

激光与光电子学进展

基于混合卷积窗的激光多普勒信号处理研究

陈昊*, 张达

青岛科技大学自动化与电子工程学院, 山东 青岛 266061

摘要 快速傅里叶变换是激光多普勒测速系统信号处理的一种常用方法,但在异步采样时存在频谱泄漏和栅栏效应,其处理精度偏低。为了提高检测精度,提出基于 Nuttall 窗函数和五项最大旁瓣衰减窗函数的混合卷积窗改进六谱线插值校正算法。混合卷积窗在保证良好的旁瓣特性的同时也能保证主瓣不过宽,改进六谱线插值可有效抑制栅栏效应在参数估计过程中的负面影响,提高分析精度。为了避免解高次方程,提出三次 B 样条插值来拟合插值系数,并推导出改进六谱线插值的频率校正公式。搭建了双光束后向散射差动式激光多普勒测速平台,利用仿真数据和实测信号验证了本文算法在低信噪比环境下有较好的频率和速度测量精度。

关键词 激光光学; 快速傅里叶变换; 激光多普勒测速; 频谱泄漏; 混合卷积窗; 六谱线插值; 三次 B 样条

中图分类号 O433

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP222062

Laser Doppler Signal Processing Based on Hybrid Convolution Window

Chen Hao*, Zhang Da

College of Automation and Electronic Engineering, Qingdao University of Science and Technology,
Qingdao 266061, Shandong, China

Abstract Fast Fourier transform is a widely used method for signal processing in laser Doppler velocimetry systems. However, spectral leakage and fence effects occur in asynchronous sampling, and its processing accuracy is low. A hybrid convolution window based on the Nuttall window function and five-term maximum-sidelobe-decay window function is proposed to improve the detection accuracy of the six-spectral line interpolation correction algorithm. The hybrid convolution window can prevent the main lobe from becoming wide while ensuring good side lobe characteristics. The improved six-spectral line interpolation can effectively suppress the negative influence of the fence effect in the parameter estimation process and improve the analysis accuracy. The cubic B-spline interpolation is proposed to fit the interpolation coefficients to eliminate higher-order equations, and a frequency correction equation for the improved six-spectral line interpolation is derived. A dual-beam backscattering differential laser Doppler velocimetry platform is developed. The simulation data and measured signals demonstrate that the proposed algorithm exhibits good frequency and velocity measurement accuracy in the low signal-to-noise ratio environment.

Key words laser optics; fast Fourier transform; laser Doppler velocimetry; spectrum leakage; mix convolutional window; six-spectral line interpolation; cubic B splines

1 引言

激光多普勒测速(LDV)^[1-2]具有精度高、线性度好、动态响应快、测量范围大、非接触测量等优点,在航空、航天、机械、能源等领域得到了迅速的发展。目前最常见的多普勒信号处理方法是快速傅里叶变换(FFT),然而FFT过程会造成频谱泄漏。如果直接用FFT得到的峰值谱线对应的频率作为多普勒频移,则存在精度较低^[3]的问题。为了削弱频谱泄漏、栅栏效

应带来的运算误差影响,需要对FFT进行改进。对时域多普勒信号加窗函数可以较好地减少频谱泄漏带来的影响,对离散频谱进行插值^[4]可以较好地削弱栅栏效应。常采用的窗函数有Blackman窗、Blackman-Harris窗、四项Rife-Vincent(I)(RV)窗、四项Nuttall窗、五项最大旁瓣衰减(MSD)窗等。采用的谱线插值校正方法有三谱线插值法、四谱线插值法和六谱线插值法。

Yao等^[5]提出的Kaiser自卷积窗相比常用的单一

收稿日期: 2022-07-13; 修回日期: 2022-08-28; 录用日期: 2022-09-28; 网络首发日期: 2022-10-08

通信作者: *chenhaoqyl1325@163.com

窗函数能更好地抑制频谱泄漏。李媛等^[6]提出基于 Hamming 窗函数和 Nuttall 窗函数的混合卷积窗,与 Hamming 窗函数和 Nuttall 窗函数相比,它具有更好的旁瓣性能,频率测量精度提高了 2~4 个数量级。Fan 等^[7]提出了一种三谱线插值方法,该方法利用了峰值频率点附近的谱线信息,相比于 Jin 等^[8]提出的双谱线插值方法具有更多的谱线信息,提高了测量精确度。陈倩等^[9]提出了四谱线插值方法考虑了实际频率谱线的对称性,利用了频点左右四条谱线的幅值来求取实际幅值和相位。张恒煜^[10]提出了一种六线插值方法,该算法不仅考虑了实际谱线的对称性,而且考虑了目标频点附近频谱中包含的谱线信息。

李振华等^[11]指出卷积窗函数卷积次数越多旁瓣衰减速度越快,有助于提高计算精度,但主瓣宽度也会增大,对分辨率产生很大影响,而且计算量也会增大,因此卷积次数一般在 4 次以内。虽然李媛等^[6]提出的混合卷积窗函数利用了两种窗函数的特性,但其没有选取特性更好的窗函数。因此,本文选取旁瓣性能较好的四项 Nuttall 窗和五项 MSD 窗构造一种新型混合卷积窗。

虽然王保帅等^[12]提出了六谱线插值校正算法,但当采用多项式曲线拟合函数的拟合次数大于 7 时,拟合曲线两端容易出现振荡。因此要采用低阶曲线拟合,刘杰等^[13]提出利用三次样条插值,不仅可保持多段低阶插值多项式,而且二阶导数连续保证了插值函数的光滑性。崔昊等^[14]提出了基于非均匀 B 样条的曲线

拟合算法,高茂庭等^[15]指出 B 样条曲线保留了 Bezier 曲线的优点,增强了可局部修改的特性,连续性拼接问题得到了解决,使得拟合曲线更平滑。因此,本文选取基于三次 B 样条的改进六谱线插值法进行频谱校正。

2 窗函数的选择

典型余弦窗的时域表达式^[16]为

$$x(m) = \sum_{l=1}^L (-1)^l a_l \cos\left(\frac{2\pi lm}{M}\right), \quad (1)$$

式中: L 为余弦项数; M 为窗长度; $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$; a_l 为余弦系数; a_l 满足条件 $\sum_{l=0}^{L-1} (-1)^l a_l = 0, \sum_{l=0}^{L-1} a_l = 1$ 。

频域表达式^[16]为

$$W(\omega) = \sum_{l=0}^{L-1} (-1)^l \frac{a_l}{2} \left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi l}{M}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi l}{M}\right) \right], \quad (2)$$

式中: $W_R(\omega)$ 为矩形窗频谱函数。其表达式^[16]为

$$W_R(\omega) = \exp[-j\omega(M-1)/2] \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)}. \quad (3)$$

常采用的窗函数有 Blackman Harris 窗、四项 Nuttall 窗、四项 RV 窗、五项 MSD 窗。各种窗函数的旁瓣特性比较如图 1 所示。

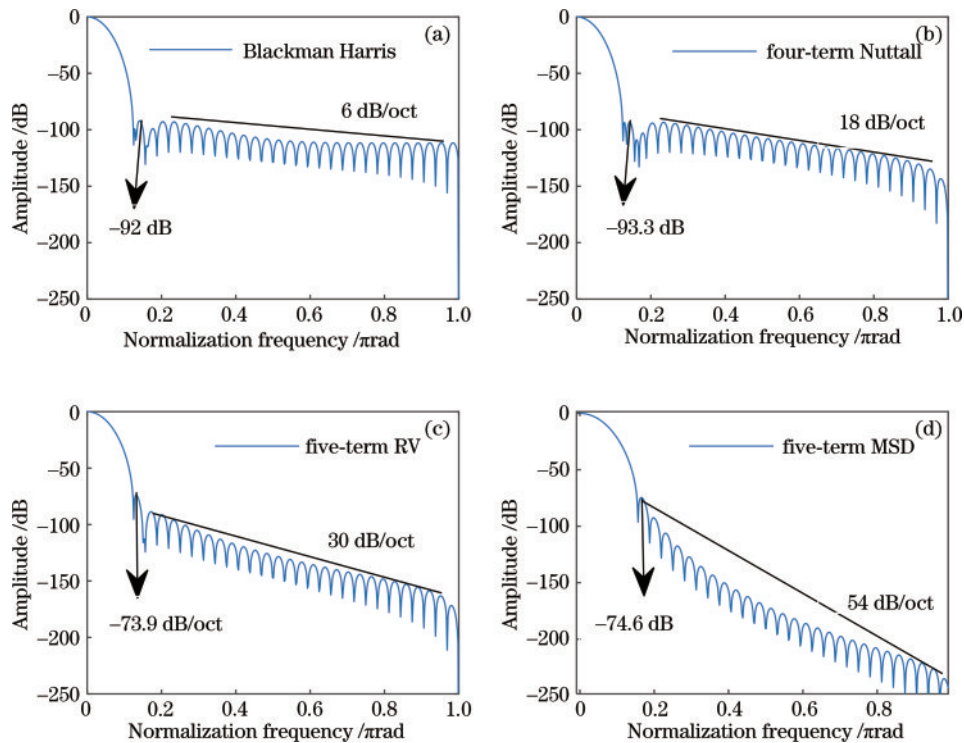


图 1 各种窗函数的旁瓣特性。(a)Blackman Harris 窗;(b)四项 Nuttall 窗;(c)四项 RV 窗;(d)五项 MSD 窗

Fig. 1 Sidelobe characteristics of various window functions. (a) Blackman Harris window; (b) four-term Nuttall window; (c) four-term RV window; (d) five-term MSD windows

