

## 激光与光电子学进展

## 基于新疆南山实测大气相干长度和等晕角的大气折射率结构常数反演计算

曹玉玺<sup>1</sup>, 姚海峰<sup>2\*\*</sup>, 张恒<sup>1</sup>, 张雷<sup>1\*</sup>, 常帅<sup>3</sup>, 佟首峰<sup>3\*\*\*</sup>, 陶小可<sup>4</sup><sup>1</sup>长春理工大学光电工程学院, 吉林 长春 130022;<sup>2</sup>北京理工大学光电学院, 北京 100081;<sup>3</sup>长春理工大学空间光电技术国家地方联合工程研究中心, 吉林 长春 130022;<sup>4</sup>32215 部队

**摘要** 大气折射率结构常数  $C_n^2$  是反映湍流强度变化状况的重要大气参数。针对反演  $C_n^2$  时所需初始输入数据多、未运用单一类型数据反演的问题, 提出一种以整层大气相干长度  $r_0$  和整层大气等晕角  $\theta_0$  数据为输入反演  $C_n^2$  的新方法。基于广义的 Hufnagel-Valley (HV) 湍流模型, 推导出  $r_0$  和  $\theta_0$  之间的理论关系式, 以新疆南山实测的  $r_0$  和  $\theta_0$  数据为基础, 反演计算得到广义 HV 模型的七个参数进而计算出  $C_n^2$  廓线, 再将七个参数值代入推导出的  $r_0$ 、 $\theta_0$  理论关系式计算出单日  $\theta_0$  值。仿真计算结果表明, 拟合出的平均  $C_n^2$  廓线和单日  $C_n^2$  廓线, 其变化趋势与香河模型相比, 一致性较好, 吻合度较高; 单日计算  $\theta_0$  值与实测  $\theta_0$  值之间的日相关系数平均值达到了 81.95%, 最高达 87%。该结果验证了所提方法的可行性, 为研究  $C_n^2$  廓线的反演提供了参考。

**关键词** 大气光学; 大气湍流; 大气折射率结构常数; 大气相干长度; 等晕角

中图分类号 P427.1

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP222937

## Inversion Calculation of Atmospheric Refractive Index Structure Constant Based on Atmospheric Coherence Length and Isoplanatic Angle Measured in Nanshan, Xinjiang

Cao Yuxi<sup>1</sup>, Yao Haifeng<sup>2\*\*</sup>, Zhang Heng<sup>1</sup>, Zhang Lei<sup>1\*</sup>, Chang Shuai<sup>3</sup>, Tong Shoufeng<sup>3\*\*\*</sup>,  
Tao Xiaoke<sup>4</sup><sup>1</sup>School of Optoelectronic Engineering, Changchun University of Science and Technology,  
Changchun 130022, Jilin, China;<sup>2</sup>School of Optics and Photonics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;<sup>3</sup>National and Local Engineering Research Center of Space Optoelectronic Technology, Changchun University of  
Science and Technology, Changchun 130022, Jilin, China;<sup>4</sup>Army of 32215

**Abstract** The refractive index structure constant  $C_n^2$  is an important atmospheric parameter reflecting turbulence intensity. Herein, a new  $C_n^2$  inversion method is proposed based on the coherence length  $r_0$  and isoplanatic angle  $\theta_0$  data of the entire atmospheric layer to address the problem related to the fact that many initial input data are needed for inversion and inversion without single type data. Based on the generalized Hufnagel-Valley (HV) turbulence model, the theoretical relationship between  $r_0$  and  $\theta_0$  is deduced. Based on the measured data of  $r_0$  and  $\theta_0$  in Nanshan, Xinjiang, the seven parameters of the generalized HV model are obtained using inverse calculations followed by the determination of the  $C_n^2$  profile. These seven parameter values are substituted into the deduced theoretical relationship of  $r_0$  and  $\theta_0$  to calculate the value of  $\theta_0$  on any single day. The simulation results show that the variation trend of the fitted average  $C_n^2$  and single-day

收稿日期: 2022-10-31; 修回日期: 2022-11-10; 录用日期: 2022-11-23; 网络首发日期: 2023-01-04

基金项目: 国家自然科学基金(62105029)、博士后特别资助项目(2021TQ0035)、博士面上项目(2021M700415)、应用光学国家重点实验室资助项目(SKLA02022001A11)、吉林省教育厅科学技术研究项目(JJKH20220743KJ)、装备预先研究重点实验室基金(2021JCJQLB055016)

通信作者: \*zl1980@cust.edu.cn; \*\*custfeng@outlook.com; \*\*\*cust0888@163.com

$C_n^2$  profiles are in good agreement with the Xianghe model, and the coincidence degree is high. The average value of the daily correlation coefficient between the calculated and the measured  $\theta_0$  profiles reaches 81.95%, and the highest value is 87%. The results verify the feasibility of the proposed method and provide a reference for the inversion of the  $C_n^2$  profile.

**Key words** atmospheric optics; atmospheric turbulence; atmospheric refractive index structure constant; atmospheric coherence length; isoplanatic angle

## 1 引言

大气湍流制约着自由空间光通信的发展,湍流强度的变化引起大气折射率的随机起伏,破坏了光波的相干性,导致通信接收系统的信噪比降低、误码率上升、信道容量下降,影响通信质量<sup>[1-4]</sup>。大气湍流的强度变化特征通常由大气参数来表征<sup>[5]</sup>,常用的大气参数包括大气折射率结构常数  $C_n^2$ 、大气等晕角  $\theta_0$  和大气相干长度  $r_0$ 。 $C_n^2$  廓线可以反映不同垂直高度的大气湍流强度变化情况,除运用探空气球<sup>[6]</sup>、闪烁探测和测距(SCIDAR)<sup>[7]</sup>、多孔径闪烁传感器(MASS)<sup>[8]</sup>、雷达<sup>[9-11]</sup>等仪器对  $C_n^2$  廓线进行直接测量外,以大量气象数据或  $\theta_0$ 、不同高度的  $r_0$  数据为输入反演  $C_n^2$  廓线的方法也一直是科研人员研究的重点。Tyson 等<sup>[12]</sup>基于 Hufnagel-Valley(HV)模型,根据实时测量的  $\theta_0$  和  $r_0$  数据反演湍流参数的高空风速参数和地面  $C_n^2$ ,进而得到  $C_n^2$  廓线。程知等<sup>[13]</sup>优化了 Tyson 等的反演公式。近年来很多科研人员运用人工神经网络、支持向量机等机器学习方法基于气象数据或  $\theta_0$  和  $r_0$  数据对  $C_n^2$  廓线进行估算、预测;2016 年, Wang 等<sup>[14]</sup>以五个常规气象参数为输入,利用人工神经网络预测了夏威夷 Mauna Loa 附近海面一个月的  $C_n^2$  廓线;2020 年,陈小威等<sup>[15]</sup>基于温度脉动仪和 WXT520 型气象传感器测量的温度、风速风向、气压等六个气象参数数据,构建人工神经网络模型估算出了西北地区近地面的  $C_n^2$  廓线;2022 年,朱黎明等<sup>[16]</sup>利用温度、压强、相对湿度、风速、风速切变和温度切变等六个实测探空廓线数据,依据支持向量机估算出了沿海地区的  $C_n^2$  廓线。

