第 60 卷 第 16 期/2023 年 8 月/激光与光电子学进展 研究论文

激光与光电子学进展 先进成像

基于局部截断核范数的高光谱图像去噪优化

汪海晨[1]，王生旗[1]，胡学友[2*]

[1]合肥学院能源材料与化工学院，安徽 合肥 230601；

[2]合肥学院先进制造工程学院，安徽 合肥 230601

摘要 高光谱图像(HSI)在采集过程中易受到环境或者采集设备的干扰，遥感数据信息会受到大幅的损失，因此高光谱图像去噪是图像预处理的基本问题。设计去噪算法，将HSI划分为局部等分块，采用低秩矩阵约束表征局部特征，并在其基础上利用截断核范数最小化方法来分离出稀疏噪声，全局利用空间-光谱全变分正则化实现分离密度噪声和维持空间-光谱平滑性的目的，两者结合能高效去除高斯噪声、椒盐噪声等的混合噪声。对所提优化算法与其他4种近几年发表的去噪算法进行对比，平均结构相似度提高0.13，平均峰值信噪比提高1.10 dB，运用到不同强度的单一类型噪声中，平均结构相似度也能提高0.10。在实际图像的放大对比中，所提优化算法也有着明显的噪点去除效果。实验结果证明，所提方法对高光谱图像在局部特征表述上更加贴近，结合全局正则化方法后获得更明显的去噪效果，能够对高密度噪声和稀疏噪声有清除作用。

关键词 高光谱遥感图像；图像复原；截断核范数；局部低秩；全变分

中图分类号 TP751.1 **文献标志码** A **DOI**：10.3788/LOP222268

Optimization of Hyperspectral Image Denoising Based on Local Truncated Nuclear Norm

Wang Haichen[1], Wang Shengqi[1], Hu Xueyou[2*]

[1]*College of Energy Materials and Chemical Engineering, Hefei University, Hefei* 230601, *Anhui, China*;

[2]*School of Advanced Manufacturing Engineering, Hefei University, Hefei* 230601, *Anhui, China*

Abstract Hyperspectral images (HSI) are vulnerable to interference from the environment or the equipment during the acquisition process, causing a significant loss of remote sensing data. Therefore, hyperspectral image denoising is a fundamental issue in image preprocessing. In this paper, a denoising algorithm is designed, which divides HSI into local equal blocks and uses low-rank matrix constraints to characterize the local features. Moreover, the designed algorithm uses truncated nuclear norm minimization and global spatial-spectral total variation regularization to separate sparse and high-density noise, while maintaining spatial-spectral smoothness. The combination of the two methods can effectively remove mixed noises, including Gaussian and salt and pepper noises. The proposed optimization algorithm is compared with four recently published denoising algorithms, showing that the average structure similarity and average peak-signal-to-noise ratio are improved by 0.13 and 1.10 dB, respectively. Application of algorithms to a single noise with different intensity demonstrates that the average structure similarity is also improved by 0.10. The proposed method demonstrates a distinct noise removal effect in the amplification and contrast of actual images. Experimental results show that the proposed method is close to the local feature representation of hyperspectral images, which combined with the global regularization method, can facilitate a more obvious denoising effect and eliminate high-density and sparse noises.

Key words hyperspectral remote sensing image; image restoration; truncated nuclear norm; local low rank; total variation

1 引 言

高光谱图像(HSI)是由连续窄带的谱层图像构成的，具有丰富的光谱信息[1]，在遥感领域有着举足轻重的作用。而图像处理效果的优劣会影响遥感图像信息的提取。高光谱图像主要依靠飞行器搭载的视觉传感

收稿日期：2022-08-12；**修回日期**：2022-09-13；**录用日期**：2022-10-13；**网络首发日期**：2022-11-04

基金项目：合肥学院“信息与通信工程”重点学科建设项目(2018xk03)

通信作者：*xueyouhu@hfuu.edu.cn

器与光谱信号发射器接收图像信号而获得[2]，但在接收信号的过程中，由于数据是从高空采集的，受到空气中颗粒、反射光等环境影响，加上采集设备自身缺陷，往往会存在各种噪声信号干扰的情况，从而使得图像处理生成时会产生图像模糊等现象，无法准确获取图像中元素的实际信息。因此，图像去噪已是高光谱遥感图像处理中不可或缺的一环。

目前流行的图像去噪框架主要有基于全变分和基于低秩分解的方法。全变分（TV）是图像处理演化过程中的经典模型。Rudin 等[3]首先提出全变分正则化模型，该模型可以解决灰度图的降噪问题。在文献[4]中，TV 正则化进一步发展为基于 TV 的彩色图像复原模型，但图像留存较多噪声信息的干扰且图像细节损失严重。而后，Yuan 等[5]提出了一种采用光谱-空间自适应 TV 模型的 HSI 复原算法，其能根据不同波段中的噪声强度自适应调整去噪能力。Chang 等[6]提出各向异性空间-光谱全变分正则化（SSTV）模型，以提高光谱和空间维度上的解的平滑度。尽管 TV 正则化方法在去除噪声上效果显著，图像复原度大幅提升，但是在细节处无法清晰表达图像信息。而另一种方法，基于低秩分解的去噪方法则是在高维度数据中获取低维结构，应用于图像去噪较成熟的方法。由于高光谱图像在空间-光谱域具有强相关性，即存在低秩特性，噪声对应于图像矩阵高秩部分，因而提取低秩结构便能有效去除噪声。在低秩模型中，小波分解[7]、TV 正则化、稀疏表示、主成分分析[8]等经典方法都能取得一定的去噪效果。这些方法都将整个图像建模成低秩结构，并对图像施加合理的正则化约束。He 等[9]根据低秩分解与 TV 正则化条件构建鲁棒主成分分析（RPCA）模型，求解出去噪模型。Zhang 等[10]和 Xie 等[11]首次将 HSI 分割成相互重叠的三维块，然后利用 RPCA 模型依次对每个块进行低秩约束。Wang 等[12]则通过聚类斑块组的低秩表示来复原块状图像。这些方法在面对一定强度的混合噪声时并不能获得相应去噪的效果。