由图 1 可知:Blackman Harris 窗、四项 Nuttall 窗和四项 RV 窗的归一化频率为 0.125, 五项 MSD 窗的归一化频率为 0.156; 与 Blackman-Harris 窗相比四项 Nuttall 窗函数具有相对低的峰值旁瓣电平(-93.3 dB)和较高的旁瓣衰减率(18 dB/oct)。与四项 RV 窗相比, 五项 MSD 窗函数具有较低的峰值旁瓣电平(-74.6 dB)和较快的峰值旁瓣衰减率(54 dB/oct)。四项 Nuttall 窗的峰值旁瓣电平在选取的窗函数中最低且主瓣宽度窄, 五项 MSD 窗的峰值旁瓣衰减率在选取的窗函数中最高。因此, 选择四项 Nuttall 窗函数与五项 MSD 窗函数构造混合卷积窗。在时域上, 将 p 段长度为 M 的余弦窗函数通过卷积可以获得余弦卷积窗, 表达式^[16]为

$$x_1(n) = \underbrace{x(m) * x(m) * \dots * x(m)}_p \quad (4)$$

余弦卷积窗频谱函数频域表达式^[16]为

$$W_p(\omega) = \left\{ \sum_{l=0}^{l-1} (-1)^l \frac{a_l}{2} \left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi l}{M}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi l}{M}\right) \right] \right\}^p \quad (5)$$

当 $N \gg 1$ 时, p 阶余弦卷积窗的离散傅里叶变换表达式^[16]为

$$W(k) = \frac{NK}{\pi} \sin\left(\frac{k}{p}\pi\right) \exp\left(-j\frac{k}{p}\pi\right) \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{a_m}{k^2 - (pl)^2} \quad (6)$$

四项 Nuttall 窗频域表达式为

$$W_{\text{Nuttall}} = \left[0.355768 - 0.487396 \cos\left(2\pi \frac{m}{M}\right) + 0.144232 \cos\left(4\pi \frac{m}{M}\right) - 0.012604 \cos\left(6\pi \frac{m}{M}\right) \right] \quad (7)$$

五项 MSD 窗频域表达式为

$$W_{\text{MSD}} = 0.2734375 - 0.4375 \cos\left(2\pi \frac{m}{M}\right) + 0.21875 \cos\left(4\pi \frac{m}{M}\right) - 0.0625 \cos\left(6\pi \frac{m}{M}\right) + 0.0078125 \cos\left(8\pi \frac{m}{M}\right) \quad (8)$$

混合卷积窗的幅频特性如图 2 所示, 与图 1 中各种经典窗相比, 混合卷积窗具有相对更低的旁瓣电平(-133.077 dB)和较高的旁瓣衰减率(73.64 dB/oct)。由于具有更令人满意的旁瓣特性, 混合卷积窗被选择

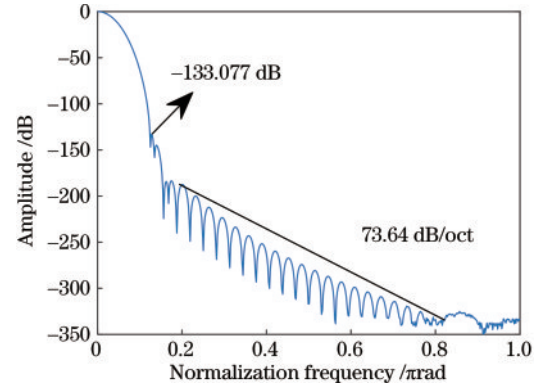


图 2 混合卷积窗函数的旁瓣特性
Fig. 2 Sidelobe characteristics of hybrid convolution window functions

用于进一步的信号处理。

3 改进的六谱线插值算法

对于正弦波信号序列 $x(t)$ ^[12] 有

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \quad (9)$$

式中: f_0 是频率; A 是幅度; φ_0 是相位角。加窗后离散傅里叶表达式^[12]为

$$x(k\Delta f) = \frac{A}{2j} \exp(j\varphi_0) W\left[\frac{2\pi(k\Delta f - f_0)}{f_s}\right] = \frac{A}{2j} \exp(j\varphi_0) W\left[\frac{2\pi(k - k_i)}{N}\right] \quad (10)$$

式中: $W[\cdot]$ 为窗函数频谱; k 为实际信号频率对应频点; f_s 为采样频率; Δf 为采样频率间隔。

由于异步采样产生的栅栏效应, 实际信号频率很难与采样频率点重合。根据谱线对称性, 采用待测频率左右的 6 条谱线进行运算, 设这 6 条谱线从左到右对应的幅值分别为 $y_1 = |X(k_1)|$, $y_2 = |X(k_2)|$, $y_3 = |X(k_3)|$, $y_4 = |X(k_4)|$, $y_5 = |X(k_5)|$, $y_6 = |X(k_6)|$ 。对信号加窗后频谱如图 3 所示, 待测频率在幅值最大谱线右侧、待测频率在幅值最大谱线左侧、待测频率对应谱线、待测频率在两谱线正中间这 4 种情形, 通过谱线幅值判定公式确定目标频点所在区域。

当目标频点在最大谱线右侧 ($k_3, k_3 + 0.5$) 时, 谱线 k_3 对应的幅值大于谱线 k_4 对应的幅值, 即 $y_3 > y_4$, 令 $\alpha \in (0, 0.5)$, 引入变量

$$\beta = \frac{(y_1 + y_2 + y_3) - (y_4 + y_5 + y_6)}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6} \quad (11)$$

假设

$$\begin{cases} r = |W \cdot 2\pi(-\alpha - 2.5)| + |W \cdot 2\pi(-\alpha - 1.5)| + |W \cdot 2\pi(-\alpha - 0.5)| \\ s = |W \cdot 2\pi(-\alpha + 2.5)| + |W \cdot 2\pi(-\alpha + 1.5)| + |W \cdot 2\pi(-\alpha + 0.5)| \end{cases} \quad (12)$$

则

$$\beta = \frac{r - s}{r + s} \quad (13)$$

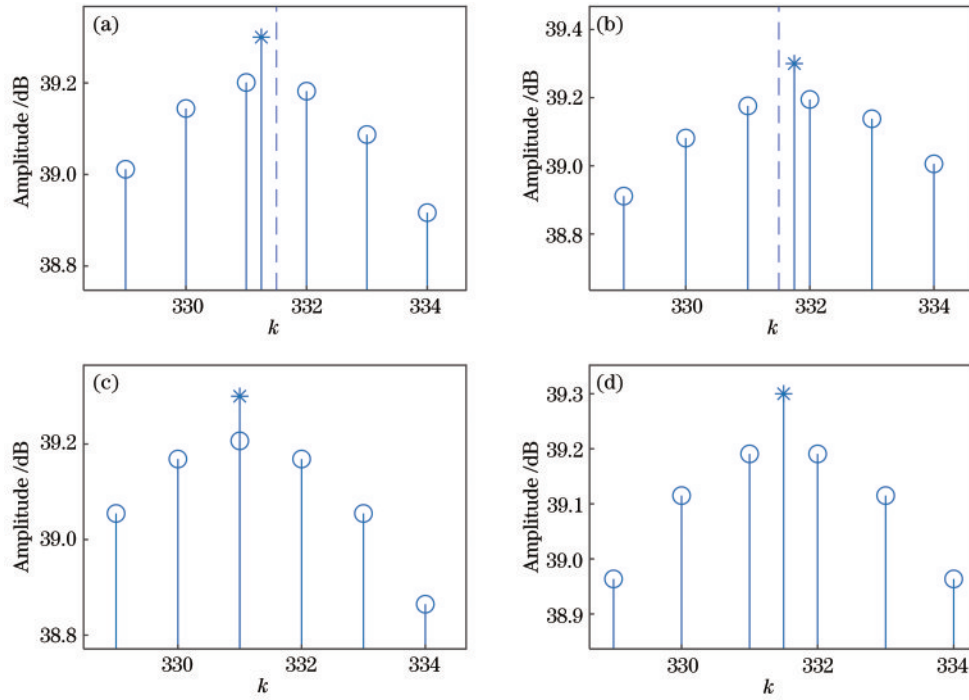


图 3 频谱线。(a) 频点靠近谱线 k_3 ; (b) 频点靠近谱线 k_4 ; (c) 频点对应谱线; (d) 频点在两谱线中间

Fig. 3 Spectral lines. (a) Frequency point is close to the spectral line k_3 ; (b) frequency point is close to the spectral line k_4 ; (c) frequency point corresponds to the spectral line; (d) frequency point is in the middle of the two spectral lines

