

激光与光电子学进展

改进的带限缩放角谱法在长距离衍射计算的应用

郑昕, 张玉莹, 戴深宇, 赵帅*

季华实验室光电科学与技术研究部, 广东 佛山 528200

摘要 针对角谱法在远距离衍射计算时的失真问题, 分析其原因为有效频谱成分减少和频谱混叠造成的计算误差。结合带限角谱法的频域采样特性, 对缩放角谱法进行了改进, 并应用于大尺寸方形长焦透镜、圆形轴锥透镜和平顶光束衍射光学元件的衍射场分布计算。结果表明, 相较于原始的带限角谱法和缩放角谱法, 改进算法获得的衍射场分辨率更高且不存在边缘失真现象, 在大尺寸口径、长距离、小衍射场精确计算方面具有重要的应用潜力。

关键词 衍射; 角谱法; 失真; 带限角谱法; 缩放角谱法

中图分类号 O436

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP223070

Application of Improved Band-Limited Scaling Angular Spectrum Method in Long-Distance Diffraction Calculation

Zheng Xin, Zhang Yuying, Dai Shenyu, Zhao Shuai*

Optoelectronics Science and Technology Research Department, Ji Hua Laboratory,

Foshan 528200, Guangdong, China

Abstract Angular spectrum method has distortion problem in the long-distance diffraction calculation because of the calculation error caused by the reduction of effective spectrum components and spectrum aliasing. Based on the frequency sampling characteristics of the band-limited angular spectrum method, an improved scaling angular spectrum method is proposed. Then, the method is applied to the diffraction field simulation of large-size square telephoto lenses, circular axicon lenses and diffractive optical elements. The results show that compared with the original band-limited angular spectrum method and the scaling angular spectrum method, the diffraction field obtained by the improved method has higher resolution and no edge distortion. Our research indicates that the improved method has important application potential in the precise calculation of large size, long distance and small diffraction fields.

Key words diffraction; angular spectrum method; distortion; band-limited angular spectrum method; scaling angular spectrum method

1 引言

衍射现象在光学系统中普遍存在, 自由传播的衍射过程相当于线性空不变系统的变换过程。经典衍射计算公式包括严格满足亥姆霍兹方程的角谱衍射公式、基尔霍夫公式、瑞利-索末菲衍射公式及其傍轴近似菲涅耳衍射公式, 这些公式均能表示为傅里叶变换的形式, 随着离散傅里叶变换(DFT)技术和快速傅里叶变换(FFT)技术的出现, 衍射的数值计算得到快速发展^[1-4]。

基于菲涅耳衍射积分公式的单次傅里叶变换算法

常被应用于傍轴衍射计算, 因为它仅采用一次傅里叶变换, 具有简单、运算速度快的特点, 但其观察面窗口大小和采样间隔与传输距离及入射光波长相关, 远距离传输时衍射场的精度较差。为提高采样间隔的控制能力, 陆续有多步菲涅耳法^[5]和移位菲涅耳法^[6]等被提出。角谱法是基于线性卷积经过至少两次傅里叶变换得到衍射场的方法, 由于它是瑞利-索末菲衍射公式的严格解, 理论上可用于近场和远场衍射计算, 且其计算窗口和采样间隔与传输距离无关, 应用范围更广。但是, 多项研究表明, 角谱法在计算长距离衍射时, 由于存在欠采样、有效频谱成分减少等问题, 易出现衍射失

收稿日期: 2022-11-16; 修回日期: 2023-01-05; 录用日期: 2023-01-17; 网络首发日期: 2023-02-07

基金项目: 国家重点研发计划(2021YFB3602600)

通信作者: *zs040148@163.com

真现象^[7-10]。此外,由于角谱法的观察面尺寸与入射面相同,当衍射场尺寸远小于观察面尺寸时,分辨率将显著下降,衍射场的精细结构将无法被分辨。

DFT 和角谱传递函数^[4,8]的计算窗口大小、采样数、采样间隔等参数是实现衍射场正确计算的重要因素。为解决角谱法长距离衍射失真和小衍射场分辨率降低的问题,带限角谱法^[9]、非均匀采样宽带角谱法^[10]、自适应采样角谱法^[11]、缩放角谱法^[12]等改进算法被提出,并取得了一定程度的进展。但是,目前对于大尺寸口径、长距离、小衍射场精确计算的研究还比较少,仿真实验中依然存在失真、精度低的问题。

通过角谱衍射计算失真分析,基于带限角谱传递函数的频率采样特性对缩放角谱法进行了改进,并对大尺寸方形口径长焦透镜的聚焦场分布、圆形口径轴锥镜的贝塞尔光束分布和衍射光学元件的平顶光束分布进行了模拟。结果表明,相较于原始的带限角谱法和缩放角谱法,改进方法在高分辨、无失真衍射场精确计算方面具有明显优势。

2 基本原理

2.1 角谱衍射计算的失真分析

根据衍射角谱传输理论^[1-2],衍射场是入射光场和自由空间脉冲响应函数的线性卷积,可通过初始角谱与传递函数的乘积进行逆 FFT 运算得到衍射场的数

值结果。但由于直接应用 FFT 执行的是循环卷积运算,所以当入射光场和衍射光场的尺寸相较于计算窗口足够小、且相邻采样周期影响可忽略时,循环卷积可与线性卷积等效^[12]。此外,当衍射传输距离较大时,若频谱采样间隔不变,高频减小将导致有效频谱成分降低,衍射场失真明显^[8-9]。