目前大多数  $C_n^2$  廓线的反演、估算、预测方法,无论是以气象参数数据还是以  $\theta_0$  和不同高度的  $r_0$  数据为输入,都存在初始输入的数据量大、参数种类多等问题<sup>[17-18]</sup>,使反演过程的计算量大、计算复杂且无法从单一类型参数数据中获取反演  $C_n^2$  廓线的有用信息;此外,数据采集量大也增加了人力物力的投入。因此不管是从简化理论计算还是降低实际工作量出发,研究一种基于单一类型数据输入反演  $C_n^2$  廓线的方法都是很有必要的。

本文基于广义 HV 湍流模型推导出了  $r_0$ 、 $\theta_0$  的理论关系式,在二者关系式的基础上提出了反演  $C_n^2$  廓线的方法,然后利用新疆南山 12 月间气象条件较好的 16 组实测  $r_0$ 、 $\theta_0$  数据为输入,依据所提方法求出了广义 HV 模型的七个参数,进而得到了新疆南山的平均  $C_n^2$  廓线和日  $C_n^2$  廓线(以 2020 年 12 月 12 日、2020 年 12 月 14 日、2020 年 12 月 17 日为例),与地理纬度接近的香河湍流模型进行了对比;又通过  $\theta_0$ 、 $r_0$  的理论关系式计

算得到了该地域的 16 组  $\theta_0$  值(以 2020 年 12 月 12 日、2020 年 12 月 14 日、2020 年 12 月 17 日为例),与实测  $\theta_0$  值之间的相关性均超过了 80%。该研究方法简化了  $C_n^2$  廓线的反演方法,不仅为反演湍流廓线提供了一种新思路,还利用整层  $r_0$  和  $\theta_0$ ,发展了一种确定 HV 模型湍流廓线模型参数的方法,能够保证较高准确性,且所需输入数据少。该研究成果能够用于大气湍流光学效应的自适应校正参数选取等领域。

## 2 实验测量与理论分析

### 2.1 理论分析

$r_0$  和  $\theta_0$  都能表征传输路径的大气湍流强度的强弱变化情况, $r_0$  表示光波通过大气湍流传播后的衍射极限, $\theta_0$  表示信标光通过大气湍流传播后波前的角度相关性。二者都包含  $C_n^2$  的路径积分项,广义 HV 模型<sup>[18-19]</sup>及整层  $r_0$ <sup>[20]</sup>、整层  $\theta_0$ <sup>[21]</sup>的理论公式为

$$C_n^2(h) = a_1 h^c e^{-\frac{h}{b_1}} + a_2 e^{-\frac{h}{b_2}} + a_3 e^{-\frac{h}{b_3}}, \quad (1)$$

$$r_0 = \left[ 0.423 k^2 \int_0^\infty C_n^2(z) dz \right]^{-3/5}, \quad (2)$$

$$\theta_0 = \left[ 2.91 k^2 \int_0^\infty C_n^2(z) z^{5/3} dz \right]^{-3/5}, \quad (3)$$

式中: $a_1$ 、 $b_1$ 、 $c$  三者共同表征对流层顶及以上区域的湍流强度变化情况; $a_2$ 、 $b_2$  二者共同表征对流层范围的湍流强度变化情况; $a_3$ 、 $b_3$  二者组合在一起表征边界层湍流强度变化情况; $a_2$  表示对流层起始处的湍流强度; $a_3$  代表了近地面湍流变化情况; $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$  代表各湍流层随高度增加而衰减的快慢; $k = 2\pi/\lambda$ ,其中  $k$  是波数, $\lambda$  是波长; $z$  为传输路径; $h$  为高度。

为确定三者之间的关系,将式(1)分别代入式(2)、式(3),求得  $r_0$ 、 $\theta_0$  的展开式分别为

$$r_0^{-5/3} \lambda^2 = 0.423 \times (2\pi)^2 \left( a_1 \times \int_0^\infty z^c e^{-\frac{z}{b_1}} dz + a_2 \times \int_0^\infty e^{-\frac{z}{b_2}} dz + a_3 \int_0^\infty e^{-\frac{z}{b_3}} dz \right), \quad (4)$$

$$\theta_0^{-5/3} \lambda^2 = 2.91 \times (2\pi)^2 \left( a_1 \times \int_0^\infty z^{c+\frac{5}{3}} e^{-\frac{z}{b_1}} dz + a_2 \times \int_0^\infty z^{\frac{5}{3}} e^{-\frac{z}{b_2}} dz + a_3 \int_0^\infty z^{\frac{5}{3}} e^{-\frac{z}{b_3}} dz \right), \quad (5)$$

运用式(6)对式(4)、式(5)进行化简,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t} dt, \quad (6)$$

式中,  $\Gamma(z)$  为 Gamma 函数<sup>[22]</sup>, 化简结果为

$$r_0^{-5/3} \lambda^2 = 0.423 \times (2\pi)^2 [a_1 b_1^{(c+1)} \Gamma(c+1) + a_2 b_2 + a_3 b_3], \quad (7)$$

$$\theta_0^{-5/3} \lambda^2 = 2.91 \times (2\pi)^2 [a_1 b_1^{(c+8/3)} \Gamma(c+8/3) + a_2 b_2^{8/3} \Gamma(8/3) + a_3 b_3^{8/3} \Gamma(8/3)]. \quad (8)$$

联立式(7)、式(8)得:

$$\frac{\theta_0^{-5/3}}{r_0^{-5/3}} = \frac{2.91 \times [a_1 b_1^{(c+8/3)} \Gamma(c+8/3) + a_2 b_2^{8/3} \Gamma(8/3) + a_3 b_3^{8/3} \Gamma(8/3)]}{0.423 \times [a_1 b_1^{(c+1)} \Gamma(c+1) + a_2 b_2 + a_3 b_3]}. \quad (9)$$

由式(9)可知, 整层  $r_0$ <sup>[20]</sup> 和整层  $\theta_0$  之间存在一定关系。将式(9)变形为

$$\theta_0 = M r_0,$$

$$M = \left\{ \frac{2.91 \times [a_1 b_1^{(c+8/3)} \Gamma(c+8/3) + a_2 b_2^{8/3} \Gamma(8/3) + a_3 b_3^{8/3} \Gamma(8/3)]}{0.423 \times [a_1 b_1^{(c+1)} \Gamma(c+1) + a_2 b_2 + a_3 b_3]} \right\}^{-3/5}. \quad (10)$$

可知, 只要确定  $a_1, c, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$  七个参数的值, 不仅可以由式(1)确定  $C_n^2$  廓线, 还可通过式(10)由  $r_0$  求解出  $\theta_0$ 。因此提出求解七个参数的方法, 如下式所示:

$$\begin{cases} R_i = \{0.423 \times k^2 [a_1 b_1^{(c+1)} \Gamma(c+1) + a_2 b_2 + a_3 b_3]\}^{-3/5} \\ \theta_i = \{2.91 \times k^2 [a_1 b_1^{(c+8/3)} \Gamma(c+8/3) + a_2 b_2^{8/3} \Gamma(8/3) + a_3 b_3^{8/3} \Gamma(8/3)]\}^{-3/5} \\ |R_i - R| \leq G \\ \theta_i \in [M_{\min} R_i, M_{\max} R_i] \end{cases}, \quad (11)$$