核范数是常见低秩表示的方法，其矩阵特征值之和在一定程度上能够描述图像特征，但由于秩算子是非凸且不连续的，因此单纯的核范数并不是特征的较好近似[13]。根据近年研究，常常利用凸松弛替代传统秩函数优化，其中较为经典的方法是核范数最小化（NNM），其后还有奇异值阈值法（SVT）[14]、加权核范数最小化（WNNM）[15]等各种改进策略。但基于核范数最小化的现有方法具有明显缺点：所有奇异值同幅度的最小化使得非零奇异值对秩函数都产生着相似的作用，因此在实际测试中去噪效果不理想。而截断核范数（TNN）通过矩阵相关度较高的奇异值表征图像特征，提高了图像的复原度。近几年，众多文献研究表明 TNN 能有效提升去噪效果。Geng 等[16]将群稀疏表示和截断核范数最小化相结合，通过 augmented Lagrangian method（ALM）[17]加速收敛，达到去噪效果。Liu 等[18]运用截断核范数正则化（TNNR）方法，通过对残差矩阵的行分配不同的权重，加速 TNNR 方法的收敛。

本文将 TNN 和局部低秩的去噪模型结合，通过全局正则化约束，提出基于局部截断核范数与 local low-rank matrix recovery and global spatial-spectral total variation（LLRGTV）的高光谱图像去噪算法，即 TNN-LLRGTV。先对现阶段的经典去噪算法进行评估，再将去噪问题简化为数学模型，根据分析采用 LLRGTV 去噪模型，结合提出的基于局部截断核范数的思想对去噪图像进行优化求解，并通过实验证明 TNN-LLRGTV 算法的优势。TNN-LLRGTV 算法不仅提升了图像的清晰程度，同时保留了纹理细节，优化了噪点。

2　高光谱数据模型

2.1　观测模型

通常 HSI 图像被各种噪声污染，但噪声主要为高斯噪声，存在死线噪声、脉冲噪声和条纹噪声的情况。观测模型可表示为

$$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{N}, \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{O}\in\mathbf{R}^{m\times n\times p}$代表观测图像数据；$\boldsymbol{L}\in\mathbf{R}^{m\times n\times p}$代表去噪图像数据；$\boldsymbol{S}\in\mathbf{R}^{m\times n\times p}$代表稀疏噪声数据，包括死线噪声、脉冲噪声、条纹噪声等；$\boldsymbol{N}\in\mathbf{R}^{m\times n\times p}$代表密度噪声，包括高斯噪声和泊松噪声等；$m$ 和 n 表示单一波段图像尺寸，p 表示图像波段数。

2.2　基于局部低秩与全局正则化的图像去噪模型

HSI 的光谱相邻波段通常表现出强相关性，在空间维度上，相邻像素也通常具有较高的相关性，这两者都揭示了高光谱图像的低秩结构。因此，以线性混合图像模型（LMI）的方式，相应的无噪 HSI 图像 $\boldsymbol{L}$ 可以表示为 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{AM}$，其中 $\boldsymbol{L}\in\mathbf{R}^{m\times n\times p}$ 是无噪图像 $\boldsymbol{L}$ 的 Casorati 矩阵（其列包含 HSI 的矢量化带的矩阵），$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n\times r}$ 和 $\boldsymbol{M}\in\mathbf{R}^{r\times p}$ 是矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的低秩分解矩阵，期望秩 r 是信号子空间的维数。因此矩阵 $\boldsymbol{L}$ 可表述为秩约束 RPCA 优化问题：

$$\min_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{S}}\|\boldsymbol{L}\|_*+\lambda\|\boldsymbol{S}\|_1\ \text{s.t.}\ \|\boldsymbol{O}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}\|_F^2\leqslant\varepsilon,\ \operatorname{rank}(\boldsymbol{L})\leqslant r, \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 分别是观测图像 O、稀疏噪声 S 和密度噪声 N 的 Casorati 矩阵；λ 是稀疏部分的正则化参数；$\|\boldsymbol{L}\|_*$ 是核范数；ε 表示停止标准。依照式（2），此模型考虑到各种噪声并取值，使噪声达到最小值，理论上可以有效去除混合噪声，但细节丢失较为严重，甚至有模糊块存在。因为其空间域的大小远远大于 p，因此发展为局部低秩的模型。

利用算子 $\boldsymbol{R}_{i,j}:\boldsymbol{L}\rightarrow\boldsymbol{L}_{i,j}$，其中 $\boldsymbol{R}_{i,j}$ 表示在 HSI 中的 $\boldsymbol{L}\in\mathbf{R}^{m\times n\times p}$，在 $m\times n$ 平面中选取 (i,j) 处的长方体算子，$\boldsymbol{L}_{i,j}$ 表示相应的 Casorati 矩阵，从 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 提取出 $\boldsymbol{L}_{i,j}$ 和 $\boldsymbol{S}_{i,j}$，并且为了保持整个 HSI 的空间和光谱平滑度，把 SSTV 正则化加入局部低秩的 RPCA 模型，构成基

于LLRGTV的去噪模型[19]。该模型可表示为

$$\min_{L,S}\sum_{i,j}(\|L_{i,j}\|_*+\lambda\|S_{i,j}\|_1)+\tau\|L\|_{\mathrm{SSTV}}$$
$$\text{s.t. }\|O_{i,j}-L_{i,j}-S_{i,j}\|_F^2\leqslant\varepsilon,\ \mathrm{rank}(L_{i,j})\leqslant r,\quad(3)$$

式中：τ表示全局SSTV正则化参数；r表示对$L_{i,j}$的期望秩。通过这种方式，可以进一步去除局部低秩部分中的少量噪声，并在全局有效重建HSI的边缘信息，全局重建的HSI反馈帮助分解出局部低秩去噪分量和稀疏噪声，这个过程交替进行，直到收敛。

3 图像去噪模型求解与优化

3.1 截断核范数(TNN)

LLRGTV模型虽然结合全局正则化和局部低秩的特性，使得在有效去除噪声的同时又能保证全局边界信息，但处理过程中存在对面片噪声采用核范数最小化的思想。由于同时最小化所有特征值，核范数可能会不太接近秩函数。图像去噪任务中，每个面片噪声也同样包含在低秩矩阵的相对较低的特征值中，因此采用截断核范数的思想能帮助模型靠近最优解。

