程序运行过程中,50 次的程序运行中出现了 4 次未得到正确模型、算法失败的情况,成功率为 92%。LMedS 在运行过程中没有出

现这种情况,出现了 1 次有一定误差的拟合结果,如图 10(b)所示。

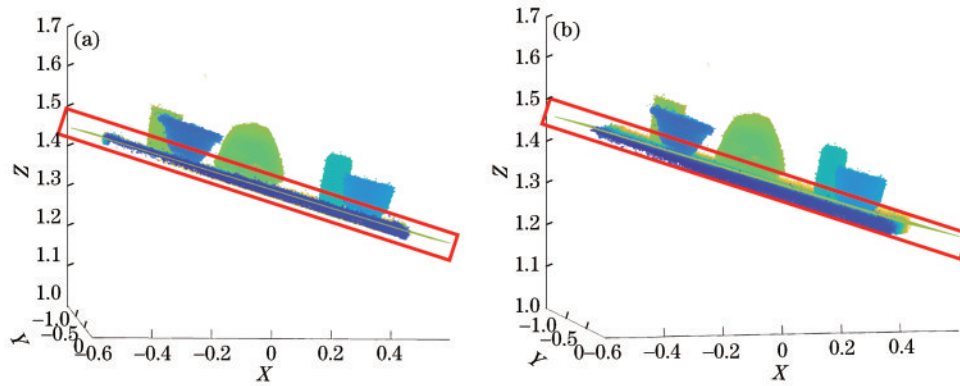


图 10 使用 LMedS 对桌面点云的正确拟合结果及有一定误差的拟合结果。(a) 正确的拟合平面;(b) 大误差拟合平面
Fig. 10 Correct fitting results and fitting results with certain errors of desktop point cloud using LMedS. (a) Correct fitting plane;
(b) fitting plane with large error

4 结 论

利用三维扫描技术获取待测对象点云时,不可避免地会出现噪声,对点云平面拟合造成严重影响和干扰。RANSAC 算法可以找到有效点云数据模型,并对该模型进行平面参数估计。但 RANSAC 算法在每次迭代过程需要进行判断以区分内点与外点,具有冗余性,对运行效率有一定影响,其估计结果也会受到迭代次数的影响。提出了一种结合 LMedS 和 PCA 的点云平面拟合算法,并通过 3 组包含不同类型噪声的点云模型实验验证了该算法的鲁棒性。所提算法能够排除不同类型噪声对平面拟合的干扰,精度也有所保证,不会像 RANSAC 算法一样出现失败无法得到模型的情况,且执行效率优于 RANSAC,是一种具有可行性和有效性的点云平面拟合算法。