式中:  $R$  代表实测  $r_0$  数据的平均值, 当  $R = \bar{r}_0$  时实测  $r_0$  数据方差值最小;  $R_i$  是仿真计算得到的第  $i$  个  $R$  值, 二者越接近越好, 接近程度由人为设定的精确度  $G$  控制;  $\theta_i$  是计算得到的第  $i$  个与输入实测  $r_0$  数据同时段的  $\theta_0$  数据代表值, 该值与  $R_i$  的关系满足式(10), 因此可将其作为边界条件; 比例因子  $M$  根据实测地区  $r_0$  与  $\theta_0$  数据平均值的比值来确定, 即  $M = \bar{\theta}_0 / \bar{r}_0$ , 而对于仿真计算来说, 有时会出现计算值与结果接近而又不相等的情况, 这将会导致计算结果输出时发生错误, 而将比例因子  $M$  控制在一个合理范围内对计算结果进行筛选, 可以很好地避免该问题, 因此将比例因子  $M$  的上下限  $M_{\max}, M_{\min}$  依实际情况在比例因子  $M$  附近波动选取。计算的具体流程图如图 1 所示。

确定比例因子  $M$  的取值范围和精确度  $G$  后, 再输入  $a_1, c, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$  七个参数范围, 即可由式(11)仿真得出七个参数值, 因此如何确定七个参数的范围是关键, 后文会结合具体实例详细说明。式(11)极大地减少了反演湍流廓线参数时所需的初始数据个数, 无需大量的气象数据作为输入, 避免了数据采集、处理的繁琐性, 在实际工程应用中具有更广泛的适用性。

### 2.2 实验测试

为验证上述理论方法的可行性, 2020 年 12 月, 利用整层大气相干长度测量仪(DIMM)和等晕角测量仪在新疆南山进行了实验测试。DIMM 和等晕角测量仪都是以空中的恒星为信标, 分别采用差分像运动法与星

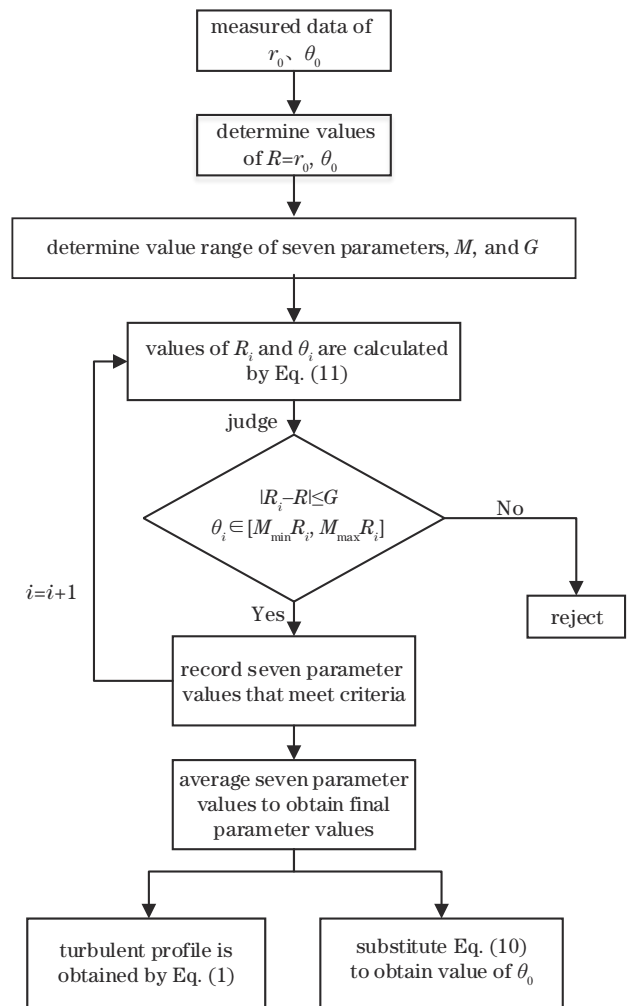


图 1 具体计算方法流程图

Fig. 1 Flow chart of specific calculation method

光闪烁法进行测量, 即恒星发出的平面波经湍流大气传输后其波前产生畸变, 波前畸变使光波的传播方向和能量发生改变, 在成像靶面上表现为恒星像的位置和光强随大气湍流的影响而变化, 通过测量其位置和光强变化的统计量进而求得  $r_0$  和  $\theta_0$  值, 具体测量方法如下。

DIMM 测量  $r_0$  时, 通过计算成像于 CCD 相机靶面

的恒星图像的横向、纵向位置方差,代入下式计算得到  $r_0$  的值:

$$r_0 = \left[ \frac{2\lambda^2(0.358D^{-1/3} - 0.242d^{-1/3})}{\sigma_l^2 + \sigma_r^2} \right]^{3/5}, \quad (12)$$

式中:  $\lambda=500 \text{ nm}$ , 为探测波长;  $D=100 \text{ mm}$ , 为 DIMM

的子瞳直径;  $d=200 \text{ mm}$ , 为两子瞳间距;  $\sigma_l^2$  为纵向位置方差;  $\sigma_r^2$  为横向位置方差。

等晕角测量仪测量  $\theta_0$  时,关键技术是利用三环变迹镜拟合加权函数  $W(z) = Cz^{5/3}$ <sup>[23]</sup>,三环变迹镜是圆对称的孔径,其实物图及结构图见图 2,结构尺寸见表 1。

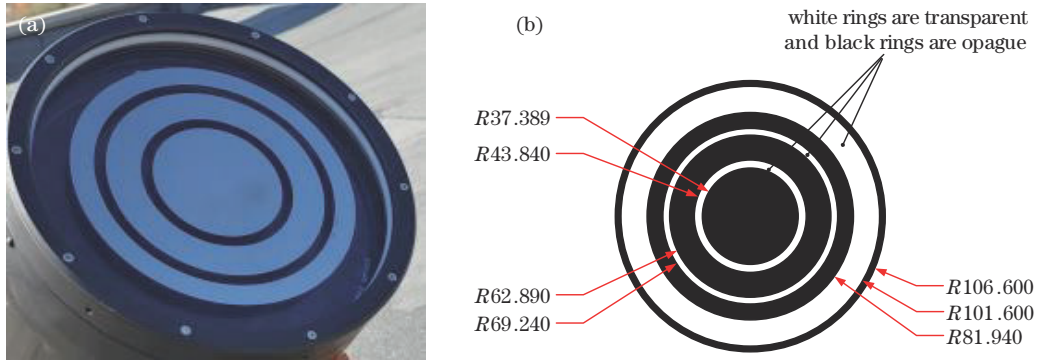


图 2 三环变迹镜。(a)实物图;(b)结构图

Fig. 2 Three-ring apodizing mirror. (a) Physical picture; (b) structural drawing

表 1 三环变迹镜亮环尺寸

Table 1 Bright ring size of three-ring apodizing mirror

Type of ring	Inner/Outer radius /mm
Inner	37.389/43.840
Middle	62.890/69.240
Outer	81.940/101.600