截断核范数方法主要选取一个截断秩t，对于给定矩阵$T\in\mathbf{R}^{m\times n}$，选择其最小的$\min(m,n)-t$部分信息。截断核范数可用$\|X\|_{t,*}$表示，表达为

$$\|X\|_{t,*}=\sum_{i=t+1}^{\min(m,n)}\sigma_i(X)=$$
$$\sum_{i=1}^{\min(m,n)}\sigma_i(X)-\sum_{i=1}^{t}\sigma_i(X)=\|X\|_*-\|X\|_{t^C,*},\quad(4)$$

式中：$\sigma_i(\cdot)$表示矩阵奇异值分解后的第i个最大的奇异值。在所提LLRGTV模型中，添加TNN后，可描述为

$$\min_{L,S}\sum_{i,j}(\|L_{i,j}\|_{t,*}+\lambda\|S_{i,j}\|_1)+\tau\|L\|_{\mathrm{SSTV}}$$
$$\text{s.t. }\|O_{i,j}-L_{i,j}-S_{i,j}\|_F^2\leqslant\varepsilon,\ \mathrm{rank}(L_{i,j})\leqslant r,\quad(5)$$

式中：当$t=\min(m,n)$时，式(5)则成为LLRGTV模型；当$\tau=0$时，式(5)则成为局部低秩分解模型，其边缘信息损失较严重；当$\lambda=0$时，式(5)则对稀疏噪声去除较弱，影响图像清晰度。

3.2 TNN-LLRGTV模型求解与优化

式(5)是以鲁棒主成分分析(RPCA)为模型基础的，所以主要采用 alternating direction method of multipliers(ADMM)算法[20]进行模型求解，该方法能有效解决核范数最小化和核函数组合的凸优化问题。

式(5)中，根据各向异性全变分范数(anisotropic TV)，SSTV全局部分定义为

$$\|L\|_{\mathrm{SSTV}}=\|D_iL\|_1+\|D_jL\|_1+\|D_bL\|_1,\quad(6)$$

式中：D_i和D_j分别是水平和垂直一阶离散差分的线性算子；D_b为沿光谱层方向的一阶差分算子，通过增强空间分段平滑性和光谱一致性来去除噪声。因此可将式(5)具体表述成有约束问题的优化：

$$\min_{L,S,J,X,U}\sum_{i,j}(\|L_{i,j}\|_{t,*}+\lambda\|S_{i,j}\|_1)+\tau\|U\|_1$$
$$\text{s.t. }L_{i,j}=J_{i,j},\ J=X,\ U=DX,$$
$$\|O_{i,j}-L_{i,j}-S_{i,j}\|_F^2\leqslant\varepsilon,\ \mathrm{rank}(L_{i,j})\leqslant r,\quad(7)$$

式中：各向异性TV算子$D=[\tau_iD_i,\tau_jD_j,\tau_bD_b]$，其中$\tau_i$，$\tau_j$和$\tau_b$分别是空间和光谱差分参数；$J\in\mathbf{R}^{m\times n\times p}$、$X\in\mathbf{R}^{m\times n\times p}$及$U\in\mathbf{R}^{m\times n\times p\times 3}$都是模型求解的过程参数。通过ALM算法[17]将式(7)转变成无约束的增广拉格朗日乘子式：

$$\min l(L,S,J,X,U)=\min_{L,S,J,X,U}\sum_{i,j}(\|L_{i,j}\|_{t,*}+\lambda\|S_{i,j}\|_1+$$
$$\langle y_{i,j}^O,O_{i,j}-L_{i,j}-S_{i,j}\rangle+\frac{\mu}{2}\|O_{i,j}-L_{i,j}-S_{i,j}\|_F^2+$$
$$\frac{\mu}{2}\|L_{i,j}-J_{i,j}\|_F^2)+\tau\|U\|_1+\langle y,U-DX\rangle+$$
$$\langle y^X,J-X\rangle+\frac{\mu}{2}(\|U-DX\|_2^2+\|J-X\|_2^2)$$
$$\text{s.t. }\mathrm{rank}(L_{i,j})\leqslant r,\quad(8)$$

式中：μ是损失参数；$y_{i,j}^O$、y和y^X为拉格朗日乘子。将式(8)分成局部和全局的两大问题模型，在第$k+1$次迭代中，变量更新可表示为

$$(L^{k+1},S^{k+1})=\arg\min_{S,L}l(L,S,J^k)\quad\text{s.t. }\mathrm{rank}(L_{i,j})\leqslant r,\quad(9)$$
$$(J^{k+1},X^{k+1},U^{k+1})=\arg\min_{J,X,U}l(L_{i,j}^{k+1},J,X,U),\quad(10)$$

式(9)可看作局部面片的低秩矩阵分解问题，式(10)是进行全局图像重建的问题。

1)(L,S)的局部低秩矩阵分解优化。对于局部问题，可选择其中一个面片的优化问题进行研究，表述为

$$\arg\min_{L,S}\sum_{i,j}(\|L_{i,j}\|_{t,*}+\lambda\|S_{i,j}\|_1+\langle y_{i,j}^O,O_{i,j}-L_{i,j}-S_{i,j}\rangle+$$
$$\frac{\mu}{2}\|O_{i,j}-L_{i,j}-S_{i,j}\|_F^2+\frac{\mu}{2}\|L_{i,j}-J_{i,j}\|_F^2)$$
$$\text{s.t. }\mathrm{rank}(L_{i,j})\leqslant r。\quad(11)$$

针对式(11)，研究$L_{i,j}$和$S_{i,j}$的优化解，分成$L_{i,j}$子问题和$S_{i,j}$子问题。对于$L_{i,j}$子问题，根据优化乘子式可写作

$$\arg\min_{\mathrm{rank}(L_{i,j})\leqslant r}\left\{\|L_{i,j}\|_{t,*}+\frac{\mu}{2}\|O_{i,j}-L_{i,j}-S_{i,j}+y_{i,j}^O/\mu\|_F^2+\frac{\mu}{2}\|L_{i,j}-J_{i,j}\|_F^2\right\}=\arg\min_{\mathrm{rank}(L_{i,j})\leqslant r}\left\{\|L_{i,j}\|_{t,*}+\frac{\mu}{2}\times2\times\|L_{i,j}-[(O_{i,j}-S_{i,j}+J_{i,j})/2+y_{i,j}^O/(2\mu)]\|_F^2\right\}。\quad(12)$$