参 考 文 献

- [1] 张建民, 陈富健, 龙佳乐. 基于图像处理的点云滤波算法[J]. 激光与光电子学进展, 2021, 58(6): 0610015.
Zhang J M, Chen F J, Long J L. Point cloud filtering algorithm based on image processing[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2021, 58(6): 0610015.
- [2] 浮丹丹, 周绍光, 徐洋, 等. 基于主成分分析的点云平面拟合技术研究[J]. 测绘工程, 2014, 23(4): 20-23.
Fu D D, Zhou S G, Xu Y, et al. Point cloud plane fitting technology based on principal component analysis[J]. Engineering of Surveying and Mapping, 2014, 23(4): 20-23.
- [3] 韩浩宇, 张元, 韩燮. 一种改进的激光点云滤波算法[J]. 激光与光电子学进展, 2021, 58(20): 2010001.
Han H Y, Zhang Y, Han X. Improved laser point cloud filtering algorithm[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2021, 58(20): 2010001.
- [4] 李孟迪, 蒋胜平, 王红平. 基于随机抽样一致性算法的稳健点云平面拟合方法[J]. 测绘科学, 2015, 40(1): 102-106.
Li M D, Jiang S P, Wang H P. A RANSAC-based stable plane fitting method of point clouds[J]. Science of Surveying and Mapping, 2015, 40(1): 102-106.
- [5] 苏云龙, 平雪良, 李楠. 基于 RANSAC 三维点云的平面提取算法[J]. 激光与红外, 2019, 49(6): 780-784.
Su Y L, Ping X L, Li N. A planar extraction algorithm based on RANSAC 3D point cloud[J]. Laser & Infrared, 2019, 49(6): 780-784.
- [6] 雷经发, 何玉, 张森, 等. 平面拟合算法抗干扰能力对比研究[J]. 安徽建筑大学学报, 2020, 28(4): 28-32.
Lei J F, He Y, Zhang M, et al. Comparative study of anti-interference capability of plane fitting algorithms[J]. Journal of Anhui Jianzhu University, 2020, 28(4): 28-32.
- [7] 周春霖, 朱合华, 李晓军. 随机抽样一致性平面拟合及其应用研究[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(7): 177-179, 182.
Zhou C L, Zhu H H, Li X J. Research and application of robust plane fitting algorithm with RANSAC[J]. Computer Engineering and Applications, 2011, 47(7): 177-179, 182.
- [8] 杨军建, 吴良才. 基于 RANSAC 算法的稳健点云平面拟合方法[J]. 北京测绘, 2016(2): 73-75, 79.
Yang J J, Wu L C. Robust plane fitting of point clouds based on RANSAC[J]. Beijing Surveying and Mapping, 2016(2): 73-75, 79.
- [9] 魏英姿, 刘晓莉. 基于随机抽取一致性的稳健点云平面拟合[J]. 北京工业大学学报, 2014, 40(3): 400-403.
Wei Y Z, Liu X L. Robust plane fitting of point clouds based on RANSAC[J]. Journal of Beijing University of Technology, 2014, 40(3): 400-403.
- [10] 童子良, 余学祥, 汪涛, 等. 一种新的鲁棒三维点云平面拟合方法[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2020, 43(12): 1684-1688.
Tong Z L, Yu X X, Wang T, et al. A new robust 3D point cloud plane fitting method[J]. Journal of Hefei University of Technology (Natural Science), 2020, 43(12): 1684-1688.
- [11] 杨琼楠, 马天力, 杨聪锟, 等. 基于优化采样的 RANSAC 图像匹配算法[J]. 激光与光电子学进展, 2020, 57(10): 101104.
Yang Q N, Ma T L, Yang C K, et al. RANSAC image matching algorithm based on optimized sampling[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(10): 101104.

- [12] Rousseeuw P J. Least Median of squares regression[J]. Journal of the American Statistical Association, 1984, 79 (388): 871-880.
- [13] Benoit L C, Ronan B. Robust kinematic constraint detection for motion data[C]//Proceedings of the 2006 {ACM} SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, {SCA} 2006, September 2-4, 2006, Vienna, Austria. Geneva: Eurographics Association, 2006: 281-290.
- [14] 陈向阳, 向云飞. 利用 LMedS 算法提取规则建筑物顶部面片[J]. 测绘通报, 2018(4): 121-124.
Chen X Y, Xiang Y F. Extraction of the building's top patch based on the rules of LMedS algorithm[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2018(4): 121-124.
- [15] Armenta L A H, Romero D R. Multiple harmonic source location using the least Median of squares method with the presence of outliers in high voltage electric power systems[J]. Electric Power Components and Systems, 2019, 47(14/15): 1375-1386.
- [16] Hackel T, Savinov N, Ladicky L, et al. semantic3d.net: a new large-scale point cloud classification benchmark[J]. ISPRS Annals of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, 2017, IV-1/W1: 91-98.
- [17] Lai K, Bo L F, Fox D. Unsupervised feature learning for 3D scene labeling[C]//2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation, May 31-June 7, 2014, Hong Kong, China. New York: IEEE Press, 2014: 3050-3057.