式(11)可写为 $\beta = g(\alpha)$, 其反函数为 $\alpha = g^{-1}(\beta)$ 。将 $W[\cdot]$ 代入式(11), 通过最小二乘法拟合多项式^[17]进行拟合, 可以得到 $\alpha = g^{-1}(\beta)$ 的近似公式为

$$\alpha = c_1\beta + c_3\beta^3 + \dots + c_{2n+1}\beta^{2n+1}, \quad (14)$$

式中: $c_1, c_3, \dots, c_{2n+1}$ 是 $2n + 1$ 次逼近多项式的奇数系数。

频率和相位的插值校正公式分别表示为

$$\begin{cases} f_{k_s} = (k_3 + \alpha + 0.25) f_s / N \\ \arg = \text{angle}[X(k_3)] + 0.25\pi - \alpha\pi \end{cases} \quad (15)$$

四项 Nuttall 窗和五项 MSD 窗的混合卷积窗的插值系数 α 的七次拟合多项式为

$$\alpha = -1.9036870\beta + 0.7532401\beta^3 - 0.2246091\beta^5 - 0.0745168\beta^7. \quad (16)$$

插值系数 α 可以由式(16)获得, β 可以由式(13)计算。将 α 代入式(15)即可求得校正频率 f_i 和校正相位 θ_i 。

又因为

$$A = \frac{2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)}{r + s} = \frac{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)}{N} V(\alpha). \quad (17)$$

所以幅值的插值校正公式为

$$V(\alpha) = \frac{2N}{r + s}. \quad (18)$$

式(18)可写为 $V(\alpha) = \alpha$, 将 $W[\cdot]$ 代入式(18), 通过最小二乘法拟合多项式进行拟合, 可以得到

$V(\alpha) = \alpha$ 的近似公式为

$$V = d_0 + d_2\alpha^2 + \dots + d_{2n}\alpha^{2n}, \quad (19)$$

式中: d_0, d_2, \dots, d_{2n} 是 $2n$ 次逼近多项式的偶系数。

四项 Nuttall 窗和五项 MSD 窗的混合卷积窗的幅值系数 V 的七次拟合多项式表示为

$$V = 0.5760782 + 1.4590266\alpha^2 - 9.023726\alpha^4 + 23.4248438\alpha^6. \quad (20)$$

插值系数 α 可以由式(16)获得, V 可以由式(20)计算。将 α 代入式(17)即可求得校正幅值。

当目标频点在最大谱线左侧 ($k_4 - 0.5, k_4$) 时, 谱线 k_3 对应的幅值小于谱线 k_4 对应的幅值, 即 $y_3 < y_4$, 令 $\alpha \in (-0.5, 0)$, 引入变量

$$\beta = \frac{(y_4 + y_5 + y_6) - (y_1 + y_2 + y_3)}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6}. \quad (21)$$

频率、幅值、相位修正公式表示为

$$\begin{cases} f_{k_s} = (k_4 - \alpha - 0.25) f_s / N \\ \arg = \text{angle}[X(k_4)] + 0.75\pi + \alpha\pi \\ V(\alpha) = 2N / (r + s) \end{cases} \quad (22)$$

当目标频点对应谱线 k_3 时, 谱线 k_2 对应的幅值等于谱线 k_4 对应的幅值, 即 $y_2 = y_4$, 频率、幅值、相位修正公式表示为

$$\begin{cases} f_{k_s} = (k_3 + \alpha) f_s / N \\ \arg = \text{angle}[X(k_4)] + 0.5\pi - \alpha\pi \\ V(\alpha) = 2N / (r + s) \end{cases} \quad (23)$$

当目标频点对应谱线 k_4 时, 谱线 k_3 对应的幅值等

于谱线 k_5 对应的幅值, 即 $y_3 = y_5$, 频率、幅值、相位修正公式为

$$\begin{cases} f_{k_5} = (k_4 - \alpha) f_s / N \\ \arg = \text{angle}[X(k_4)] + 0.5\pi - \alpha\pi \\ V(\alpha) = 2N / (r + s) \end{cases} \quad (24)$$

当目标频点在两条谱线正中间时, 谱线 k_1 对应的幅值等于谱线 k_6 对应的幅值, 即 $y_1 = y_6$, 频率、幅值、相位修正公式表示为

$$\begin{cases} f_{k_1} = 0.5(k_3 + k_4) f_s / N \\ \arg = 0.5 \{ \text{angle}[X(k_3)] + \text{angle}[X(k_4)] \} + 0.5\pi \\ V(\alpha) = 2N / (r + s) \end{cases} \quad (25)$$

4 三次 B 样条插值

最小二乘法通常依据偏差平方和最小的原则来选择拟合曲线^[17]。三次样条曲线线性光滑, 二阶导数连续, 保证拟合曲线可以通过所有采样点, 对曲线的渐变和瞬态部分具有良好的适应性。海啸等^[18]指出就误差修正精度而言, 三次样条插值法的精度要远高于最小二乘法。

Bezier 曲线是工程中常用的拟合曲线, 对多项式基函数具有良好的整体效果。但分段的低阶 Bezier 曲线段拼接缺乏灵活性, 曲线光滑度取决于数据点数。而 B 样条曲线^[12]保留了 Bezier 曲线的优点, 增强了局部修改的特性, 使得曲线拟合更平滑。

因此本文用三次 B 样条插值^[19]来拟合插值系数, 避免解高次方程。

假设存在 $n+1$ 个数据点, 其中 β 满足 $a = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n = b$, 即 β 单调递增。同时三次样条方程满足 $\alpha(\beta_k) = y_k$, $\alpha(\beta)$ 的一阶导 $\alpha'(\beta)$ 和二阶导 $\alpha''(\beta)$ 都是连续的, 即 $\alpha(\beta)$ 的曲线是光滑的三次多项式。

$\alpha(\beta)$ 的曲线^[19]及一阶导函数、二阶导函数可写成

$$\alpha_k(\beta) = a_k + b_k(\beta - \beta_k) + c_k(\beta - \beta_k)^2 + d_k(\beta - \beta_k)^3, \quad (26)$$

$$\alpha'_k(\beta) = b_k + 2c_k(\beta - \beta_k) + 3d_k(\beta - \beta_k)^2, \quad (27)$$

$$\alpha''_k(x) = 2c_k + 6d_k(\beta - \beta_k). \quad (28)$$

将 $\beta = \beta_k$ 代入式(26)得

$$a_k = y_{k_0} \quad (29)$$

将 $\beta = \beta_{k+1}$ 代入式(26)得

$$a_k + b_k(\beta_{k+1} - \beta_k) + c_k(\beta_{k+1} - \beta_k)^2 + d_k(\beta_{k+1} - \beta_k)^3 = y_{k+1_0} \quad (30)$$

令 $h_k = \beta_{k+1} - \beta_k$, 则

$$a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = y_{k+1_0} \quad (31)$$

由一阶导数 $\alpha'(\beta_k)$ 连续可得

$$b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 - b_{k+1} = 0. \quad (32)$$

则

$$b_k = \frac{y_{k+1_0} - y_{k_0}}{h_k} - h_k c_k - \frac{h_k}{3} (c_{k+1} - c_k). \quad (33)$$

由二阶导数 $\alpha''(\beta_k)$ 连续可得

$$2c_k + 6d_k h_k - 2c_{k+1} = 0. \quad (34)$$

则

$$d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}. \quad (35)$$

由 $\alpha''_k(\beta_k) = 2c_k$, ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), 可得

$$c_k = 0.5\alpha''_k(\beta_k). \quad (36)$$

将 b_k, c_k, d_k 代入式(30)可得

$$h_k c_k + 2h_{k+1}(c_{k+1} + c_{k+2}) + 2h_k c_{k+1} = 3 \left(\frac{y_{k+2_0} - y_{k+1_0}}{h_{k+1}} - \frac{y_{k+1_0} - y_{k_0}}{h_k} \right). \quad (37)$$