三环变迹镜加权函数  $W(z)$  的表达式为

$$W(z) = \int_{\kappa_{\min}}^{\kappa_{\max}} |d\rho\rho J_0(\kappa\rho)P(\kappa\rho)|^2 \kappa^{-8/3} \sin^2\left[\frac{\kappa^2 z}{2k}\right] d\kappa, \quad (13)$$

式中:  $\rho$  为半径;  $J_0$  为零阶 Bessel 函数;  $z$  为传播距离;  $k$  为波数,  $k=2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  是波长;  $\kappa$  为空间波数,  $\kappa_{\max}=2\pi/l_0$ ,  $\kappa_{\min}=2\pi/L_0$ ,  $l_0$ 、 $L_0$  分别是大气湍流内尺度和外尺度;  $P(\kappa\rho)$  为透过率函数,其形式为

$$P(\kappa\rho) = \begin{cases} 1, & R_1 \leq \rho \leq R_2, R_3 \leq \rho \leq R_4, R_5 \leq \rho \leq R_6 \\ 0, & 0 \leq \rho \leq R_1, R_2 \leq \rho \leq R_3, R_4 \leq \rho \leq R_5 \end{cases}, \quad (14)$$

式中,  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$ 、 $R_4$ 、 $R_5$ 、 $R_6$  分别是三环变迹镜由内而外的圆环半径。天顶角为  $0^\circ$  时,拟合计算  $C$  时选取参数为波长  $\lambda=500 \text{ nm}$ 、 $l_0=0.005 \text{ m}$ 、 $L_0=10 \text{ m}$ ,<sup>[23]</sup>经拟合得到  $C=8.847 \times 10^{-17} \text{ m}^4$ 。将拟合得到的加权函数  $W(z) = Cz^{5/3}$  与星光强度起伏归一化方差  $\sigma_s^2(0)$  联立:

$$\begin{cases} \sigma_s^2(0) = 4(2\pi)^4 0.033k^2 A^{-2} \int_0^\infty C_n^2(z)W(z)dz \\ W(z) = Cz^{5/3} \end{cases}, \quad (15)$$

式中:  $A=0.0156 \text{ m}^2$ , 为三环变迹镜的透光面积;  $C$  为三环变迹镜的拟合系数。将式(15)、式(3)联立可得  $\theta_0$  的计算公式为

$$\theta_0 = 12.9A^{-6/5} C^{3/5} [\sigma_s^2(0)]^{-3/5}. \quad (16)$$

由式(16)可知,  $\theta_0$  的求解与波长无关,当恒星光波通过湍流大气传输产生的畸变波前经三环变迹镜的调制被光学接收系统接收,光学接收系统如图 3 所示,最终会聚于 CCD 相机靶面,形成星点像,通过测量星点像的光强,计算其归一化光强起伏方差  $\sigma_s^2(0)$ ,代入式(16)即可求出  $\theta_0$  的值。

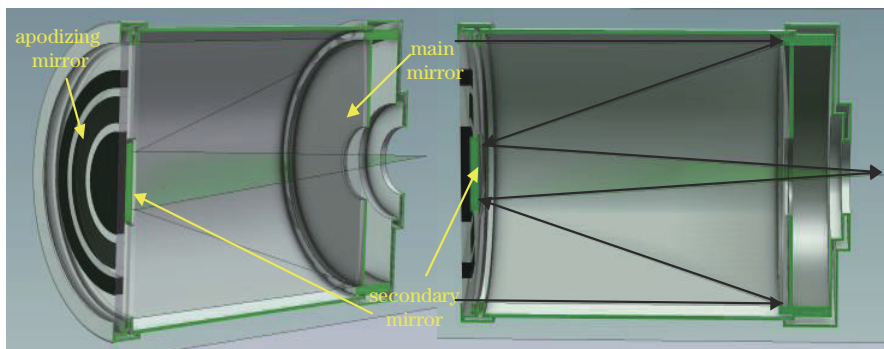


图 3 光学接收系统结构图

Fig. 3 Structure diagram of optical receiving system

### 2.3 理论公式与仿真方法的验证

为验证式(7)、式(8)的正确性,选取HV-5/7、HV-10/10、HV-15/12模型,将其代入式(7)、式(8)计算出 $r_0$ 和 $\theta_0$ ,参数及计算结果如表2所示。HV-5/7、HV-10/10、HV-15/12模型的 $r_0$ 分别为5、10、15 cm, $\theta_0$ 分别为7、10、12  $\mu\text{rad}$ 。将计算结果与各模型的 $r_0$ 和 $\theta_0$ 对比,由式(17)依次求出其相对误差, $r_0$ 的相对误差分别为-0.79%、3.37%、-1.23%, $\theta_0$ 的相对误差分别为-1.38%、1.69%、-0.85%;相对误差的绝对值都小于4%,证明了理论公式的正确性。

$$E_{\text{relative}} = (V_{\text{calculated}} - V_{\text{model}}) / V_{\text{model}} \times 100\% \quad (17)$$

式中: $E_{\text{relative}}$ 为相对误差; $V_{\text{calculated}}$ 为计算值; $V_{\text{model}}$ 为模型值。

为验证该仿真方法的可行性,且考虑到实验地点

在新疆南山,因此选取地理纬度较接近的香河作对比,对已有的香河模型<sup>[24]</sup>进行仿真验证,其表达式为

$$C_n^2(h) = 2.3 \times 10^{-52} h^{10} \exp\left(\frac{-h}{1000}\right) + 4.1 \times 10^{-16} \exp\left(\frac{-h}{2300}\right) + 1.0 \times 10^{-17} \exp\left(\frac{-h}{520}\right) \quad (18)$$

仿真时七个参数值的范围选取是关键,合理的选值范围能在保证正确性的前提下降低计算量,七个参数中 $a_2$ 表示对流层起始处的湍流强度, $a_3$ 代表了近地面湍流变化情况,由物理含义可确定其大致范围为 $a_2 \in [10^{-18}, 10^{-14}]$ 、 $a_3 \in [10^{-17}, 10^{-13}]$ <sup>[17]</sup>;剩余五个参数无法通过物理含义确定其取值范围,对已有的HV模型及香河、兴隆模型进行统计分析以确定其取值范围,相关模型参数见表3。

表2 HV模型参数及 $r_0$ 、 $\theta_0$ 值

Table 2 Values of HV model parameters,  $r_0$ , and  $\theta_0$

Model	$a_1$	$c$	$b_1$	$a_2$	$b_2$	$a_3$	$b_3$	$r_0/\text{cm}$	$\theta_0/\mu\text{rad}$
HV-5/7	$3.59 \times 10^{-53}$	10	1000	$2.7 \times 10^{-16}$	1500	$1.7 \times 10^{-14}$	100	4.9607	6.9032
HV-10/10	$2 \times 10^{-53}$	10	1000	$9 \times 10^{-17}$	1500	$4.5 \times 10^{-15}$	100	10.3366	10.1686
HV-15/12	$1.54 \times 10^{-53}$	10	1000	$7 \times 10^{-17}$	1500	$2 \times 10^{-15}$	100	14.8158	11.8978