截断核范数的定义和凸差(DC)理论[21]可以写作

$$\|L_{i,j}\|_{t,*}=\|L_{i,j}\|_*-\|L_{i,j}\|_{t^C,*},\quad(13)$$

$$\begin{cases}H(L_{i,j})=\lambda\|L_{i,j}\|_{t^C,*}\\ G(L_{i,j})=\lambda\|L_{i,j}\|_*+\mu\left\|L_{i,j}-[(O_{i,j}-S_{i,j}+J_{i,j})/2+y_{i,j}^O/(2\mu)]\right\|_F^2\end{cases},\quad(14)$$

通过迭代得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{Z}_k = H(\boldsymbol{L}_k), \\ \boldsymbol{L}_{k+1} = \arg\min G(\boldsymbol{L}_{i,j}) - \left\langle \boldsymbol{Z}_k, \boldsymbol{L}_{i,j} \right\rangle 。\end{cases} \tag{15}$$

根据式(15),可求解出$\boldsymbol{L}$的迭代式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_{k+1} = {} & \arg\min G(\boldsymbol{L}_{i,j}) - \left\langle \boldsymbol{Z}_k, \boldsymbol{L}_{i,j} \right\rangle = \operatorname{argmin}\Big\{ \lambda \|\boldsymbol{L}_{i,j}\|_* + \\ & \mu \|\boldsymbol{L}_{i,j} - \left[(\boldsymbol{O}_{i,j} - \boldsymbol{S}_{i,j} + \boldsymbol{J}_{i,j})/2 + \boldsymbol{y}^{o}_{i,j}/(2\mu) \right] \|_{\mathrm{F}}^2 \Big\} - \\ & \left\langle \boldsymbol{Z}_k, \boldsymbol{L}_{i,j} \right\rangle = \operatorname{argmin}\Big\{ \lambda \|\boldsymbol{L}_{i,j}\|_* + \mu \|\boldsymbol{L}_{i,j} - \\ & \left[(\boldsymbol{O}_{i,j} - \boldsymbol{S}_{i,j} + \boldsymbol{J}_{i,j})/2 + \left(\boldsymbol{y}^{o}_{i,j} + 2\boldsymbol{Z}_k \right)/(2\mu) \right] \|_{\mathrm{F}}^2 \Big\} = \\ & D_{\lambda/\mu}\left[\boldsymbol{L}_k + (\boldsymbol{O}_{i,j} - \boldsymbol{S}_{i,j} + \boldsymbol{J}_{i,j})/2 + (\boldsymbol{y}^{o}_{i,j} + 2\boldsymbol{Z}_k)/(2\mu) \right] 。\end{aligned} \tag{16}$$

对于$\boldsymbol{S}_{i,j}$子问题,同样地,与$\boldsymbol{S}$有关的优化乘子式为

$$\begin{aligned} \arg\min_{\boldsymbol{S}_{i,j}} \left(\lambda \|\boldsymbol{S}_{i,j}\|_1 + \frac{\mu}{2} \|\boldsymbol{O}_{i,j} - \boldsymbol{L}_{i,j} - \boldsymbol{S}_{i,j} + \boldsymbol{y}^{o}_{i,j}/\mu\|_{\mathrm{F}}^2 \right) = \\ R_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{O}_{i,j} - \boldsymbol{L}_{i,j} + \boldsymbol{y}^{o}_{i,j}/\mu), \end{aligned} \tag{17}$$

式中:$R_{\lambda/\mu}(\cdot)$是软阈值算子。

2)$(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$的全局图像重建优化。其优化乘子式为

$$\begin{aligned} \arg\min l(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}) = \min_{\boldsymbol{J},\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}} \sum\nolimits_{i,j} \left(\frac{\mu}{2} \|\boldsymbol{L}_{i,j} - \boldsymbol{J}_{i,j}\|_{\mathrm{F}}^2 \right) + \\ \tau \|\boldsymbol{U}\|_1 + \left\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{U} - D\boldsymbol{X} \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{y}^{x}, \boldsymbol{J} - \boldsymbol{X} \right\rangle + \\ \frac{\mu}{2} \left(\|\boldsymbol{U} - D\boldsymbol{X}\|_2^2 + \|\boldsymbol{J} - \boldsymbol{X}\|_2^2 \right), \end{aligned} \tag{18}$$

其可分为3个子问题。

对于$\boldsymbol{J}$子问题,优化乘子式为

$$\arg\min_{\boldsymbol{J}} \left[\frac{\mu}{2} \|\boldsymbol{J} - \boldsymbol{X} + \boldsymbol{y}^{x}/\mu\|_2^2 + \sum\nolimits_{i,j} \left(\frac{\mu}{2} \|\boldsymbol{L}_{i,j} - \boldsymbol{J}_{i,j}\|_{\mathrm{F}}^2 \right) \right], \tag{19}$$

可根据凸函数的闭式解求得

$$\boldsymbol{J} = \left(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{y}^{x}/\mu + \sum\nolimits_{i,j} \boldsymbol{R}_{i,j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{L}_{i,j} \right) / \left(1 + \sum\nolimits_{i,j} \boldsymbol{R}_{i,j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{i,j} \right)。 \tag{20}$$

对于$\boldsymbol{X}$子问题,乘子式表达为

$$\arg\min_{\boldsymbol{X}} \left(\frac{\mu}{2} \|\boldsymbol{U} - D\boldsymbol{X} + \boldsymbol{y}/\mu\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\boldsymbol{J} - \boldsymbol{X} + \boldsymbol{y}^{x}/\mu\|_2^2 \right), \tag{21}$$

根据法向方程和快速傅里叶变换(FFT)方法可求解

$$\boldsymbol{X} = F^{-1}\left\{ \frac{F\left[(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{y}^{x}/\mu) + D^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{y}/\mu) \right]}{1 + \left[F(\tau_i D_i) \right]^2 + \left[F(\tau_j D_j) \right]^2 + \left[F(\tau_b D_b) \right]^2} \right\}, \tag{22}$$

式中:$F(\cdot)$代表快速傅里叶变换;F^{-1}表示快速傅里叶逆变换;D^{T}是D的反算子。

对于$\boldsymbol{U}$子问题,乘子式表达为

$$\arg\min_{\boldsymbol{U}} \left(\tau \|\boldsymbol{U}\|_1 + \frac{\mu}{2} \|\boldsymbol{U} - D\boldsymbol{X} + \boldsymbol{y}/\mu\|_2^2 \right), \tag{23}$$