求解的 a_k, b_k, c_k, d_k 是未定方程 (方程数有 $n-1$ 个, 却有 $n+1$ 个 p 变量), 故补充两个方程 $q_0 = 0, q_n = 0$, 即首尾两端不受任何影响, 再由式(32)确定求解 c 变量的方程。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

三次 B 样条插值拟合 $\alpha = g^{-1}(\beta)$ 的求解过程如下: 用式(38)求解 $q_0 \sim q_n$; 用式(29)、式(33)、式(36)、式(35)分别求解各区间的 a_k, b_k, c_k, d_k ; 将 a_k, b_k, c_k, d_k

代入式(26)得到各区间的三次 B 样条插值函数。

四项 Nuttall 窗和五项 MSD 窗的混合卷积窗改进六谱线的三次 B 样条插值函数为

$$\alpha = \begin{cases} 1.776049x + 0.1462974(x + 0.2702291)^3 - 0.02005988, \beta \in (-0.5, 0.4) \\ 1.824674x + 0.02470527(x + 0.213939)^2 - 0.03466387(x + 0.213939)^3 - 0.009630998, \beta \in (-0.4, -0.3) \\ 1.863038x + 0.01900998(x + 0.1591722)^2 - 0.03997993(x + 0.1591722)^3 - 0.003456073, \beta \in (-0.3, -0.2) \\ 1.888539x + 0.01257525(x + 0.1055225)^2 - 0.03978371(x + 0.1055225)^3 - 0.0007165907, \beta \in (-0.2, -0.1) \\ 1.901389x + 0.00625734(x + 0.05258706)^2 - 0.03966337(x + 0.05258706)^3 - 0.00001153608, \beta \in (-0.1, 0) \\ 1.901718x - 0.03966337x^3, \beta \in (0, 0.1) \\ 1.889536x - 0.00625734(x - 0.05258706)^2 - 0.03978371(x - 0.05258706)^3 + 0.0006348295, \beta \in (0.1, 0.2) \\ 1.864733x - 0.01257525(x - 0.1055225)^2 - 0.03997993(x - 0.1055225)^3 + 0.003228719, \beta \in (0.2, 0.3) \\ 1.827068x - 0.01900998(x - 0.1591722)^2 - 0.03466387(x - 0.1591722)^3 + 0.009181509, \beta \in (0.3, 0.4) \\ 1.77744x - 0.02470527(x - 0.213939)^2 + 0.1462974(x - 0.213939)^3 + 0.01973627, \beta \in (0.4, 0.5) \end{cases} \quad (39)$$

5 仿真实验研究

5.1 模拟 LDV 信号的处理

为验证基于四项 Nuttall 窗和五项 MSD 窗混合卷积窗的六谱线插值的有效性和精度,对模拟 LDV 信号进行改进六谱线插值处理。如图 4(a)所示,理想的 LDV 信号由正弦波和具有高斯分布的基本信号组成。图 4(b)是理想 LDV 信号序列的波形。本文构造多普勒测速信号表达式^[20]为

$$x = i_d \exp \left\{ - \left[\frac{2\sqrt{2}(t - t_0)}{\tau} \right]^2 \right\} + i_a \exp \left\{ - \left[\frac{2\sqrt{2}(t - t_0)}{\tau} \right]^2 \right\} \cos[2\pi f_D(t - t_0)], \quad (40)$$

式中: i_d 和 i_a 分别为呈高斯分布的基底信号的幅值和呈高斯分布的余弦信号的幅值; t_0 是粒子到达时刻; $\tau = N_f/f_D$ 为运动微粒穿越控制体用的时间; N_f 为条纹数目; f_D 为多普勒频移; θ 是两条入射光夹角的 $1/2$ 。

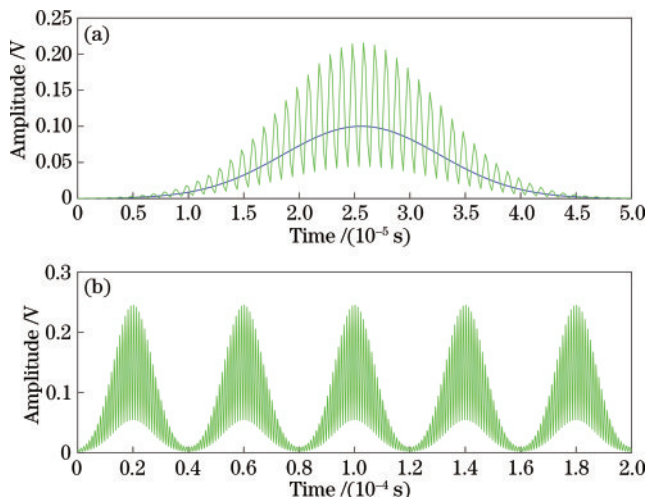


图 4 LDV 的理想信号。(a)信号组成;(b)信号时域波形
Fig. 4 Ideal signals of LDV. (a) Components of the signal; (b) signal time domain waveform

对四项 Nuttall 窗、五项 MSD 窗、四项 Nuttall 窗和五项 MSD 窗的混合卷积窗进行基于最小二乘法曲线拟合的改进六谱线插值处理,对四项 Nuttall 窗和五项 MSD 窗的混合卷积窗进行基于三次 B 样条曲线拟合的改进六谱线插值处理,把这 4 种不同方法简称为 Method 1、Method 2、Method 3、Method 4,并用这 4 种方法对 LDV 理想信号进行频率检测。

在低频范围内,对 15 组异步采样信号进行 4 种方法的频率检测处理。采样率为 5 MHz,FFT 点数为 1024,每个频点计算 10 次。频率测量的绝对误差的算术平均值见表 1,相对误差见图 5。

表 1 低频范围内频率检测的精度比较

Table 1 Accuracy comparison of frequency detection in low frequency range

No.	Frequency / kHz	Arithmetic mean error of frequency detection / Hz			
		Method 1	Method 2	Method 3	Method 4
1	60	0.14612	0.03394	0.00311	0.00043
2	120	0.21278	0.05835	0.00570	0.00044
3	180	0.28677	0.06641	0.00946	0.00089
4	240	0.51563	0.11426	0.00709	0.00043
5	300	0.28149	0.06543	0.00928	0.00071
6	360	0.51563	0.11182	0.00803	0.00083
7	420	0.27638	0.06445	0.01013	0.00148
8	480	0.55653	0.10938	0.00791	0.00074
9	540	0.50886	0.06299	0.01247	0.00198
10	600	0.70963	0.10742	0.01038	0.00099
11	660	0.89343	0.06377	0.01201	0.00132
12	720	0.80304	0.06096	0.00916	0.00116
13	780	0.85076	0.06128	0.00707	0.00109
14	840	0.59613	0.05695	0.00713	0.00197
15	900	0.59272	0.06997	0.01402	0.00198

在高频范围内,对 15 组异步采样信号进行 4 种方法的频率检测处理。采样率为 5 GHz,FFT 点数为 1024,每个频点计算 10 次。频率测量的绝对误差的算术平均值见表 2,相对误差见图 6。

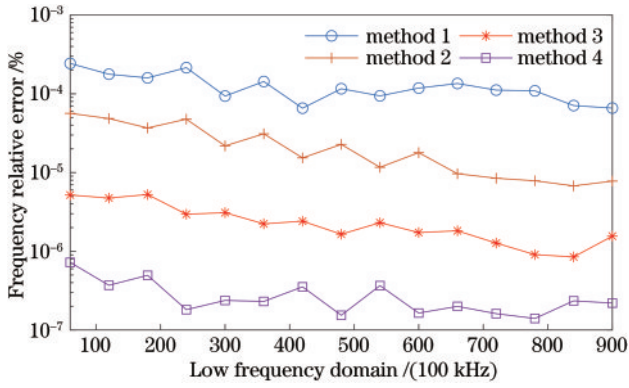


图 5 低频范围内频率检测的相对误差对比

Fig. 5 Relative error comparison of frequency detection in low frequency range

表 2 高频范围内频率检测的精度比较

Table 2 Accuracy comparison of frequency detection in high frequency range

No.	Frequency / MHz	Arithmetic mean error of frequency detection / Hz			
		Method 1	Method 2	Method 3	Method 4
1	60	352.58333	85.10400	5.24102	0.56917
2	120	501.79167	101.60000	11.12227	0.63840
3	180	750.15000	111.82080	11.27520	0.64300
4	240	537.40350	118.33333	12.72240	1.21042
5	300	884.41500	236.29760	28.78092	1.35044
6	360	597.87011	178.52800	18.16214	1.72480
7	420	898.27500	194.54400	29.65572	1.23250
8	480	630.36000	108.39600	15.76973	1.46664
9	540	973.89021	268.07760	28.61121	1.02708
10	600	602.56000	208.08000	16.52556	2.00390
11	660	917.64000	266.31360	31.96869	1.38240
12	720	811.15043	157.22100	19.10038	3.52998
13	780	1289.40000	219.13920	21.50608	2.37312
14	840	805.75000	177.69600	27.56436	2.48270
15	900	902.55010	247.39200	27.11180	3.56040