表3 常见HV模型及香河、兴隆模型参数

Table 3 Parameters of common HV model, Xianghe model, and Xinglong model

Parameter	$a_1$	$c$	$b_1$	$a_2$	$b_2$	$a_3$	$b_3$	Model
	$2.3 \times 10^{-52}$	10	1000	$4.1 \times 10^{-16}$	2300	$1 \times 10^{-17}$	520	Xianghe
	$9.68 \times 10^{-52}$	10	990.1	$8.1 \times 10^{-18}$	2800	$3 \times 10^{-15}$	812	Xinglong
Value	$3.59 \times 10^{-53}$	10	1000	$2.7 \times 10^{-16}$	1500	$1.7 \times 10^{-14}$	100	HV-5/7
	$2 \times 10^{-53}$	10	1000	$9 \times 10^{-17}$	1500	$4.5 \times 10^{-15}$	100	HV-10/10
	$1.54 \times 10^{-53}$	10	1000	$7 \times 10^{-17}$	1500	$2 \times 10^{-15}$	100	HV-15/12

由表3可知, $a_1$ 、 $c$ 、 $b_1$ 、 $a_2$ 、 $b_2$ 、 $a_3$ 、 $b_3$ 七个参数的统计平均值依次为 $2.54 \times 10^{-52}$ 、10、998.02、 $1.70 \times 10^{-16}$ 、1920、 $5.30 \times 10^{-15}$ 、326.4; $a_1$ 的范围大约为 $[10^{-53}, 10^{-51}]$ ; $a_2$ 的范围大约为 $[10^{-17}, 10^{-15}]$ ; $a_3$ 的范围大约为 $[10^{-17}, 10^{-13}]$ ,考虑到香河模型的 $a_3 = 1 \times 10^{-17}$ ,统计平均值为 $5.30 \times 10^{-15}$ ,因此最终将其范围确定为 $[10^{-18}, 10^{-15}]$ ; $c$ 的统计平均值为10,将其范围上下波动取值为 $[8, 12]$ ,同理, $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$ 在参考香河模型自身的参数

值与统计平均值的基础下,对参数进行上下波动取值,最终确定取值范围如表4中所示。为使其具有较高的精确度,设定 $G=0.00010$ ;由于香河模型计算出的 $r_0=5.6817$  cm、 $\theta_0=2.3240$   $\mu\text{rad}$ ,因为香河模型是长期统计的结果,因此 $R$ 的取值选为 $R=r_0=5.6817$  cm。比例因子 $M$ 由 $r_0$ 与 $\theta_0$ 的比值确定, $M_{\text{max}}$ 、 $M_{\text{min}}$ 在比例因子 $M$ 附近波动选取,因此 $M$ 的取值为 $[0.40903, 0.40905]$ 。

表4 参数取值范围

Table 4 Value range of parameters

Parameter	$a_1$	$c$	$b_1$	$a_2$	$b_2$	$a_3$	$b_3$
Value range	$[10^{-53}, 10^{-51}]$	$[8, 12]$	$[800, 1200]$	$[10^{-17}, 10^{-15}]$	$[1800, 3000]$	$[10^{-18}, 10^{-15}]$	$[300, 1000]$

计算得到的香河模型表达式为

$$C_n^2(h) = 2.3 \times 10^{-52} h^{10} \exp\left(\frac{-h}{1000}\right) + 4.1 \times 10^{-16} \exp\left(\frac{-h}{2300}\right) + 1.0 \times 10^{-17} \exp\left(\frac{-h}{523.3}\right) \quad (19)$$

对比式(18)、式(19)可知,仿真的参数仅 $b_3$ 项有微小

差异,仿真方法的可行性得到了验证。

### 3 分析与讨论

将测量的 $r_0$ 、 $\theta_0$ 数据进行整理,基于提出的反演 $C_n^2$ 廓线方法计算得到了测量期间南山的平均 $C_n^2$ 廓线(Average)及单日 $C_n^2$ 廓线(以2020年12月12日、2020年12月14日、2020年12月17日为例)。仿真时,

选取的参数范围如表 5 所示,七个参数的范围选取综合考虑了新疆地区的  $C_n^2$  廓线变化情况<sup>[24]</sup>与香河模型的  $C_n^2$  廓线变化情况,新疆南山与香河纬度较为接近,  $a_1, c, b_1$  的取值范围与表 4 保持一致;由文献[24]可知,新疆阿勒泰及库尔勒的近地面湍流强度在  $10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$  左右且随高度变化衰减很快,5~30 km 范围内的湍流强度在  $[10^{-18}, 10^{-16}]$  内变化,其湍流强度递减程度无法准确估算;为使仿真计算范围更贴近真

实情况,将表 4 中  $a_2$  范围扩大为  $[10^{-18}, 10^{-15}]$ ,  $b_2$  范围也扩大为  $[1500, 3000]$ ,  $a_3$  范围改变为  $[10^{-17}, 10^{-14}]$ ,  $b_3$  的范围缩小为  $[200, 800]$  以贴合其衰减程度的变化;  $R$  与  $M$  的数值及范围的确定在上述方法的基础上根据实测当天的  $r_0$  和  $\theta_0$  数据决定,具体参数范围如表 5 所示。

求得平均  $C_n^2$  廓线及单日  $C_n^2$  廓线的七个参数值如表 6 所示。

表 5  $C_n^2$  廓线仿真的相关参数  
Table 5 Relevant parameters of  $C_n^2$  profile simulation

Parameter	Range	Parameter	Range/Value
$a_1$	$[10^{-53}, 10^{-51}]$	$b_2$	$[1500, 3000]$
$c$	$[8, 12]$	$a_3$	$[10^{-17}, 10^{-14}]$
$b_1$	$[800, 1200]$	$b_3$	$[200, 800]$
$a_2$	$[10^{-18}, 10^{-15}]$	$G$	0.0001
$M(\text{Average})$	$[0.41625, 0.41630]$	$R/\text{cm}(\text{Average})$	6.3313
$M(2020-12-12)$	$[0.45440, 0.45450]$	$R/\text{cm}(2020-12-12)$	4.9984
$M(2020-12-14)$	$[0.45740, 0.45780]$	$R/\text{cm}(2020-12-14)$	6.5638
$M(2020-12-17)$	$[0.46970, 0.46980]$	$R/\text{cm}(2020-12-17)$	6.9843

表 6 参数仿真结果  
Table 6 Results of parameter simulation

Parameter	$a_1$	$c$	$b_1$	$a_2$	$b_2$	$a_3$	$b_3$	Model
Value	$7.10 \times 10^{-52}$	10	900.00	$2.61 \times 10^{-16}$	2500.00	$1.10 \times 10^{-15}$	250.00	Average
	$6.73 \times 10^{-52}$	10	933.33	$3.74 \times 10^{-16}$	2200.00	$1.64 \times 10^{-15}$	350.00	2020-12-12
	$4.68 \times 10^{-52}$	10	943.51	$1.83 \times 10^{-16}$	2131.10	$1.02 \times 10^{-15}$	414.14	2020-12-14
	$1.30 \times 10^{-52}$	10	1000.00	$1.41 \times 10^{-16}$	2700.00	$1.21 \times 10^{-15}$	340.00	2020-12-17