为避免远距离衍射失真现象,可通过零填充^[12]、频移插值^[13]等方法增加频谱成分。以一维矩形孔对平面波衍射为例,图 1 为使用不同衍射算法得到的结果,其中,入射光波长 $\lambda = 532 \text{ nm}$ 、矩形孔尺寸 $W = 1 \text{ mm}$ 、计算窗口尺寸 $L = 2 \text{ mm}$ 、空域采样间隔 $\Delta x = 2 \mu\text{m}$ 、衍射距离 $d = 100 \text{ mm}$ 。单次傅里叶变换菲涅耳衍射法是非涅耳衍射积分公式的数值算法,将其结果作为真值,定义函数 $\sigma = \frac{1}{K^2} \sum_m \sum_n^K |(I - I_{\text{ideal}})/(I + I_{\text{ideal}})| \times 100\%$ 来评价其他算法偏离真值的程度,其中: K 为采样数; I 为实际的衍射场分布; I_{ideal} 为真值。菲涅耳衍射法的结果如图 1(a) 所示,衍射场的空间分辨率为 $26.6 \mu\text{m}$ 。利用原始角谱法得到的结果如图 1(b) 所示,对应偏离真值的程度 $\sigma \approx 11.25\%$,空间分辨率为 $2 \mu\text{m}$ 。此时观察面衍射场与计算窗口尺寸相当,循环卷积与线性卷积不完全等效导致衍射场失真,因此,进一步利用零填充增大计算窗口尺寸至原来的 2 倍,增加采样数并对输出窗口进行裁剪,此时频率采样间隔减小,频谱成分增加,得到的结果如图 1(c) 所示,对应

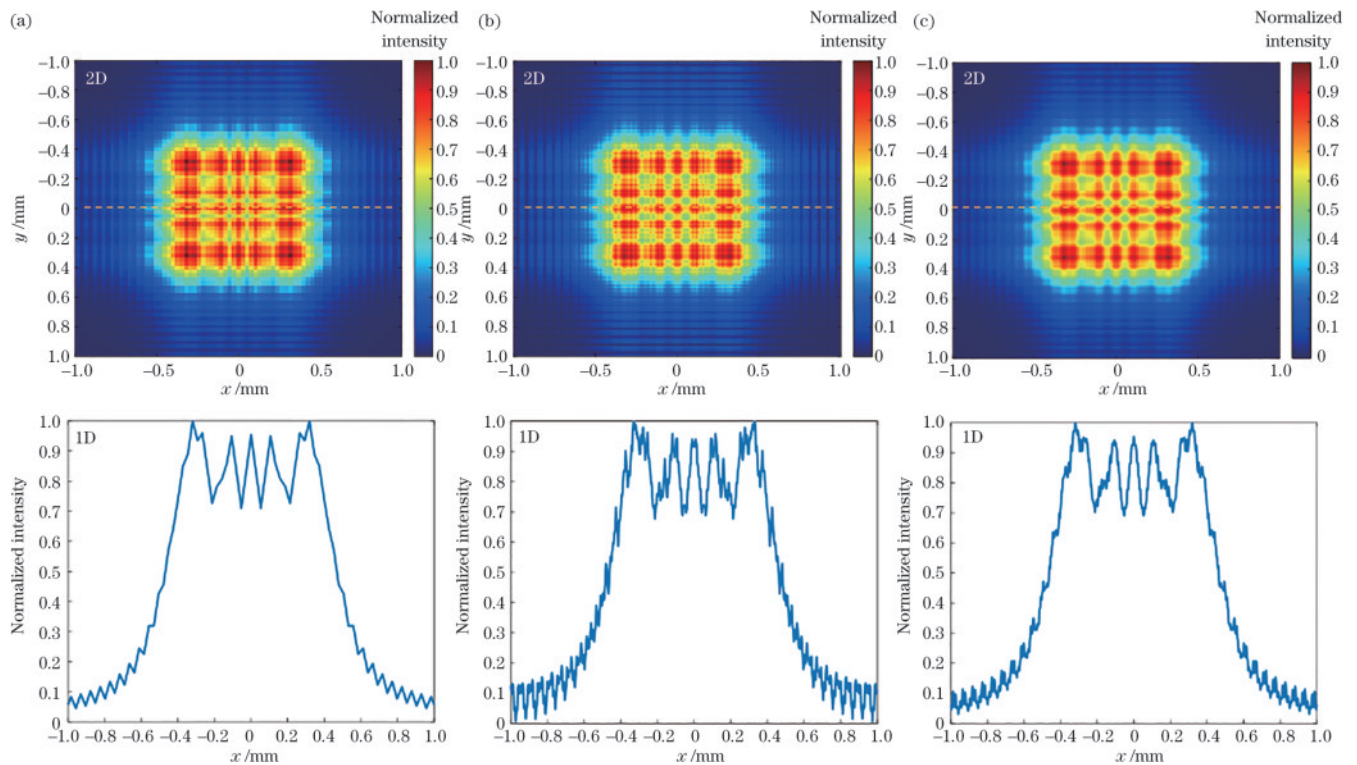


图 1 利用不同算法得到的矩形孔衍射场的二维和一维分布。(a) 单次傅里叶变换菲涅耳衍射法; (b) 原始角谱法; (c) 填零角谱法
Fig. 1 2D and 1D distributions of rectangular aperture diffraction field obtained by different algorithms. (a) Single Fourier transform Fresnel diffraction method; (b) original angle spectrum method; (c) zero-padding angular spectrum method