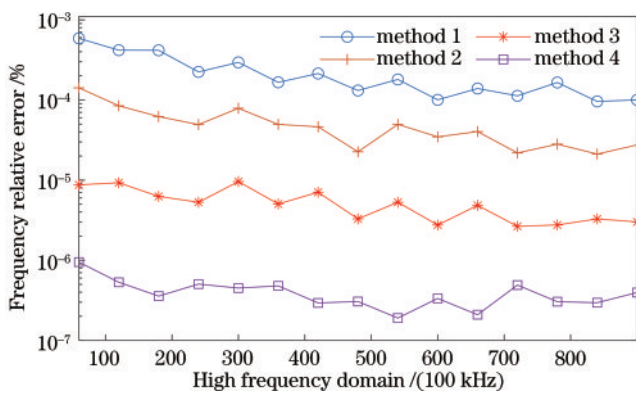


图 6 高频范围内频率检测的相对误差对比

Fig. 6 Relative error comparison of frequency detection in high frequency range

由表 1 和表 2 可知,基于三次 B 样条曲线拟合的改进六谱线插值处理的频率检测绝对误差比基于最小二乘法曲线拟合的改进六谱线插值处理的绝对误差小 1 个数量级。由图 5 和图 6 可知,高频范围内频率检测的相对误差略高于低频范围内频率检测的相对误差。

整体来看: Method 1 频率检测相对误差在 $(6.57 \times 10^{-5})\% \sim (5.87 \times 10^{-4})\%$ 之间; Method 2 频率相对误差在 $(6.77 \times 10^{-6})\% \sim (8.65 \times 10^{-5})\%$ 之间; Method 3 频率相对误差在 $(8.48 \times 10^{-7})\% \sim (9.59 \times 10^{-6})\%$ 之间; Method 4 频率相对误差在 $(1.41 \times 10^{-7})\% \sim (9.48 \times 10^{-7})\%$ 之间,相比其他三种方法频率检测效果更好。在 Method 4 的基础上,给原信号加入不同信噪比的高斯白噪声,再进行频率检测。在低频范围内,不同信噪比的信号频谱如图 7 所示,使用 Method 4 对 15 组不同信噪比的信号进行处理。采样率为 5 MHz,FFT 点为 1024,每个频点计算 10 次。频率测量的绝对误差和相对误差的算术平均值见表 3 和图 8。

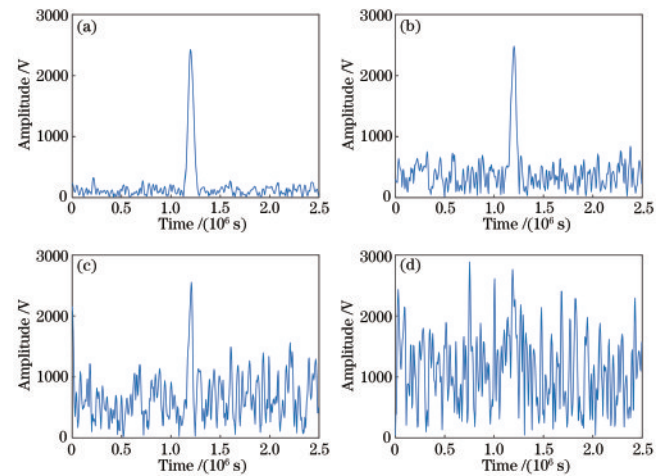


图 7 低频域不同信噪比的信号频谱图。(a) $R_{SN} = +5$ dB; (b) $R_{SN} = -5$ dB; (c) $R_{SN} = -10$ dB; (d) $R_{SN} = -15$ dB

Fig. 7 Signal spectrograms with different signal-to-noise ratios in the low frequency domain. (a) $R_{SN} = +5$ dB; (b) $R_{SN} = -5$ dB; (c) $R_{SN} = -10$ dB; (d) $R_{SN} = -15$ dB

在高频范围内,不同信噪比的信号频谱如图 9 所示,使用方法 4 对 15 组不同信噪比的信号进行处理。采样率为 5 MHz,FFT 点为 1024,每个频点计算 10 次。频率测量的绝对误差和相对误差的算术平均值见表 4 和图 10。

由表 3 和表 4 可知,在 $R_{SN} = -15$ dB 时: 180 kHz、240 kHz、300 kHz、360 kHz 测试点的频率绝对误差接近 1881 Hz,低频域信号频率检测的相对误差最小为 0.133%; 120 GHz、180 GHz、780 GHz、900 GHz 测试点的频率绝对误差接近 2160 kHz,高频域信号频率检测的相对误差最小为 0.156%。由此可知,在 $R_{SN} = -15$ dB 的时频率检测效果较差。在 $R_{SN} \geq -10$ dB

表 3 低频域不同信噪比的信号频率检测的绝对误差比较
Table 3 Comparison of absolute errors of signal frequency detection with different signal-to-noise ratios in low frequency domain

No.	Frequency / kHz	Arithmetical mean of error / Hz			
		$R_{SN}=+5$ dB	$R_{SN}=-5$ dB	$R_{SN}=-10$ dB	$R_{SN}=-15$ dB
1	60	0.00010	0.19175	1.91040	311.33200
2	120	0.00013	0.35768	1.55472	307.64800
3	180	0.00017	0.41007	2.97344	1847.73040
4	240	0.00027	0.74996	2.01240	1923.08880
5	300	0.00017	0.56809	1.59552	1815.69040
6	360	0.00028	0.41415	4.99992	1938.87440
7	420	0.00020	0.73958	11.77808	861.35548
8	480	0.00025	0.90391	9.94064	870.19822
9	540	0.00035	1.19215	19.06470	745.90264
10	600	0.00029	0.93306	10.10534	731.23548
11	660	0.00043	1.18215	30.13222	583.45921
12	720	0.00035	0.93405	26.01698	472.77065
13	780	0.00038	1.12902	21.44346	588.97846
14	840	0.00042	1.11308	26.87693	950.60786
15	900	0.00045	1.05872	30.75494	882.29743

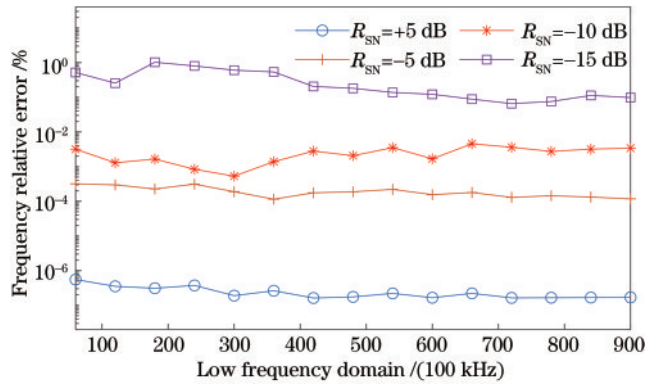


图 8 低频域不同信噪比的信号频率检测的相对误差比较
Fig. 8 Comparison of absolute errors of signal frequency detection with different signal-to-noise ratios in low frequency domain

时:低频域频率检测绝对误差最大值为 30.75 Hz,低频域信号频率检测的相对误差最大为 0.00456%;高频域频率检测绝对误差最大值为 9580 Hz,高频域信号频率检测的相对误差最大为 0.00380%。由此可知,该方法可以保证相对较好的精确度。由图 8 和图 10 可知, $R_{SN}=-5$ dB 时的频率检测精度在 $(1.15 \times 10^{-4})\% \sim (5.18 \times 10^{-4})\%$ 之间,比 $R_{SN}=-10$ dB 时的频率检测精度更好,所以在模拟 LDV 信号的测速处理过程中,给模拟 LDV 信号加入 $R_{SN}=-5$ dB 的高斯白噪声。