将表 6 中的参数值代入式(1)后,相应的  $C_n^2$  廓线表达式分别为

$$C_n^2(h) = 7.10 \times 10^{-52} h^{10} \exp\left(\frac{-h}{900.00}\right) + 2.61 \times 10^{-16} \exp\left(\frac{-h}{2500.00}\right) + 1.10 \times 10^{-15} \exp\left(\frac{-h}{250.00}\right) \quad (\text{Average}), \quad (20)$$

$$C_n^2(h) = 6.73 \times 10^{-52} h^{10} \exp\left(\frac{-h}{933.33}\right) + 3.74 \times 10^{-16} \exp\left(\frac{-h}{2200.00}\right) + 1.64 \times 10^{-15} \exp\left(\frac{-h}{350.00}\right) \quad (2020-12-12), \quad (21)$$

$$C_n^2(h) = 4.68 \times 10^{-52} h^{10} \exp\left(\frac{-h}{943.51}\right) + 1.83 \times 10^{-16} \exp\left(\frac{-h}{2131.10}\right) + 1.02 \times 10^{-15} \exp\left(\frac{-h}{414.14}\right) \quad (2020-12-14), \quad (22)$$

$$C_n^2(h) = 1.30 \times 10^{-52} h^{10} \exp\left(\frac{-h}{1000.00}\right) + 1.41 \times 10^{-16} \exp\left(\frac{-h}{2700.00}\right) + 1.21 \times 10^{-15} \exp\left(\frac{-h}{340.00}\right) \quad (2020-12-17). \quad (23)$$

图 4 是仿真的南山日  $C_n^2$  廓线(以 2020 年 12 月 12 日、2020 年 12 月 14 日、2020 年 12 月 17 日为例)、平均  $C_n^2$  廓线(Average)与香河模型的对比。由图可知,仿真模型的整体变化趋势与香河模型相似,在 5 km 和 10 km 处都出现了极小值和极大值,符合 HV 湍流模型的变化规律。从图中还可看出,总体上平均湍流廓线更加贴合香河模型,原因可能是数据平均的结果,平均后的数据更加符合南山的长期湍流强度变化情况,南山与香河在纬度上较为接近,但海拔高度不同,二者的湍流强度变化情况既有相似性,细节上又有不同,近地面处单日  $C_n^2$  廓线、平均  $C_n^2$  廓线与香河模型的变化趋势存在差异,从  $a_3$  项可明显看出南山的近地面湍流要强于香河,应该是受到了近地面风速、地面温湿度等条件的影响,体现了近地面湍流强度在不同地区随不同气候条件的变化而变化;此外,图 4(a)~4(c)的单日  $C_n^2$  廓

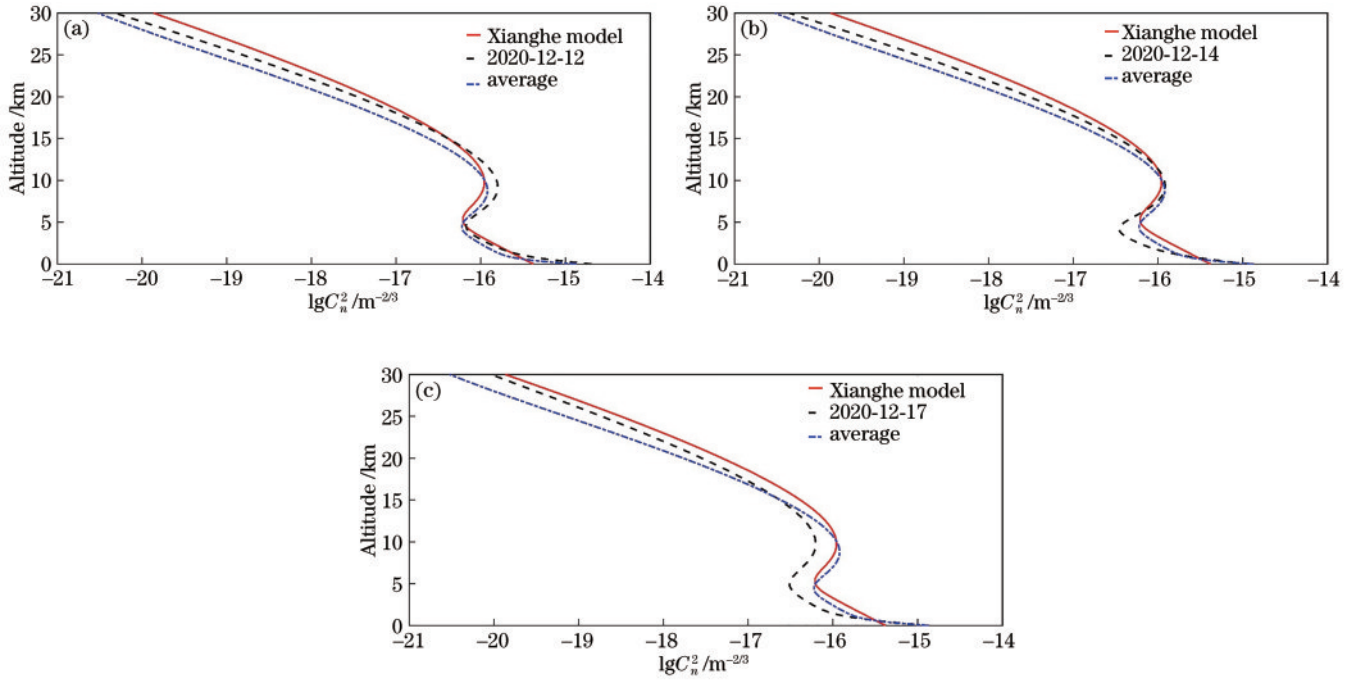


图 4 湍流模型对比。(a)2020 年 12 月 12 日、(b)2020 年 12 月 14 日、(c)2020 年 12 月 17 日的单日湍流模型与香河模型、平均模型的对比  
 Fig. 4 Comparison of turbulence models. Comparison of single day turbulence model, Xianghe model, and average model on (a) 2020-12-12; (b) 2020-12-14; (c) 2020-12-17

线主要在 5 km 和 10 km 处与平均  $C_n^2$  廓线存在差异, 15 km 以上的高空区域无太大变化, 说明了大气湍流在 3~15 km 的范围内的强度变化是剧烈的, 可以发现在其他参数不变时, 5 km 处的“鼓包”主要是由  $a_2$  项引起的,  $a_2$  项的减小使“鼓包”向内凹陷, 即对流层起始处的湍流强度发生了变化; 同样, 10 km 处的“鼓包”是在其他参数不变时,  $a_1$  项作用的结果,  $a_1$  项数值的增加会

引起 10 km 以上部分的廓线向右移动, 但图中并没有凸显出该变化趋势, 原因是  $a_1$ 、 $c$ 、 $b_1$  项均有不同程度的变化, 其综合作用造成了此现象。

为进一步探讨该理论公式, 将表 6 中的单日  $C_n^2$  廓线参数值代入式(10), 即可由实测的  $r_0$  数据求得  $\theta_0$ , 图 5 显示了 2020 年 12 月 12 日、2020 年 12 月 14 日、2020 年 12 月 17 日的实测  $\theta_0$  与计算的  $\theta_0$  值的变化对比图。