偏离真值的程度 $\sigma \approx 2.43\%$, 分辨率不变, 衍射场噪声得到明显抑制。

经过上述处理后, 衍射场噪声虽得到抑制但仍存在, 因此, 进一步采用带限角谱法^[9]消除计算误差。计算过程中角谱传递函数被限制在 $2f_{\text{limit}}$ 的有限带宽内, $f_{\text{limit}} = 1/\left[\lambda\sqrt{(2d\Delta f)^2 + 1}\right]$, 式中, $\Delta f = 1/2L$ 为空间频率间隔。需要注意的是, f_{limit} 不仅限制了角谱传递函数的频谱宽度, 也限制了通过衍射孔到达观察面的光波的空间频率。参考光波传输示意图[图 2(a)], 观察面可接收光波的最大空间频率 $f_{\text{max}} = (\sin \theta)/\lambda =$

$1/\left\{\lambda\sqrt{[2d/(L+W)]^2 + 1}\right\}$, 式中, θ 为光波传输方向的最大角度。如果 $f_{\text{limit}} < f_{\text{max}}$, 衍射传输过程将存在部分空间频率丢失的问题。从图 2(a)中可以看出, 当衍射孔尺寸 W 与计算窗口尺寸 L 相等时, $f_{\text{limit}} = f_{\text{max}}$; 若 $W < L$, $f_{\text{limit}} > f_{\text{max}}$ 。显然, 入射面和观察面计算窗口尺寸相等时, 总满足 $f_{\text{limit}} \geq f_{\text{max}}$ 的无频率丢失要求。基于此, 利用限制带宽的角谱法重新计算矩形孔的衍射结果[图 2(b)], 通过与理想衍射场(1D 图中虚线为理想分布)比较发现, 此时偏离真值的程度 σ 近似为零, 衍射场失真现象消失。

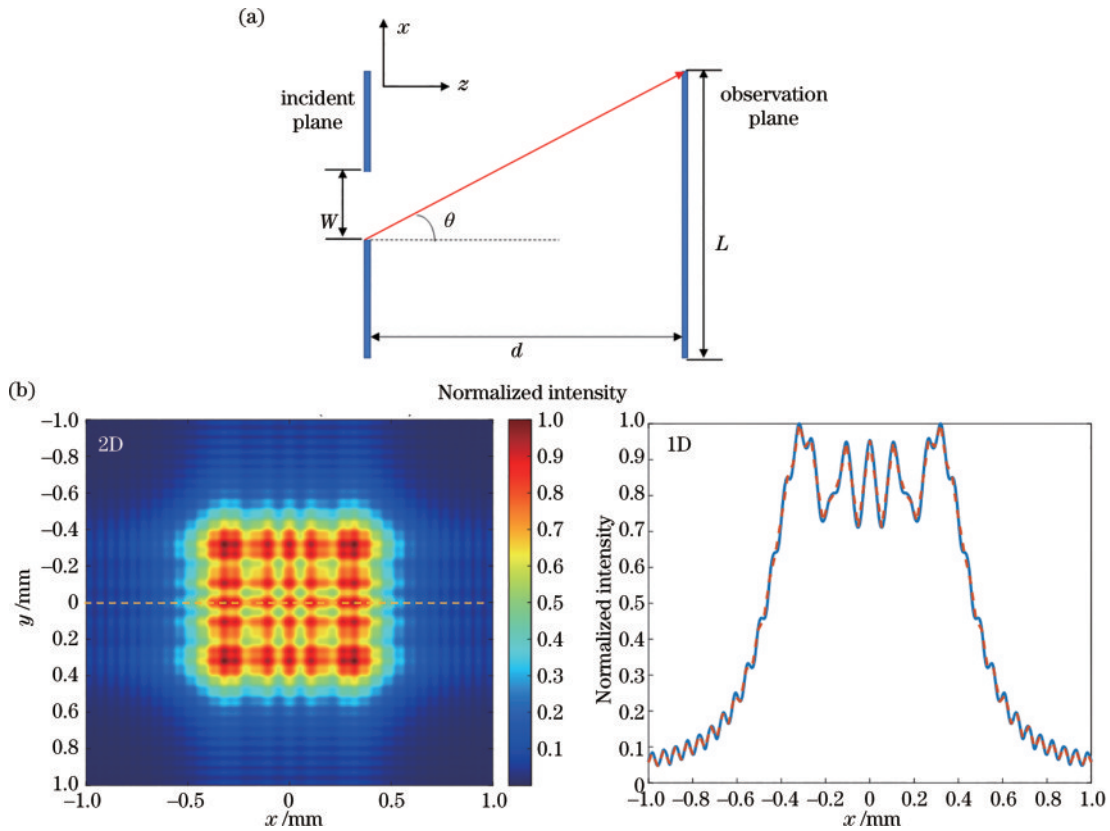


图 2 带限角谱法的光波传输原理及矩形孔衍射场分布。(a)光波传输示意图;(b)利用带限角谱法得到的矩形孔衍射场的二维和一维分布

Fig. 2 Wave propagation principle of band-limited angular spectrum method and diffraction field distributions of rectangular aperture. (a) Schematic diagram of wave propagation; (b) 2D and 1D distributions of rectangular aperture diffraction field obtained by band-limited angular spectrum method