为了尽可能模拟真实的激光多普勒信号,在模拟 LDV 信号中加入了高斯白噪声, R_{SN} 为 -5 dB。在低频

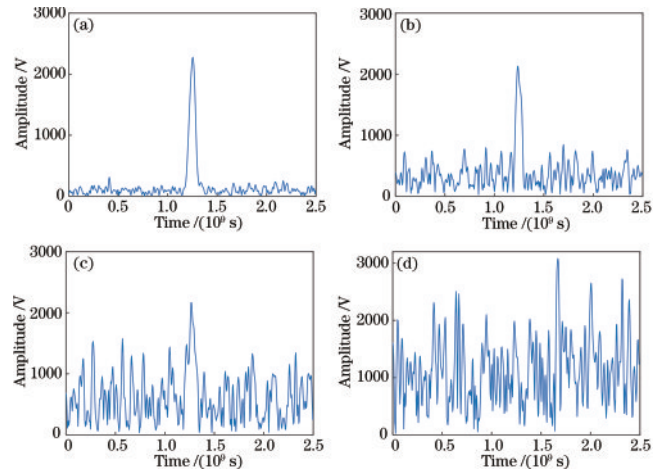


图 9 高频域不同信噪比的信号频谱图。(a) $R_{SN}=+5$ dB;(b) $R_{SN}=-5$ dB;(c) $R_{SN}=-10$ dB;(d) $R_{SN}=-15$ dB
Fig. 9 Signal spectrograms with different signal-to-noise ratios in the high frequency domain. (a) $R_{SN}=+5$ dB; (b) $R_{SN}=-5$ dB;(c) $R_{SN}=-10$ dB; (d) $R_{SN}=-15$ dB

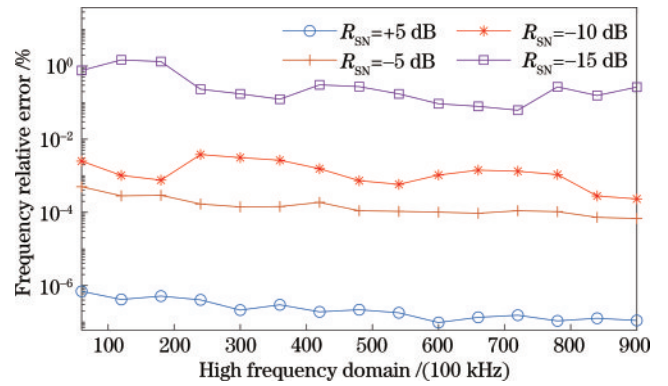


图 10 高频域不同信噪比的信号频率检测的绝对误差比较
Fig. 10 Comparison of absolute errors of signal frequency detection with different signal-to-noise ratios in low frequency domain

范围(对应于低速)和 高频范围(对应于高速)的信号分别用 Method 1、Method 2、Method 3、Method 4 四种方法进行处理。根据使用的不同的方法,插值系数 α 由式(16)、式(39)得到, β 由式(11)和式(21)计算得出。最后,使用式(15)、式(22)~(25)获得校正后的频率 f_i 。

在低频范围内,对 15 组异步采样信号进行 4 种方法的处理。采样率为 5 MHz,FFT 点为 1024,每个频点计算 10 次。频率测量的绝对误差和相对误差的算术平均值见表 5 和图 11。

在高频范围内,对 15 组异步采样信号进行了 4 种方法的处理。采样率为 5 GHz,FFT 点为 1024 个,在每个频点进行 10 次计算。结果如表 6 和图 12 所示。

如表 5 和表 6 所示,与 FFT 相比,4 种方法均具有提高多普勒频率提取精度的能力。由图 11 和图 12 可知,在低频范围内 Method 4 的最大相对误差为 0.00032%,在高频范围内 Method 4 的最大相对误差

表 4 高频域不同信噪比的信号频率检测的绝对误差比较

Table 4 Comparison of absolute errors of signal frequency detection with different signal-to-noise ratios in high frequency domain

No.	Frequency /MHz	Arithmetical mean of error /Hz			
		$R_{SN} = +5$ dB	$R_{SN} = -5$ dB	$R_{SN} = -10$ dB	$R_{SN} = -15$ dB
1	60	0.41691	300.48639	1509.27371	454325.23911
2	120	0.49814	338.76866	1228.59782	1768065.17692
3	180	0.92389	526.98932	1369.85067	2385840.38721
4	240	0.97161	405.18828	9136.98548	558740.56227
5	300	0.63717	422.34939	9411.28992	521070.28999
6	360	1.06819	516.84130	9580.61613	446435.45613
7	420	0.79913	786.61318	6553.47962	1287100.12932
8	480	1.04420	531.24111	3526.26674	1313235.31676
9	540	0.97155	574.56118	3147.99428	935988.91351
10	600	0.58315	607.62123	6279.61570	558740.60196
11	660	0.89542	622.92420	9411.28991	521070.30481
12	720	1.10816	796.86612	9580.67975	446435.60156
13	780	0.84019	814.86427	8419.41077	2101635.54417
14	840	1.06821	612.24224	2350.84414	1313235.31558
15	900	0.99453	612.24617	2098.62523	2385350.23874

表 5 低频范围内的精度比较

Table 5 Precision comparisons in low frequency range

No.	Frequency /kHz	Arithmetical mean of error /Hz				
		FFT	Method 1	Method 2	Method 3	Method4
1	64.5264	4194.14941	4.70772	1.93381	0.32256	0.14568
2	123.1934	4152.20793	7.81245	3.47223	0.56742	0.27769
3	181.8604	4110.68583	8.14860	3.98346	0.84420	0.30182
4	240.5273	4069.57892	11.63889	6.20820	1.20541	0.50791
5	299.1943	4028.88316	15.33006	7.31160	1.59180	0.71136
6	357.8613	3988.59433	13.71006	8.38440	1.42384	0.84032
7	416.5283	3948.70831	17.15013	8.40424	1.77663	0.76533
8	475.1953	3909.22123	18.90783	10.10342	1.96140	1.00400
9	528.9795	3870.12924	20.66472	12.84120	2.15043	0.99814
10	587.6465	3831.42774	24.07887	12.97624	2.49912	0.95342
11	646.3135	3793.11352	22.45887	13.73043	2.33120	1.42140
12	704.9805	3755.18236	25.74423	13.40101	2.67124	1.36353
13	763.6475	3717.63057	29.05551	14.20563	2.84346	1.29140
14	822.3145	3680.45421	32.28012	17.21520	3.17943	1.43463
15	880.9814	3643.64973	33.88392	19.57682	3.51544	1.75682

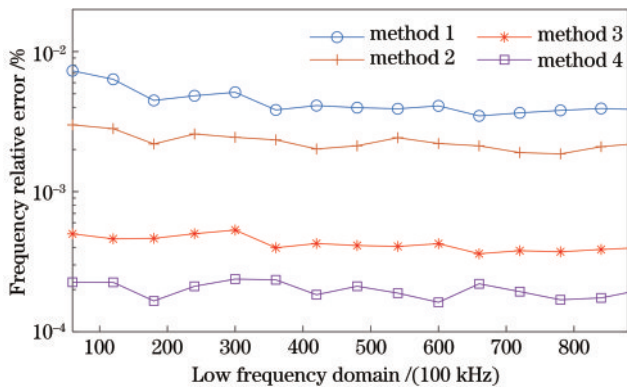


图 11 低频范围内相对误差对比

Fig. 11 Comparison of relative errors in low frequency range

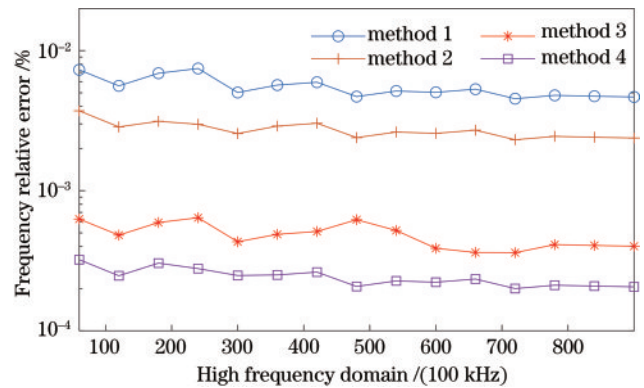


图 12 高频范围内相对误差对比

Fig. 12 Comparison of relative errors in high frequency range

表 6 高频范围内的精度比较
Table 6 Precision comparisons in high frequency range

No.	Frequency /MHz	Arithmetical mean of error /Hz				
		FFT	Method 1	Method2	Method3	Method4
1	54.7852	3808593.75686	3997.02938	2036.72159	343.86209	176.33953
2	113.4277	3759765.63471	6352.98234	3237.21821	546.54333	280.27863
3	172.0703	3710937.53730	11860.12172	5385.60410	1020.31929	523.24066
4	230.7129	3662109.38275	17203.43953	6876.16441	1480.00178	641.10807
5	289.3555	3613281.25344	14531.78766	7404.80062	1250.16114	717.94732
6	347.9980	3564453.13781	19756.84712	10067.27940	1699.66994	871.62561
7	416.4063	3515625.69218	24762.72983	12618.06748	2130.32308	1092.47338
8	475.0488	3466796.88477	22310.24485	11368.38211	2949.41357	984.27551
9	528.8086	3417968.75109	27215.20969	13867.75023	2750.42503	1200.67102
10	587.4512	3369140.63511	29592.98431	15079.36627	2279.33724	1305.57284
11	646.0938	3320312.51726	34283.78167	17469.60345	2341.30848	1512.51978
12	704.7363	3271484.38414	31970.75250	16290.97903	2545.86703	1410.47438
13	763.3789	3222656.25844	36596.80313	18648.22394	3148.40145	1614.56484
14	822.0215	3173828.13282	38856.96480	19799.90684	3342.84141	1714.27765
15	880.6641	3125000.11710	41117.10844	20951.58540	3537.28065	1813.99008