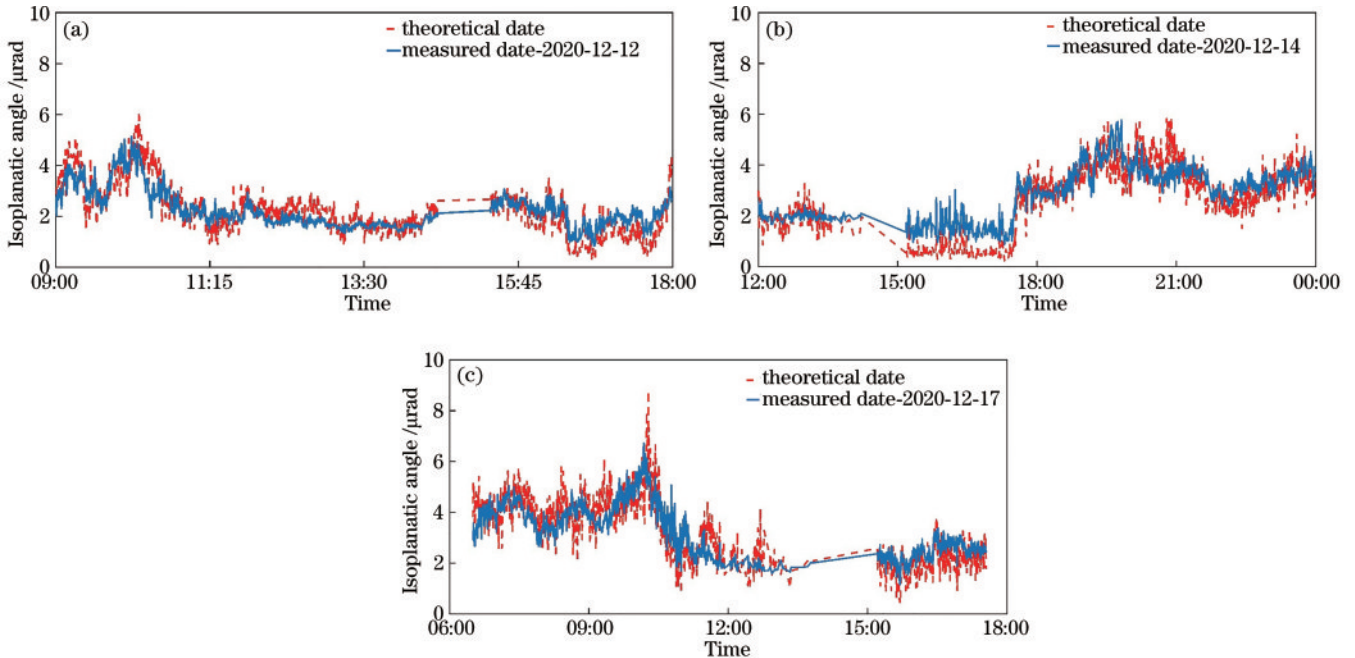


图 5  $\theta_0$  对比。(a)2020 年 12 月 12 日、(b)2020 年 12 月 14 日、(c)2020 年 12 月 17 日的单日  $\theta_0$  理论值与实测值对比  
 Fig. 5 Comparison of  $\theta_0$ . Comparison of single day  $\theta_0$  between theoretical data and measured data on (a) 2020-12-12; (b) 2020-12-14; (c) 2020-12-17

由图 5 可知,整层  $\theta_0$  的理论计算值与实际测量值的全天变化趋势基本一致,二者数值在局部出现随时间呈上下交替变化的情况,图 5(a) 在 11:15-13:30 时理论值稍大于实测值,图 5(b)、5(c) 在 15:00-18:00 时理论值比实测值小。出现此情况的原因可能为 DIMM 和等晕角测量仪的测量原理不同导致的, DIMM 测量的是图像抖动造成的位置方差,等晕角测量仪测量的是图像的光强起伏方差,二者在同一时间、同一天气条件下其物理量测量的值会有所差异,进而造成最终结果的细节差异化,但其总体趋势的一致性也侧面反映了二者总体测量的准确性。

表 7 相关系数  $R_{xy}$  计算值  
Table 7 Calculated values of  $R_{xy}$

Date	$R_{xy}$	Date	$R_{xy}$	Date	$R_{xy}$	Date	$R_{xy}$
2020-12-12	0.8380	2020-12-16	0.8033	2020-12-23	0.8260	2021-01-04	0.8108
2020-12-13	0.8156	2020-12-17	0.8128	2020-12-24	0.8017	2021-01-05	0.8299
2020-12-14	0.8708	2020-12-18	0.8051	2020-12-30	0.8087	2021-01-06	0.8234
2020-12-15	0.8129	2020-12-19	0.8150	2021-01-01	0.8132	2021-01-07	0.8247

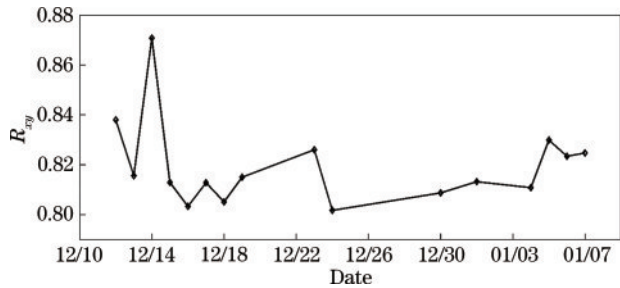


图 6 相关系数  $R_{xy}$  趋势变化  
Fig. 6 Trend change of  $R_{xy}$

由以上图表可知,16 组数据求得  $\theta_0$  计算值与实测值之间的相关系数均在 80% 以上,相关系数的平均值为 0.8195,最大相关系数达到了 0.8708,可见由理论公式求得的  $\theta_0$  数据在整体趋势上与实测值的相关性是良好的,也进一步证明了理论公式及该反演方法的正确性。

## 4 结 论

本文基于广义 HV 模型推导出了  $r_0$  和  $\theta_0$  之间的理论关系式,将二者在数值上建立了一定联系,为涉及  $r_0$  和  $\theta_0$  的相关研究提供了参考;提出了运用整层  $r_0$  和整层  $\theta_0$  求解广义 HV 模型的七个参数进而反演  $C_n^2$  廓线的新方法,以新疆南山实测的  $r_0$ 、 $\theta_0$  数据为输入运用所提方法反演计算得到了该地区的平均  $C_n^2$  廓线和日  $C_n^2$  廓线,与香河模型对比二者变化趋势的一致性较好,符合湍流变化规律;计算得到的整层  $\theta_0$  的日变化值与实测  $\theta_0$  值之间具有较高的相关性,16 组数据的相关系数平均值已达 82%;上述分析结果更好地佐证了所提出反演方法的可行性与正确性,为更好地研究  $C_n^2$  廓线反演方法提供了新的参考。

基于 16 组测量数据计算出整层  $\theta_0$  的理论数据,由下式计算出与实测值之间的相关系数  $R_{xy}$ <sup>[25]</sup>,其相关系数数值如表 7 所示,变化趋势如图 6 所示。

$$R_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \right] \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2 \right]}}, \quad (24)$$