但是, 当衍射距离和衍射孔尺寸都非常大时, 带限角谱法的应用将受到限制。以大尺寸方形口径的长焦透镜对平面波聚焦为例, 设入射光波长 $\lambda = 532 \text{ nm}$ 、口径尺寸 $W = 25 \text{ mm}$ 、计算窗口尺寸 $L = 50 \text{ mm}$ 、衍射传输距离即透镜焦距 $d = 1000 \text{ mm}$ 、空域采样间隔 $\Delta x = 8.3 \mu\text{m}$, 利用带限角谱法得到的结果如图 3(a)所示, 由于观察面衍射场尺寸远小于计算窗口, 衍射场占据的像素数过少, 使得分辨率降低, 衍射条纹不可分辨。为解决该问题, 利用文献[12]提出的缩放角谱法, 将观察面计算窗口尺寸 S 设置为 0.5 mm , 重新计算的

结果如图 3(b)所示, 此时观察面衍射场的空间分辨率从 $8.3 \mu\text{m}$ 提高至 $0.083 \mu\text{m}$, 增加了 2 个数量级, 各级衍射条纹清晰可辨。但利用该方法得到的衍射场在边缘处存在明显失真[图 3(b)1D 图中方框部分]。因此, 利用缩放角谱法对大尺寸口径、长距离、小衍射场的计算还需进一步修正。

2.2 改进的带限缩放角谱法

针对缩放角谱法在衍射场边缘处出现的失真现象, 结合带限角谱法的频带设置方法, 对缩放角谱法进行了改进。图 4(a)为入射面和衍射面尺寸相差较大时的角

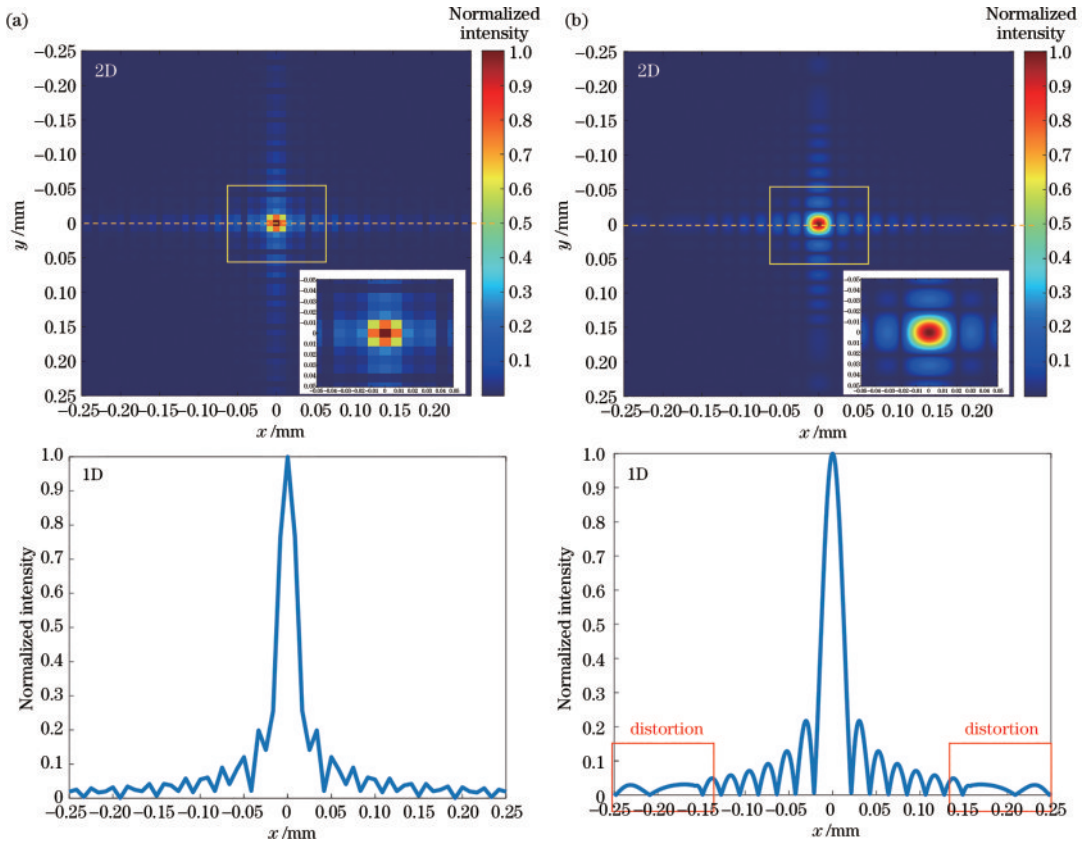


图 3 不同角谱法得到的长焦透镜焦点处衍射场的二维和一维分布。(a)带限角谱法;(b)缩放角谱法
 Fig. 3 2D and 1D distributions of diffraction field at the focus point for telephoto lenses obtained by different angular spectrum methods. (a) Band-limited angular spectrum method; (b) scaling angular spectrum method