为 0.00050%。如表 7 所示, Method 4 在处理模拟 LDV 信号处理精度上具有更好的性能。

表 7 低频和高频范围内的相对误差平均值

Table 7 Relative error averages in the low and high frequency ranges

Item	Method 1	Method 2	Method 3	Method 4
Low frequency	0.0044	0.00229	0.00043	0.00020
High frequency	0.0055	0.00273	0.00048	0.00024

5.2 实验 LDV 信号处理

在 LDV 信号处理过程中采用双光束-双散射光路, 信号频移与速度 u 之间的关系^[20]为

$$u = \frac{\lambda}{2\sin\theta} f_D, \quad (41)$$

式中: f_D 为多普勒频移; θ 是两条入射光夹角的 1/2, 本文设置为 20°; λ 为激光波长, 本文设置为 632.8 nm。

如图 13 所示, 我们实验室建立了基于双光束-双散射模式的 LDV 的实验装置。激光源的输出光束通过分光比为 50:50 的色散棱镜等分为两束平行光束。两束光束聚焦在直流电机驱动的直径为 150 mm 的金属盘的表面上, 通过聚焦透镜模拟移动物体。来自磁盘表面的散射光被聚焦透镜收集, 并由反射器 2 反射到收集透镜。然后, 通过收集透镜, 散射光被聚焦在探测器上。

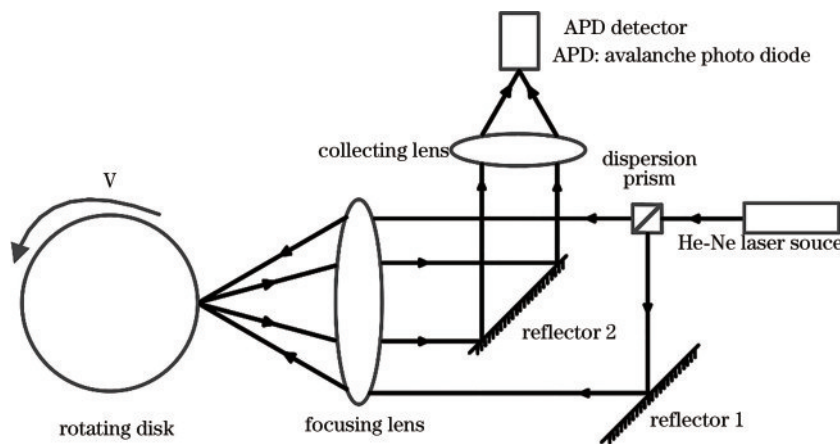


图 13 采用的 LDV 光学结构
Fig. 13 Optical structure of LDV adopted

光源为 0.8 mW He-Ne 激光器(HNLS008R-EC, Thorlabs, 美国), 激光波长为 632.8 nm。两个入射光束的半角设置为 20°。光检测器是具有可调增益和温度补偿的硅 APD(APD430A/M, Thorlabs, 美国)。

APD 的主要参数如表 8 所示。金属盘的旋转速率由光电编码器(UCD-IPH00-L100-ARW, Posital, 德国)测量, 编码器是 12 位, 精度误差为 ±0.0878°。旋转圆盘的线速度由旋转速率和圆盘直径计算, 线速度公式为

表 8 APD 430A/M 主要参数

Table 8 Main parameters of APD 430A/M

Wavelength range /nm	Output bandwidth / MHz	Active area diameter /mm	Input optical power range / μ W
400-1000	400	0.5	8-80

$$v = \omega \cdot r, \quad (42)$$

式中： ω 为旋转速度； r 为圆盘半径。

利用图 14 所示的实验装置，获得了 15 组 LDV 信号。使用 4 种方法来获得多普勒频率，使用某些参数（例如波长和光束角）从式 (41) 计算出圆盘的转速。采样频率为 10 MHz，FFT 点数为 1024。图 15 为一段测量信号。4 种方法的速度测量绝对误差对比如表 9 所示，相对误差对比如图 16 所示。

如表 9 和图 16 所示，4 种方法对实测信号都有效，但四项 Nuttall 窗的六谱线插值、五项 MSD 窗的六谱线插值检测精度相对较差，而基于三次 B 样条的混合

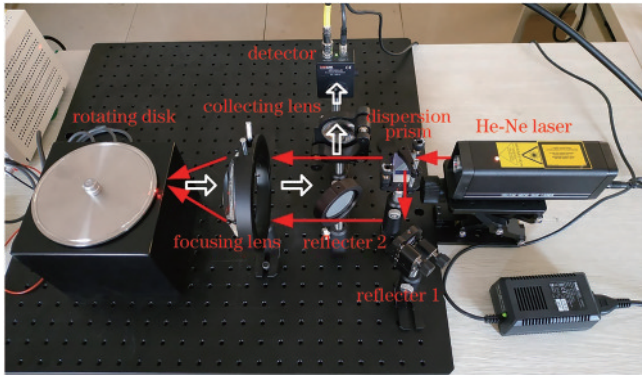


图 14 LDV 实验装置

Fig. 14 Experimental setup of LDV

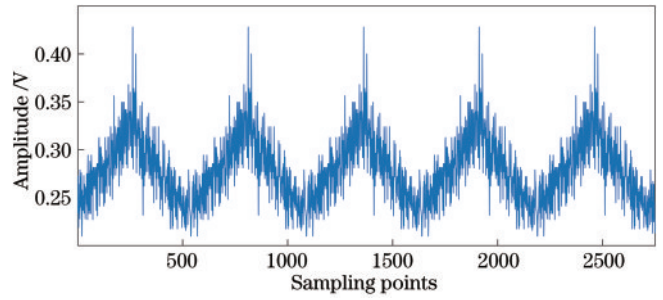


图 15 测量信号序列

Fig. 15 Measured signal sequence

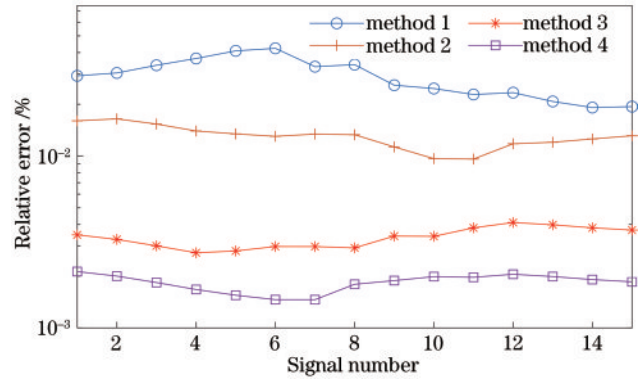


图 16 速度相对误差对比

Fig. 16 Comparison of relative error of speed

卷积窗改进六谱线插值的最大相对误差为 0.00213%，相比之下检测精度更好。通过比较简洁的运算，LDV 信号处理的精度已经达到较好的状态。通过信号仿真结果图 11、图 12 与实验结果图 16 对比发现，仿真结果曲线要优于实验结果曲线，这说明来自实验装置的信号被噪声污染，通过图 15 就可以看出，因

表 9 实测信号处理结果

Table 9 Processing results of measured signals

No.	Reference speed / ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	Arithmetical mean of error / ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)			
		Method 1	Method 2	Method 3	Method 4
1	0.5415	1.58518×10^{-4}	8.67780×10^{-5}	1.88374×10^{-5}	1.15203×10^{-5}
2	0.5898	1.79469×10^{-4}	9.70299×10^{-5}	1.93083×10^{-5}	1.18081×10^{-5}
3	0.6377	2.15047×10^{-4}	9.78912×10^{-5}	1.91513×10^{-5}	1.17123×10^{-5}
4	0.7056	2.60572×10^{-4}	9.86931×10^{-5}	1.93083×10^{-5}	1.18080×10^{-5}
5	0.7683	3.14231×10^{-4}	1.03356×10^{-4}	2.15460×10^{-5}	1.19047×10^{-5}
6	0.8675	3.67119×10^{-4}	1.12973×10^{-4}	2.58036×10^{-5}	1.26724×10^{-5}
7	0.9369	3.10047×10^{-4}	1.25720×10^{-4}	2.78561×10^{-5}	1.36800×10^{-5}
8	0.9897	3.36604×10^{-4}	1.31654×10^{-4}	2.89313×10^{-5}	1.77600×10^{-5}
9	1.0425	2.69283×10^{-4}	1.17746×10^{-4}	3.56754×10^{-5}	1.96536×10^{-5}
10	1.0832	2.67506×10^{-4}	1.04587×10^{-4}	3.69357×10^{-5}	2.15417×10^{-5}
11	1.1238	2.56270×10^{-4}	1.07916×10^{-4}	4.29600×10^{-5}	2.21475×10^{-5}
12	1.1605	2.71244×10^{-4}	1.36797×10^{-4}	4.76400×10^{-5}	2.38255×10^{-5}
13	1.1972	2.48648×10^{-4}	1.43981×10^{-4}	4.76400×10^{-5}	2.38213×10^{-5}
14	1.2492	2.39082×10^{-4}	1.57070×10^{-4}	4.77600×10^{-5}	2.38846×10^{-5}
15	1.2971	2.51415×10^{-4}	1.70160×10^{-4}	4.81200×10^{-5}	2.40676×10^{-5}