同样可利用软阈值的方法得出

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}_1 = R_{\tau/\mu}(\tau_i D_i \boldsymbol{X} - \boldsymbol{y}_1/\mu) \\ \boldsymbol{U}_2 = R_{\tau/\mu}(\tau_j D_j \boldsymbol{X} - \boldsymbol{y}_2/\mu), \\ \boldsymbol{U}_3 = R_{\tau/\mu}(\tau_b D_b \boldsymbol{X} - \boldsymbol{y}_3/\mu) \end{cases} \tag{24}$$

其中拉格朗日乘子迭代式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{o}_{i,j} = \boldsymbol{y}^{o}_{i,j} + \mu(\boldsymbol{O}_{i,j} - \boldsymbol{L}_{i,j} - \boldsymbol{S}_{i,j}) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \mu(\boldsymbol{U} - D\boldsymbol{X}) \\ \boldsymbol{y}^{x} = \boldsymbol{y}^{x} + \mu(\boldsymbol{J} - \boldsymbol{X}) \end{cases} 。 \tag{25}$$

式(16)(17)(20)(22)(24)(25)在算法中经过多次迭代,使图像数据更贴近真实数据,从而达到复原效果。TNN-LLRGTV算法流程如下所示。

输入:$M \times N \times P$尺寸的矩阵$\boldsymbol{O}$,期望秩r,截断秩t,面片大小$m \times n$,停止标准ε,正则化参数λ和τ

输出:去噪图像数据$\boldsymbol{X}$

初始化:$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{X} = \boldsymbol{S} = \boldsymbol{J} = 0$, $\boldsymbol{U} = 0$, $\boldsymbol{y}^{o}_{i,j}$, $\boldsymbol{y}^{x}$, $\boldsymbol{y} = 0$, $\mu = 10^{-2}$, $\mu_{\max} = 10^{6}$, $\rho = 1.5$,还有$k = 0$

各参数根据式(16)(17)(20)(22)(24)(25)进行更新迭代,对参数$\mu = \min(\rho\mu, \mu_{\max})$进行迭代。当满足条件$\max\left\{ \|\boldsymbol{O}_{i,j} - \boldsymbol{L}^{k+1}_{i,j} - \boldsymbol{S}^{k+1}_{i,j}\|_\infty, \|\boldsymbol{J}^{k+1} - \boldsymbol{X}^{k+1}\|_\infty, \|\boldsymbol{U}^{k+1} - D\boldsymbol{X}^{k+1}\|_\infty \right\} \leqslant \varepsilon$时,迭代停止,达到所需去噪精度。

4 去噪方法参数分析

TNN-LLRGTV算法中参数众多,根据对LLRGTV算法的描述,选择停止标准ε为10^{-5},正则化参数为$\lambda = 0.2$和$\tau = 0.005$。矩阵$\boldsymbol{O}$可由图像集直接获得,而面片大小则需要根据图像集大小选择。除此之外,截断秩t和期望秩r则是需要在进行对比实验之前要确定的参数。

选取图像复原中的重要指标对图像去噪效果进行评估。其中结构相似度(SSIM)取值0~1,衡量两幅图像的相似程度;峰值信噪比(PSNR)是衡量两幅图像误差值的指标。在Pavia University光谱图像集上对算法的t和r进行测试,结果如图1~4所示。由图1可知:截断秩t为1~6时,SSIM差距不大;为6~10时,

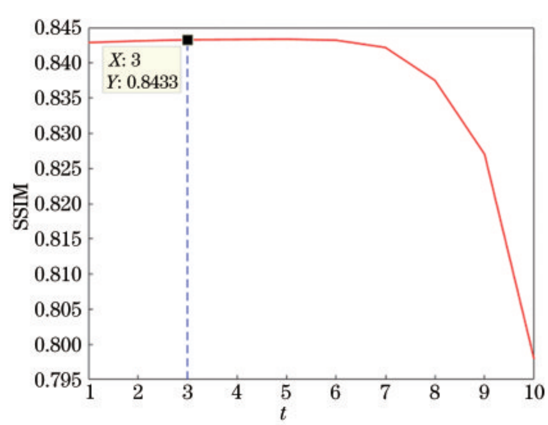

图1 不同截断值t下的SSIM

Fig. 1 SSIM under different trancated values t

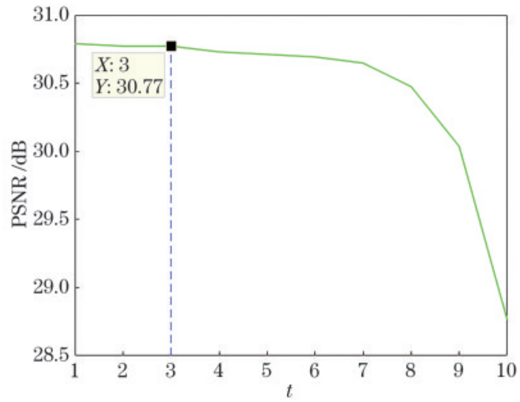

图 2　不同截断值 t 下的 PSNR

Fig. 2　PSNR under different truncated values t

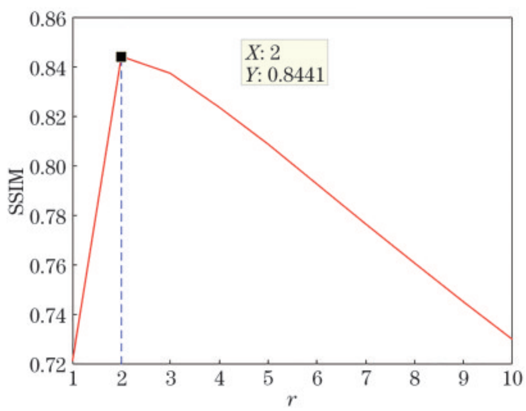

图 3　不同期望秩 r 下的 SSIM

Fig. 3　SSIM under different expected rank r

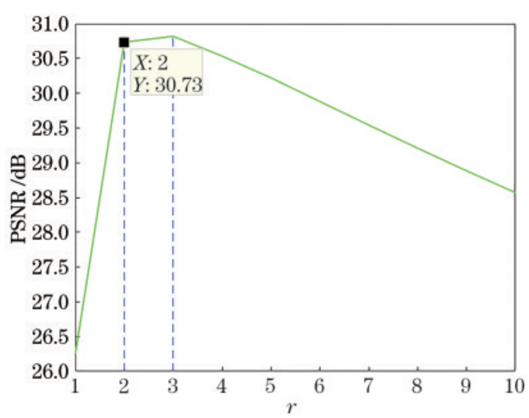

图 4　不同期望秩 r 下的 PSNR

Fig. 4　PSNR under different expected rank r

SSIM 值减小。由图 2 可知：截断秩 t 为 1～3 时，PSNR 差距不大；大于 3 后，PSNR 开始有下滑。由于本测试中选取的噪声强度较小，是参数误差不大的原因，因此选择 $t=3$。