式中:  $x_i$  代表实际测量的  $\theta_0$  值;  $y_i$  代表计算的  $\theta_0$  值;  $n$  代表数据的数量值;  $\bar{X}$  为实际测量  $\theta_0$  值的平均;  $\bar{Y}$  为计算的  $\theta_0$  值的平均。

## 参 考 文 献

- [1] 孙晶, 黄普明, 玄周石. Gamma-Gamma 大气湍流下相干光通信分集接收技术研究[J]. 光学学报, 2018, 38(7): 0706002.  
Sun J, Huang P M, Yao Z S. Diversity reception technology in coherent optical communication over gamma-gamma atmospheric turbulence channel[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(7): 0706002.
- [2] Mai V V, Thang T C, Pham A T. Performance of TCP over free-space optical atmospheric turbulence channels [J]. Journal of Optical Communications and Networking, 2013, 5(11): 1168-1177.
- [3] Ni X L, Yao H F, Liu Z, et al. Experimental study of the atmospheric turbulence influence on FSO communication system[C]//Asia Communications and Photonics Conference 2018, October 26-29, 2018, Hangzhou, China. Washington, D. C.: Optica Publishing Group, 2018: Su2A.232.
- [4] 刘旭超, 李华贵, 孙时伦, 等. 湍流信道下量子通信系统误码分析及优化[J]. 光学学报, 2022, 42(3): 0327018.  
Liu X C, Li H G, Sun S L, et al. Bit error analysis and optimization of optical quantum communication system under turbulent channel[J]. Acta Optica Sinica, 2022, 42(3): 0327018.
- [5] 王红帅, 姚永强, 钱璇, 等. 大气光学湍流模型计算方法[J]. 天文学报, 2012, 53(6): 527-537.  
Wang H S, Yao Y Q, Qian X, et al. The method of modeling atmospheric optical turbulence[J]. Acta Astronomica Sinica, 2012, 53(6): 527-537.
- [6] 吴晓庆, 方强, 饶瑞中. 近海边高空光学湍流的探空测量与模型比较[J]. 强激光与粒子束, 2006, 18(10): 1605-1609.  
Wu X Q, Fang Q, Rao R Z. Optical turbulence measurements on the coast with balloon-borne



- thermosonde and comparison with model[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2006, 18(10): 1605-1609.
- [7] Sadibekova T, Vernin J, Sarazin M, et al. Generalized SCIDAR measurements at La Silla observatory[J]. *Proceedings of SPIE*, 2006, 6267: 62671P.
- [8] Kornilov V, Tokovinin A A, Vozyakova O, et al. MASS: a monitor of the vertical turbulence distribution [J]. *Proceedings of SPIE*, 2003, 4839: 837-845.
- [9] 张守川, 吴毅, 侯再红, 等. 激光雷达测量大气湍流廓线[J]. *强激光与粒子束*, 2009, 21(12): 1795-1798.  
Zhang S C, Wu Y, Hou Z H, et al. Lidar measurement of atmospheric turbulence vertical profiles[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2009, 21(12): 1795-1798.
- [10] 白水成, 吴毅, 侯再红, 等. 利用激光雷达测量湍流强度廓线的研究[J]. *大气与环境光学学报*, 2007, 2(3): 195-198.  
Bai S C, Wu Y, Hou Z H, et al. Measurement of turbulence profile with lidar[J]. *Journal of Atmospheric and Environmental Optics*, 2007, 2(3): 195-198.
- [11] 王彩玉, 苑克娥, 时东锋, 等. 大气光学湍流廓线探测方法研究进展[J]. *大气与环境光学学报*, 2021, 16(1): 2-17.  
Wang C Y, Yuan K E, Shi D F, et al. Atmospheric optical turbulence profile measurement: a review[J]. *Journal of Atmospheric and Environmental Optics*, 2021, 16(1): 2-17.
- [12] Tyson R K. Adaptive optics and ground-to-space laser communications[J]. *Applied Optics*, 1996, 35(19): 3640-3646.
- [13] 程知, 侯再红, 靖旭, 等. Hufnagel-Valley 湍流强度廓线的高精度实时反演方法[J]. *红外与激光工程*, 2013, 42(6): 1562-1567.  
Cheng Z, Hou Z H, Jing X, et al. High-precision and real-time inversion method of Hufnagel-Valley turbulence profile[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(6): 1562-1567.
- [14] Wang Y, Basu S. Using an artificial neural network approach to estimate surface-layer optical turbulence at Mauna Loa, Hawaii[J]. *Optics Letters*, 2016, 41(10): 2334-2337.
- [15] 陈小威, 朱文越, 钱仙妹, 等. 基于神经网络的近地面光学湍流估算[J]. *光学学报*, 2020, 40(24): 2401002.  
Chen X W, Zhu W Y, Qian X M, et al. Estimation of surface layer optical turbulence using artificial neural network[J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(24): 2401002.
- [16] 朱黎明, 孙刚, 陈多龙, 等. 基于支持向量机估算大气光学湍流廓线的研究[J]. *光学学报*, 2022, 42(1): 0101001.  
Zhu L M, Sun G, Chen D L, et al. Atmospheric optical turbulence profile estimation using support vector machine [J]. *Acta Optica Sinica*, 2022, 42(1): 0101001.
- [17] 黄克涛. 基于广义 Hufnagel-Valley 模型的湍流强度廓线反演方法研究[D]. 北京: 中国科学院大学, 2014: 41-46.  
Huang K T. Research on the inversion method of turbulence intensity profile based on generalized Hufnagel-Valley model[D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2014: 41-46.
- [18] 程知. Hufnagel-Valley 模型及其广义形式的湍流廓线反演研究[D]. 北京: 中国科学院大学, 2013: 43-64.  
Cheng Z. Hufnagel-Valley model and its generalized turbulence profile inversion[D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2013: 43-64.
- [19] Hardy J W. Adaptive optics for astronomical telescopes [M]. New York: Oxford University Press, 1998.
- [20] Fried D L. Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1966, 56(10): 1372-1379.
- [21] Tyson R K. Introduction to adaptive optics[M]. Bellingham: SPIE Press, 2000.
- [22] 耿彦如. 利用 Gamma 函数求积分的几种形式[J]. *高等数学研究*, 2013, 16(1): 36-37.  
Geng Y R. Using gamma function for integration[J]. *Studies in College Mathematics*, 2013, 16(1): 36-37.
- [23] 强希文, 吴敏, 宗飞, 等. 高精度等晕角测量关键技术研究[J]. *强激光与粒子束*, 2021, 33(8): 081008.  
Qiang X W, Wu M, Zong F, et al. High-precision measurement technique of isoplanatic angle[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2021, 33(8): 081008.
- [24] 高慧. 我国不同区域高空气象参数统计分析分析与湍流模型研究[D]. 北京: 中国科学院研究生院, 2012.  
Gao H. Statistical analysis of meteorological parameters and turbulence model in different regions of China[D]. Beijing: Graduate University of Chinese Academy of Sciences, 2012.
- [25] 刘辉, 邵福波, 宫响. 经典相关系数及统计功效对比研究[J]. *青岛科技大学学报(自然科学版)*, 2022, 43(1): 111-119.  
Liu H, Shao F B, Gong X. Comparison of classical correlation coefficients and statistical power[J]. *Journal of Qingdao University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2022, 43(1): 111-119.