此实际结果不如模拟结果,但通过采取提高信噪比的措施,可以进一步提高实际信号中混合卷积窗改进六谱线插值的精度。实验处理中信号检测相对误差大约为 0.00146%~0.00213%,与文献[20]的实验检测精度相比,检测精度提高 2 个数量级。

6 结 论

本文分析了余弦自卷积窗的频域特性,构造了基于四项 Nuttall 窗函数和五项 MSD 窗函数的混合卷积窗,保证良好的旁瓣特性的同时也能使主瓣不过宽,能更好抑制频谱泄漏。针对栅栏效应,提出了一种改进的六谱线插值算法,使用谱线幅值判定公式确定目标频点所在区域及所用频率修正公式。为了解决最小二乘法拟合插值系数需要解高次方程的问题,提出三次样 B 条插值来拟合插值系数,并推导出改进六谱线插值的频率校正公式。经仿真验证,该方法显著提高了激光多普勒信号处理的精度。实验处理中信号检测相对误差大约为 0.00146%~0.00213%,检测精度较好。仿真和实验信号的处理表明,基于四项 Nuttall 窗和五项 MSD 窗的混合卷积窗的改进六谱线插值法在多普勒频率提取方面具有较好的性能。

参 考 文 献

- [1] 聂晓明. 用于车载自主导航系统激光测速技术研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2014: 2-3.
Nie X M. Research on laser Doppler velocimeter for vehicle self-contained navigation system[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2014: 2-3.
- [2] 席崇宾, 黄荣, 周健, 等. 基于液体透镜的激光多普勒信号品质因子增强技术[J]. 中国激光, 2021, 48(7): 0704003.
Xi C B, Huang R, Zhou J, et al. Quality factor enhancement technology of laser Doppler signal based on liquid lens[J]. Chinese Journal of Lasers, 2021, 48(7): 0704003.
- [3] 刘帆, 金世龙. 激光多普勒测速仪中的频谱分析技术[J]. 红外与激光工程, 2012, 41(6): 1462-1470.
Liu F, Jin S L. Frequency analysis technology in laser Doppler velocimeter[J]. Infrared and Laser Engineering, 2012, 41(6): 1462-1470.
- [4] 华敏, 陈剑云. 一种高精度六谱线插值 FFT 谐波与间谐波分析方法[J]. 电力系统保护与控制, 2019, 47(11): 9-15.
Hua M, Chen J Y. A high precision approach for harmonic and interharmonic analysis based on six-spectrum-line interpolation FFT[J]. Power System Protection and Control, 2019, 47(11): 9-15.
- [5] Yao W X, Teng Z S, Tang Q, et al. Measurement of power system harmonic based on adaptive Kaiser self-convolution window [J]. IET Generation Transmission Distribution, 2016, 10(2): 390-398.
- [6] 李媛, 王海云, 王维庆, 等. 基于 Hanning 和 Nuttall 的混合卷积窗谐波分析方法[J]. 太阳能学报, 2018, 39(12): 3363-3370.
Li Y, Wang H Y, Wang W Q, et al. Harmonic analysis method of hybrid convolution window based on Hanning and Nuttall[J]. Acta Energetica Solaris Sinica, 2018, 39(12): 3363-3370.
- [7] Fan L, Qi G Q. Frequency estimator of sinusoid based on interpolation of three DFT spectral lines[J]. Signal Processing, 2018, 144: 52-60.
- [8] Jin T, Chen Y Y, Flesch R C C. A novel power harmonic analysis method based on Nuttall-Kaiser combination window double spectrum interpolated FFT algorithm[J]. Journal of Electrical Engineering, 2017, 68(6): 435-443.
- [9] 陈倩, 王维庆, 王海云, 等. 基于混合卷积窗四谱线插值和改进全相位的谐波检测组合优化算法[J]. 电力系统及其自动化学报, 2020, 32(8): 1-6.
Chen Q, Wang W Q, Wang H Y, et al. Combined optimization algorithm based on mixed convolution window four-line interpolation and improved all-phase harmonic detection[J]. Proceedings of the CSU-EPSS, 2020, 32(8): 1-6.
- [10] 张恒煜. 电力系统间谐波检测方法与实现[D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2018: 22-28.
Zhang H Y. Method and realization of interharmonics detection in power system[D]. Harbin: Harbin University of Science and Technology, 2018: 22-28.
- [11] 李振华, 胡廷和, 杜亚伟, 等. 基于窗函数和谱线插值理论的谐波检测方法[J]. 电力系统保护与控制, 2019, 47(22): 78-88.
Li Z H, Hu T H, Du Y W, et al. Harmonic detection method based on the theory of windows and spectrum line interpolation[J]. Power System Protection and Control, 2019, 47(22): 78-88.
- [12] 王保帅, 肖霞. 一种用于谐波分析的高精度多谱线插值算法[J]. 电工技术学报, 2018, 33(3): 553-562.
Wang B S, Xiao X. A high accuracy multi-spectrum-line interpolation algorithm for harmonic analysis[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2018, 33(3): 553-562.
- [13] 刘杰, 张耿, 冯向朋, 等. 基于三次样条拟合插值的高精度质心定位方法[J]. 光学学报, 2021, 41(12): 1212004.
Liu J, Zhang G, Feng X P, et al. High precision centroid location algorithm based on cubic spline fitting and interpolation[J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(12): 1212004.
- [14] 崔昊, 郭锐, 李兴强, 等. 基于非线性拟合的激光三角位移传感器标定方法[J]. 中国激光, 2020, 47(9): 0904003.
Cui H, Guo R, Li X Q, et al. Calibration of laser triangular displacement sensor based on nonlinear fitting [J]. Chinese Journal of Lasers, 2020, 47(9): 0904003.
- [15] 高茂庭, 冯莉. 基于遗传算法的 B 样条曲线拟合改进算法[J]. 计算机应用研究, 2019, 36(9): 2840-2844.
Gao M T, Feng L. Improved B-spline curve fitting algorithm based on genetic algorithm[J]. Application Research of Computers, 2019, 36(9): 2840-2844.
- [16] 张旭东. 电力系统谐波检测算法研究[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2020: 60-61.
Zhang X D. Research on harmonic detection algorithm in

- power system[D]. Xuzhou: China University of Mining and Technology, 2020: 60-61.
- [17] 卢治功, 贺鹏, 职连杰, 等. 基于最小二乘法多项式拟合三角测量模型研究[J]. 应用光学, 2019, 40(5): 853-858.
Lu Z G, He P, Zhi L J, et al. Laser triangulation measurement model based on least square polynomial fitting method[J]. Journal of Applied Optics, 2019, 40(5): 853-858.
- [18] 海啸, 朱志杰. 最小二乘法和三次样条曲线拟合的比色测温误差修正对比分析[J]. 激光杂志, 2015, 36(6): 72-76.
Hai X, Zhu Z J. The comparison between the least square method and cubic spline interpolation in errors of colorimetry temperature measurement[J]. Laser Journal, 2015, 36(6): 72-76.
- [19] 赵卫东, 唐顾杰, 宋江一. 基于改进 JPS 与三次 B 样条插值的路径规划算法[J]. 安徽工业大学学报(自然科学版), 2022, 39(2): 189-195.
Zhao W D, Tang G J, Song J Y. Path planning algorithm based on improved JPS and cubic B-spline interpolation[J]. Journal of Anhui University of Technology (Natural Science), 2022, 39(2): 189-195.
- [20] 赵洪博. 基于多普勒效应的速度信号探测与频率解算算法研究[D]. 青岛: 青岛科技大学, 2019: 33-55.
Zhao H B. Research on speed signal detection and frequency algorithm based on Doppler effect[D]. Qingdao: Qingdao University of Science & Technology, 2019: 33-55.