同样地，在同一图像集中测试期望秩大小对指标的影响。根据图 3 和图 4，当期望秩 $r=2$ 时，SSIM 值最大，且 PSNR 值与 $r=3$ 时 PSNR 相差不大，因此选择期望秩 $r=2$。

5　实验分析与讨论

分别通过模拟实验和真实实验对所提方法进行验证。为了使实验的结果更具有公正性和普遍性，选取了两种真实测试的高光谱图像集进行测试。其一，是 Pavia University 遥感图像集（由 ROSIS 传感器在意大利帕维亚上空收集），波段数有 103，整个图像空间域为 610×340 像素，空间分辨率为 1.3 m。由于图像数据较大，选取其中部分（大小为 340×340×103）作为模拟噪声测试图像集和真实图像。其二，是 Salinas 遥感图像集（由 AVIRIS 传感器拍摄加州萨利纳斯山谷得到），波段数有 224，空间尺寸为 512×217，用于真实图像测试实验，选取其中尺寸为 210×210 的图像部分进行测试。

此外，为了获得良好的去噪对比效果，除了 LLRGTV 算法与改进的 TNN-LLRGTV 算法，选取几个近几年发表效果较好的去噪算法一起比较，有 noise-adjusted iterative low-rank matrix approximation（NAILRMA）方法[22]、low-rank matrix recovery（LRMR）方法[10]、total variation regularized low-rank tensor decomposition（LRTDTV）方法[23]。

5.1　模拟带噪图像实验

模拟实验中，在对原图像集 Pavia University 进行归一化处理后添加相应的噪声，然后对带噪图像进行去噪处理。选取的噪声为高斯噪声和稀疏噪声，它们是常见图像噪声的类型。

所选取的高斯白噪声的方差强度和稀疏噪声强度分别为 $G\in\{0.04, 0.08, 0.12\}$ 和 $S\in\{0.10, 0.15, 0.20\}$。采用不同方法对添加等强度混合噪声的图像进行去噪处理，结果如表 1 所示，其中 SSIM 与 PSNR 分别是图像各波段相似度和峰值信噪比的平均值，加粗数字表示最优。

根据表 1 可以看出：随着噪声强度增加，所有方法的 SSIM 值和 PSNR 值都在下降；所提 TNN-LLRGTV 算法的指标都比其他算法高。表 2 为对单一噪声的去噪结果。对于只添加高斯白噪声的图像而言，TNN-LLRGTV 的去噪指标依然是最好的，并且相比 LLRGTV 算法有着较大的提高；在只添加稀疏噪声的图像中，LLRGTV 算法的结果较好，与所提算法相差不大。因此可大致分析出，所提 TNN-LLRGTV 算法对高斯白噪声具有较好的去噪效果。

图 5 和图 6 则是 LLRGTV 与 TNN-LLRGTV 算法各波段去噪参数的比较，噪声选取的是较大的混合噪声（$G=0.12, S=0.20$），相比 LLRGTV，所提 TNN-LLRGTV 算法的参数在所有波段都明显有较大幅度提升。

表1　对等强度混合噪声的去噪结果

Table 1　Denoising result for mixed noise with equal intensity

Noise intensity	Parameter	NAILRMA	LRMR	LRTDTV	LLRGTV	TNN-LLRGTV
G=0. 04,	SSIM	0. 6041	0. 6602	0. 6512	0. 7809	**0. 8445**
S=0. 10	PSNR /dB	22. 3790	26. 5979	22. 7146	29. 7702	**30. 7610**
G=0. 08,	SSIM	0. 4627	0. 5225	0. 5313	0. 6740	**0. 7706**
S=0. 15	PSNR /dB	18. 6715	23. 7096	18. 9603	27. 6505	**28. 7855**
G=0. 12,	SSIM	0. 3652	0. 4171	0. 4399	0. 5753	**0. 7051**
S=0. 20	PSNR /dB	16. 3544	21. 5243	16. 5659	25. 3208	**26. 4233**

表2　对单一噪声的去噪结果

Table 2　Denoising results for single-type noise

Noise intensity	Parameter	NAILRMA	LRMR	LRTDTV	LLRGTV	TNN-LLRGTV
G=0. 04	SSIM	0. 7672	0. 7021	0. 7670	0. 8661	**0. 8836**
	PSNR /dB	27. 2992	**27. 7108**	27. 1290	27. 5485	27. 4349
G=0. 08	SSIM	0. 6578	0. 5963	0. 6811	0. 7159	**0. 7993**
	PSNR /dB	23. 4935	25. 5115	23. 5549	28. 3401	**29. 3462**
G=0. 12	SSIM	0. 5823	0. 5274	0. 6232	0. 6575	**0. 7554**
	PSNR /dB	21. 2739	24. 2568	21. 4103	27. 2248	**28. 2942**
S=0. 10	SSIM	0. 7648	0. 9369	0. 7742	0. 9566	**0. 9569**
	PSNR /dB	26. 9931	36. 7206	27. 0601	37. 2688	**37. 3276**
S=0. 15	SSIM	0. 6874	0. 9135	0. 7113	0. 9558	**0. 9566**
	PSNR /dB	24. 2311	35. 0619	24. 5033	37. 0938	**37. 2341**
S=0. 20	SSIM	0. 6184	0. 8880	0. 6518	0. 9550	**0. 9561**
	PSNR /dB	22. 1248	33. 6231	22. 4481	36. 9163	**37. 1171**