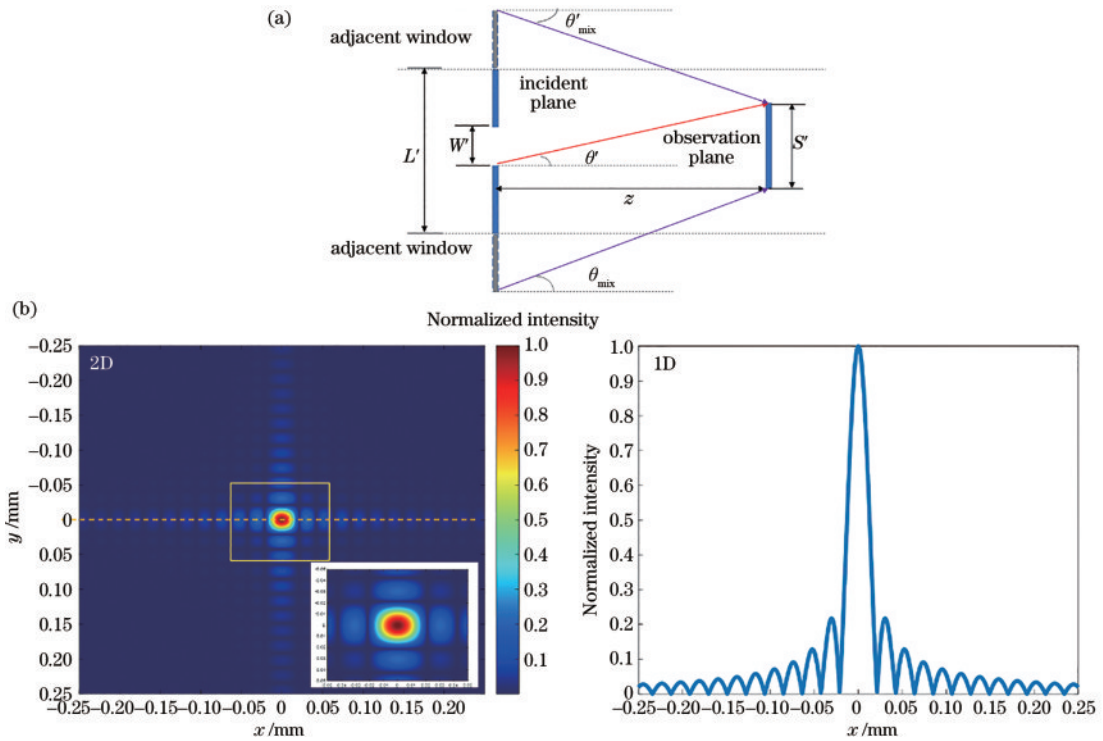


图 4 缩放角谱法计算示意图及改进的带限缩放角谱法得到的衍射场分布。(a)缩放角谱法计算示意图;(b)利用改进的带限缩放角谱法得到的长焦透镜焦点处衍射场的二维和一维分布
 Fig. 4 Schematic diagram of scaling angular spectrum calculation and diffraction field distributions obtained by band-limited scaling angular spectrum method. (a) Schematic diagram of scaling angular spectrum calculation; (b) 2D and 1D distributions of diffraction field at the focus point for telephoto lenses obtained by band-limited scaling angular spectrum method

谱衍射示意图,图中: L' 为入射面计算窗口尺寸; W' 为衍射孔尺寸; S' 为观察面尺寸; z 为衍射传输距离; θ' 为光波传输方向的最大角度,对应最大空间频率 $f'_{\max} = 1/\left\{\lambda\sqrt{\left[2z/(S'+W')\right]^2+1}\right\}$; θ'_{mix} 为影响观察面衍射场分布的来自相邻周期窗口的光波方向角度,对应混叠光谱频率 $f'_{\text{mix}} = 1/\left\{\lambda\sqrt{\left[z/(L'-W'-S')\right]^2+1}\right\}$ 。

为避免 $f'_{\max} > f'_{\text{mix}}$ 导致相邻采样周期窗口的混叠频谱进入观察面,要求入射面计算窗口尺寸 $L' \geq S' + W'$ 。缩放角谱法^[12]的频率间隔 $\Delta f' = 1/L'$,限制带宽 $f'_{\text{limit}} = 1/\left[\lambda\sqrt{(2z\Delta f')^2+1}\right]$,因此无论观察面尺寸与衍射孔的关系是 $S' \geq W'$ 还是 $S' < W'$,限制带宽始终满足 $f'_{\text{limit}} \geq f'_{\max}$ 的条件,这样就不存在混叠现象。但是,该算法并未考虑长距离衍射计算中频谱成分减少导致的失真问题,其频域采样间隔的设置不满足长距离衍射计算,会出现图 3(b)中的边缘失真现象。因此,考虑到带限角谱法的频域采样方法可以保持较多的有效频谱成分,根据其采样特性对缩放角谱法进行了改进。通过补零操作增大入射面计算窗口尺寸以减小频率间隔,使足够多的有效频谱成分得到传输,改进后的频域采样间隔被设置为缩放角谱法采样间隔的一半,即 $\Delta f' = 1/2L'$ 。

利用改进的带限缩放角谱法重新计算长焦透镜的聚焦场分布,结果如图 4(b)所示,可以看到,相较于带限角谱法[图 3(a)],在入射面空域采样间隔不变的情况下,改进算法得到的衍射场分辨率更高;相较于缩放角谱法[图 3(b)],由于有效频谱成分增加,衍射场边缘失真现象消失。综上,改进的带限缩放角谱法同时具有高分辨率和高精度的特点,适合大尺寸口径、长距离、小衍射场的精确计算。

3 仿真实验验证

以平面波入射大尺寸圆形口径轴锥透镜的衍射场计算为例,比较带限角谱法、缩放角谱法和改进算法的计算效果。图 5 为最大无衍射距离一半处贝塞尔光束的分布图,其中,轴锥透镜的底角 $\alpha = 1^\circ$ 、入射光波长 $\lambda = 532 \text{ nm}$ 、折射率 $n = 1.46$ 、口径尺寸 $D_{\text{axicon}} = 100 \text{ mm}$ 、计算窗口尺寸 $L_{\text{axicon}} = 200 \text{ mm}$ 、最大无衍射距离 $z_{\max} = 6228 \text{ mm}$ 、传输距离 $d_{\text{axicon}} = 3114 \text{ mm}$ 、入射面空域采样间隔 $\Delta x_{\text{axicon}} = 13.3 \mu\text{m}$ 、观察面尺寸 $S_{\text{axicon}} = 1 \text{ mm}$ 。从图中可以看出,与方形口径长焦透镜结果相似,利用带限角谱法计算得到的衍射场分辨率较低,各级衍射条纹不可分辨;利用缩放角谱法仅在中心区域得到无失真的衍射场分布;而利用改进的带限缩放角谱法获得的衍射场不仅具有足够高的分辨率,且在整个观察面均不失真。

进一步通过 Gerchberg-Saxton(G-S)算法设计可

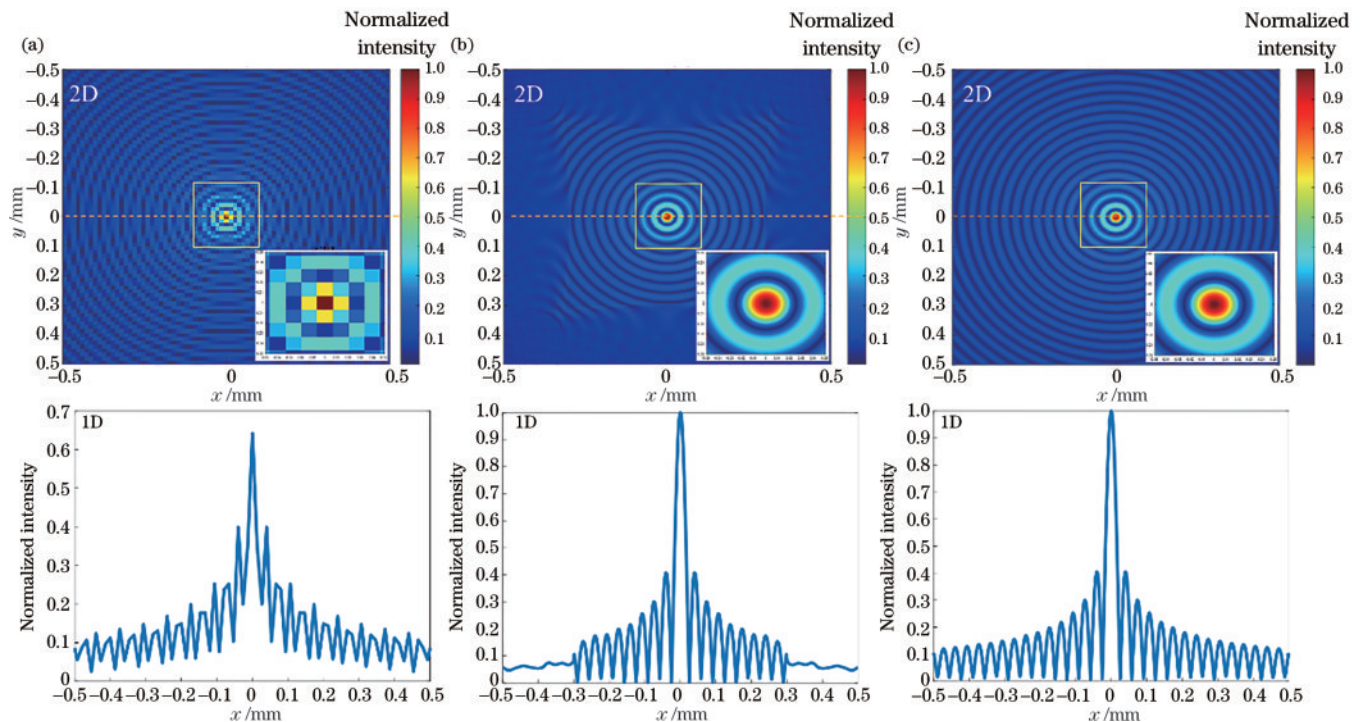


图 5 不同角谱法得到的大尺寸圆形轴锥透镜衍射场的二维和一维分布。(a)带限角谱法;(b)缩放角谱法;(c)改进的带限缩放角谱法
Fig. 5 2D and 1D distributions of diffraction field for the large-size circular axicon lenses obtained by different angular spectrum methods. (a) Band-limited angular spectrum method; (b) scaling angular spectrum method; (c) band-limited scaling angular spectrum method