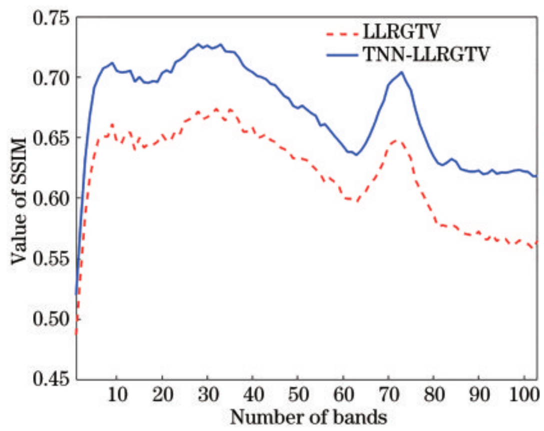

图5　改进前后算法各波段的SSIM值

Fig. 5　SSIM of the algorithm before and after improvement

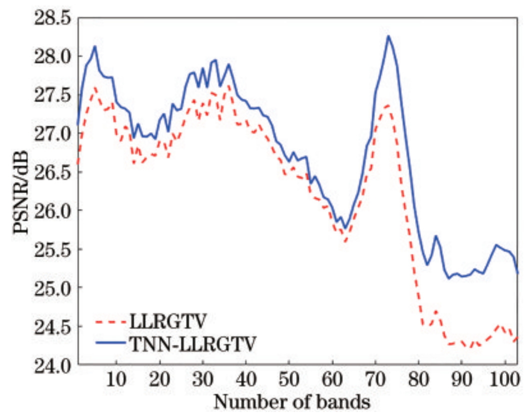

图6　改进后算法各波段的PSNR

Fig. 6　PSNR of the algorithm before and after improvement

5. 2　真实图像实验

除了要根据指标参数判断去噪算法的优越性，还需要观察对真实图像的实际去噪效果，因此分别对图像集Pavia University和Salinas的部分图像进行真实图像测试。

从图像集Pavia University中选取波段2的部分图像，由图7(a)可以看出，原本图像中存在少量的高斯噪声和条纹噪声。从图7可以看出，LRTDTV、LRMR和NAILRMA方法并不能有效去除条纹噪声的影响；LRTDTV去除了部分高斯噪声，却使图像比较模糊；TNN-LLRGTV和LLRGTV方法都具有较高的还原度。

从图像集Salinas中选取波段110的图像，从由图8(a)可以看到较为清晰的图像信息，但其中会产生稀疏的黑点和白点，并且在田野信息中会产生条纹噪声。从图8可以看出：NAILRMA和LRMR并不能去除噪声杂点，也无法削减条纹噪声；LRTDTV去除了图中的黑白点，但其使整张图的信息较为模糊，削弱了边界；LLRGTV与TNN-LLRGTV消减了更多田野部分的条纹噪声和传感器转换信息时产生的伪影，并保留了明显的边界，TNN-LLRGTV对黑白点的去噪处理效果更佳。根据图9的光谱曲线，所提TNN-LLRGTV算法反射比更贴近原图。

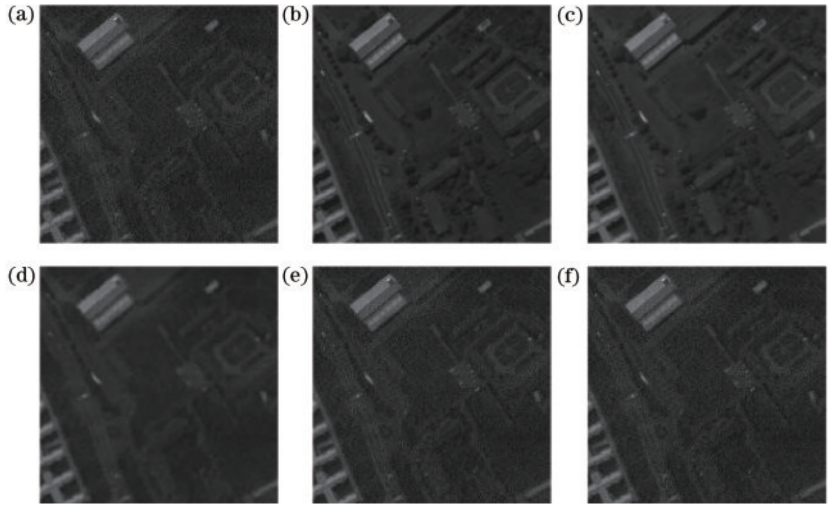

图7　各去噪方法对 Pavia University 数据集 band 2 的去噪结果。(a)原图像；(b) TNN-LLRGTV；(c) LLRGTV；(d) LRTDTV；(e) LRMR；(f) NAILRMA

Fig. 7　Denoising results of each denoising method in band 2 of Pavia University dataset. (a) Original image; (b) TNN-LLRGTV; (c) LLRGTV; (d) LRTDTV; (e) LRMR; (f) NAILRMA

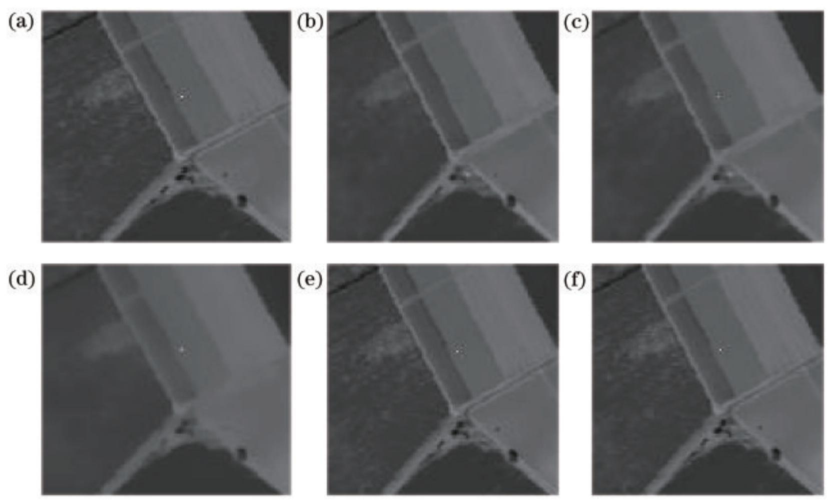

图8　各去噪方法对 Salinas 数据集 band 110 的去噪结果。(a)原图像；(b) TNN-LLRGTV；(c) LLRGTV；(d) LRTDTV；(e) LRMR；(f) NAILRMA

Fig. 8　Denoising results of each denoising method in band 110 of Salinas dataset. (a) Original image; (b) TNN-LLRGTV; (c) LLRGTV; (d) LRTDTV; (e) LRMR; (f) NAILRMA