输出平顶光束的具有复杂相位分布的衍射光学元件 (DOE)^[14-17], 其相位分布 (范围为 $[-\pi, \pi]$) 和工作原理如图 6(a) 所示。DOE 半径 $R_{\text{DOE}} = 50 \text{ mm}$, 使用束腰 $w_0 = 20 \text{ mm}$ 的高斯光束照射 DOE, 并搭配透镜 (焦距

$f = 1500 \text{ mm}$) 使用, 在焦面输出边长为 $100 \mu\text{m}$ 的方形平顶光束, 利用角谱算法得到的仿真结果如图 6(b)~(d) 所示。其中, 计算窗口尺寸 $L_{\text{DOE}} = 200 \text{ mm}$ 、入射面空域采样间隔 $\Delta x_{\text{DOE}} = 13.3 \mu\text{m}$ 、观察面尺寸 $S_{\text{DOE}} =$

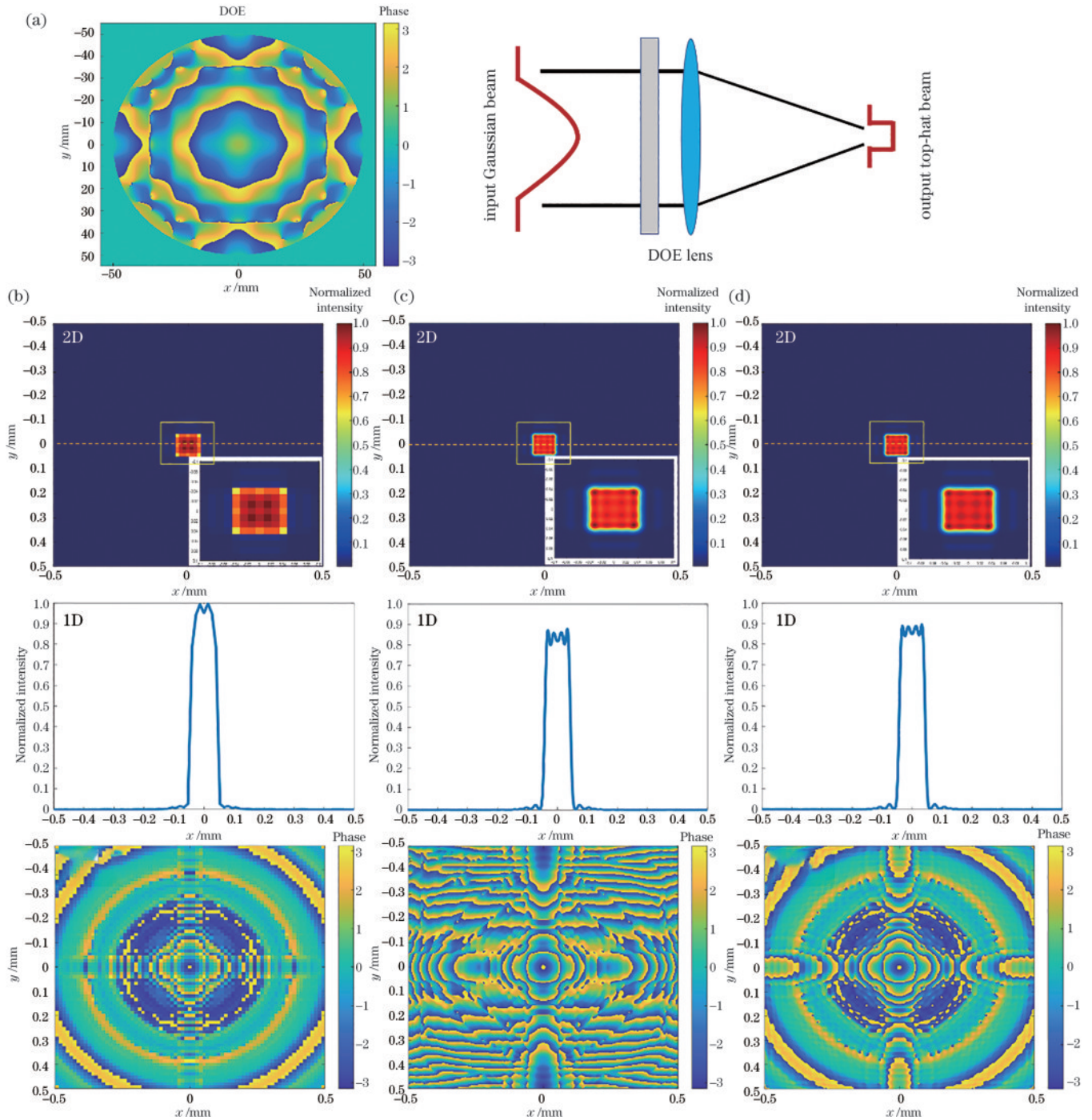


图 6 DOE 光束整形系统及不同算法得到的平顶光束分布。(a)大尺寸 DOE 的相位分布及平顶光束输出示意图;(b)带限角谱法得到的 DOE 衍射场的强度及相位分布;(c)缩放角谱法得到的 DOE 衍射场的强度及相位分布;(d)改进的带限缩放角谱法得到的 DOE 衍射场的强度及相位分布

Fig. 6 DOE beam shaping system and top-hat beams obtained by different methods. (a) Schematic diagram of the phase distribution and top-hat beam output of a large-size DOE; (b) intensity and phase distribution of the DOE diffraction field obtained by band-limited angular spectrum method; (c) intensity and phase distribution of the DOE diffraction field obtained by scaling angular spectrum method; (d) intensity and phase distribution of the DOE diffraction field obtained by band-limited scaling angular spectrum method

1 mm。可以看到,利用带限角谱法得到的衍射场分辨率依然较低,但缩放角谱法的计算结果不再有明显的边缘失真现象,且平顶光束的强度分布与改进算法的结果非常接近,这是由于 DOE 产生的平顶光束的尺寸远小于观察面尺寸,能量高度集中在中心区域,向四周扩散的衍射能量极低,因此在强度分布图中没有观察到明显的边缘失真现象。但是,通过比较衍射场相位发现,带限角谱法和改进算法具有相似分布特征,且后者的高分辨率使得相位细节得以被观测,而对于缩放角谱法,除中心区域外,其相位分布完全不同,说明边缘失真问题依然存在。综合前述仿真结果可知,改进算法不受口径形状、相位和衍射距离限制,可应用于复杂衍射场的精确计算。

4 结 论

对角谱衍射法计算误差来源进行了详细分析,结合带限角谱法频域采样特性对缩放角谱法进行了改进,保证了充足的有效频谱成分,并应用于大尺寸方形口径长焦透镜、圆形口径轴锥透镜和平顶光束衍射光学元件的衍射场计算。结果表明,改进算法得到的衍射场分辨率更高,不存在边缘失真现象,且该算法不受口径形状、相位和衍射距离限制,在大尺寸口径、长距离、小衍射场精确计算方面具有重要的应用潜力。

参 考 文 献

- [1] 古德曼. 傅里叶光学导论[M]. 秦克诚, 刘培森, 陈家璧, 等, 译. 3 版. 北京: 电子工业出版社, 2011.
Goodman J W. Introduction to Fourier optics[M]. Qin K C, Liu P S, Chen J B, et al., Transl. 3rd ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011.
- [2] 吕乃光. 傅里叶光学[M]. 2 版. 北京: 机械工业出版社, 2006.
Lü N G. Fourier optics[M]. 2nd ed. Beijing: China Machine Press, 2006.
- [3] Mendlovic D, Zalevsky Z, Konforti N. Computation considerations and fast algorithms for calculating the diffraction integral[J]. Journal of Modern Optics, 1997, 44(2): 407-414.
- [4] Shen F B, Wang A B. Fast-Fourier-transform based numerical integration method for the Rayleigh-Sommerfeld diffraction formula[J]. Applied Optics, 2006, 45(6): 1102-1110.
- [5] Wang D Y, Zhao J, Zhang F C, et al. High-fidelity numerical realization of multiple-step Fresnel propagation for the reconstruction of digital holograms[J]. Applied Optics, 2008, 47(19): D12-D20.
- [6] Muffoletto R P, Tyler J M, Tohline J E. Shifted Fresnel diffraction for computational holography[J]. Optics Express, 2007, 15(9): 5631-5640.
- [7] Voelz D G, Roggemann M C. Digital simulation of scalar optical diffraction: revisiting chirp function sampling criteria and consequences[J]. Applied Optics, 2009, 48(32): 6132-6142.
- [8] Wang F, Shimobaba T, Kakue T, et al. Controllable energy angular spectrum method[J]. Optics Communications, 2022, 520: 128506.
- [9] Matsushima K, Shimobaba T. Band-limited angular spectrum method for numerical simulation of free-space propagation in far and near fields[J]. Optics Express, 2009, 17(22): 19662-19673.
- [10] Kim Y H, Byun C W, Oh H, et al. Non-uniform sampling and wide range angular spectrum method[J]. Journal of Optics, 2014, 16(12): 125710.
- [11] Zhang W H, Zhang H, Jin G F. Adaptive-sampling angular spectrum method with full utilization of space-bandwidth product[J]. Optics Letters, 2020, 45(16): 4416-4419.
- [12] Xiao Y, Tang X H, Qin Y X, et al. Band-limited angular spectrum numerical propagation method with selective scaling of observation window size and sample number[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2012, 29(11): 2415-2420.
- [13] 缪正祥, 李重光, 张中恒. 基于角谱理论的频移插值法衍射计算[J]. 激光技术, 2014, 38(1): 87-90.
Miao Z X, Li C G, Zhang Z H. Diffraction computation with frequency shift interpolation based on theory of angular spectrum[J]. Laser Technology, 2014, 38(1): 87-90.
- [14] 李昕颖, 钱晓凡, 孟妮妮. 光束整形衍射光学元件的优化算法[J]. 光学学报, 2019, 39(11): 1105003.
Li X Y, Qian X F, Meng N N. Optimization algorithm of diffractive optical elements for beam shaping[J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(11): 1105003.
- [15] Huang G Q, Wu D X, Luo J W, et al. Generalizing the Gerchberg-Saxton algorithm for retrieving complex optical transmission matrices[J]. Photonics Research, 2021, 9(1): 34-42.
- [16] Shen C, Shen T, Chen Q, et al. Machine-learning-based high-speed lensless large-field holographic projection using double-sampling Fresnel diffraction method[J]. Chinese Optics Letters, 2022, 20(5): 050502.
- [17] Ancora D, Dominici L, Gianfrate A, et al. Speckle spatial correlations aiding optical transmission matrix retrieval: the smoothed Gerchberg-Saxton single-iteration algorithm[J]. Photonics Research, 2022, 10(10): 2349-2358.