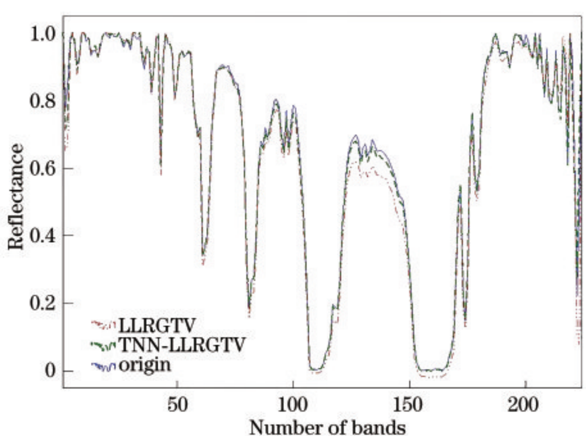

图9　不同去噪算法的光谱曲线对比

Fig. 9　Comparison of spectral curves of different denoising algorithms

6　结　　论

针对HSI图像去噪问题，由于其数据增加了光谱维度，因此相较一般图像，具有庞大的信息量，考虑全局与局部的去噪优化，设计了TNN-LLRGTV算法。在局部低秩部分增加截断核范数的思想，能有效抑制高斯噪声并保留图像边界细节，TNN-LLRGTV算法不仅平衡了空间-谱平滑性和边界细节清晰度的问题，还对局部噪点有较大的清除效果。但从实验测试中也能发现：在不同强度噪声的情况下，相对原算法LLRGTV，所提TNN-LLRGTV的去噪指标都有提升，可提升不够明显；在强噪声污染下，复原程度有相对大幅提高，但图像信息依然损失较为严重。因此，TNN-LLRGTV算法还有提升的空间。

参 考 文 献

[1] 龚威，史硕，陈博文，等. 机载高光谱激光雷达成像技术发展与应用[J]. 光学学报，2022，42(12): 1200002.
Gong W, Shi S, Chen B W, et al. Development and application of airborne hyperspectral LiDAR imaging technology[J]. Acta Optica Sinica, 2022, 42(12): 1200002.

[2] 崔荣梅. 高光谱图像去噪及分类技术研究[D]. 西安：西安电子科技大学，2018.
Cui R M. Hyperspectral image denoising and classification[D]. Xi'an: Xidian University, 2018.

[3] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1/2/3/4): 259-268.

[4] Blomgren P, Chan T F. Color TV: total variation methods for restoration of vector-valued images[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 304-309.

[5] Yuan Q Q, Zhang L P, Shen H F. Hyperspectral image denoising employing a spectral - spatial adaptive total variation model[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2012, 50(10): 3660-3677.

[6] Chang Y, Yan L X, Fang H Z, et al. Anisotropic spectral-spatial total variation model for multispectral remote sensing image destriping[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2015, 24(6): 1852-1866.

[7] 吴天琦，肖文，李仁剑，等. 基于时域迭代小波变换的单分子定位图像背景去噪[J]. 中国激光，2021，48(13): 1307001.
Wu T Q, Xiao W, Li R J, et al. Single-molecule localization image background denoising based on time-domain iterative wavelet transform[J]. Chinese Journal of Lasers, 2021, 48(13): 1307001.

[8] 尹佳琪，王世勇，李范鸣. 基于改进主成分分析的分焦平面偏振图像去噪算法[J]. 光学学报，2021，41(7): 0710002.
Yin J Q, Wang S Y, Li F M. Division-of-focal-plane polarization image denoising algorithm based on improved principal component analysis[J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(7): 0710002.

[9] He W, Zhang H Y, Zhang L P, et al. Total-variation-regularized low-rank matrix factorization for hyperspectral image restoration[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2016, 54(1): 178-188.

[10] Zhang H Y, He W, Zhang L P, et al. Hyperspectral image restoration using low-rank matrix recovery[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2014, 52(8): 4729-4743.

[11] Xie Y, Qu Y Y, Tao D C, et al. Hyperspectral image restoration via iteratively regularized weighted schatten p-norm minimization[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2016, 54(8): 4642-4659.

[12] Wang M D, Yu J, Xue J H, et al. Denoising of hyperspectral images using group low-rank representation [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2016, 9(9): 4420-4427.

[13] 杨润宇，贾亦雄，徐鹏，等. 截断核范数和全变差正则化高光谱图像复原[J]. 中国图象图形学报，2019，24(10): 1801-1812.
Yang R Y, Jia Y X, Xu P, et al. Hyperspectral image restoration with truncated nuclear norm minimization and total variation regularization[J]. Journal of Image and Graphics, 2019, 24(10): 1801-1812.

[14] Cai J F, Candes E J, Shen Z W. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. SIAM Journal on optimization, 2010, 20(4): 1956-1982.

[15] Gu S H, Zhang L, Zuo W M, et al. Weighted nuclear norm minimization with application to image denoising [C]//2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, June 23-28, 2014, Columbus, OH, USA. New York: IEEE Press, 2014: 2862-2869.

[16] Geng T Y, Sun G L, Xu Y, et al. Truncated nuclear norm minimization based group sparse representation for image restoration[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2018, 11(3): 1878-1897.

[17] Chan S H, Khoshabeh R, Gibson K B, et al. An augmented Lagrangian method for total variation video restoration[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(11): 3097-3111.

[18] Liu Q, Lai Z H, Zhou Z W, et al. A truncated nuclear norm regularization method based on weighted residual error for matrix completion[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2016, 25(1): 316-330.

[19] He W, Zhang H Y, Shen H F, et al. Hyperspectral image denoising using local low-rank matrix recovery and global spatial-spectral total variation[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2018, 11(3): 713-729.

[20] Boyd S, Parikh N, Chu E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Foundations and Trends® in Machine Learning, 2010, 3(1): 1-122.

[21] Aragón Artacho F J, Fleming R M T, Vuong P T. Accelerating the DC algorithm for smooth functions[J]. Mathematical Programming, 2018, 169(1): 95-118.

[22] He W, Zhang H Y, Zhang L P, et al. Hyperspectral image denoising via noise-adjusted iterative low-rank matrix approximation[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2015, 8(6): 3050-3061.

[23] Wang Y, Peng J J, Zhao Q, et al. Hyperspectral image restoration via total variation regularized low-rank tensor decomposition[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2018, 11(4): 1227-1243.