

基于全局变步长的傅里叶叠层显微成像重构算法

王一^{1,2}, 刘保辉^{1*}, 魏晓雨¹, 苏皓^{1,3}¹华北理工大学电气工程学院, 河北 唐山 063210;²唐山市金属构件产线智能化技术创新中心, 河北 唐山 063210;³唐山市半导体集成电路重点实验室, 河北 唐山 063210

摘要 为了提高重构算法的抗干扰能力和鲁棒性, 提出了一种基于梯度下降法和牛顿法的全局法, 并在此基础上, 又提出了基于最优化理论的二分法与牛顿法两类变步长更新策略, 使得迭代过程能够自主地选择最佳更新步长。为了充分利用顺序法和全局法各自的优势, 制定终止判断准则使二者相结合。仿真和实验数据验证了所提算法的抗干扰能力优于各顺序法的结论, 尤其当成像器件的噪声较大时, 提出利用暗场图像信息来计算各阶梯度值的方法以减小噪声的影响。并且, 上述方法只需要额外的 3~5 轮迭代过程即可得到满意的结果, 时间仅增加了几秒钟。

关键词 成像系统; 计算成像; 傅里叶叠层显微; 全局变步长; 抗噪性能

中图分类号 O436

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP222170

Fourier Ptychographic Microscopy Reconstruction Algorithm Based on Global Variable Step-Size

Wang Yi^{1,2}, Liu Baohui^{1*}, Wei Xiaoyu¹, Su Hao^{1,3}

¹College of Electrical Engineering, North China University of Science and Technology,
Tangshan 063210, Hebei, China;

²Tangshan Technology Innovation Center of Intellectualization of Metal Component Production Line,
Tangshan 063210, Hebei, China;

³Tangshan Key Laboratory of Semiconductor Integrated Circuits, Tangshan 063210, Hebei, China

Abstract To improve the anti-interference ability and robustness of the reconstruction algorithm, this paper proposes a global method based on the gradient descent and Newton methods and then proposes two types of variable step-size update strategies based on optimization theory, namely, the dichotomy and Newton methods, so that the iterative process can independently pick the best update step-size. To fully exploit the respective benefits of the sequential and global methods, the termination judgment criterion is designed to combine the two. The proposed algorithm's anti-interference ability is demonstrated through simulation and experimental data to be superior to each sequential method. Especially when the noise of image devices is high, it is uniquely proposed to use dark field image information to calculate each gradient value, to minimize the impact of noise. Furthermore, the above methods only require additional 3-5 rounds of an iterative process to achieve satisfactory results, and the time cost is only a few seconds.

Key words imaging system; computational imaging; Fourier ptychographic microscopy; global variable step-size; anti-noise performance

1 引言

大视场、高分辨率成像与定量相位成像是光学显微和生命科学领域的重要研究课题之一, 对微观世界的探索, 显微镜起着不可或缺的作用^[1]。然而, 传统显

微成像技术已经不能完全满足科学研究以及实际生产的需求, 它表现为“所见即所得”的成像模式^[2], 这种模式虽然简单易行, 却面临着一些难题^[3]: 大视场(FOV)成像与高分辨率成像无法兼顾; 样品的相位信息在采集过程中被丢失。如今, 处理器的计算存储能力和数

收稿日期: 2022-07-28; 修回日期: 2022-08-18; 录用日期: 2022-09-05; 网络首发日期: 2022-09-15

基金项目: 河北省高等学校科学研究项目(ZD2022114)、唐山市科技计划项目(21130212C)

通信作者: *582736424@qq.com

字探测器的成像性能不断提高,计算显微成像技术应运而生^[4]。傅里叶叠层显微成像(FPM)是极具代表性的技术之一,该技术由 Zheng 等^[5]于 2013 年提出。FPM 同时运用了合成孔径和相位恢复,既保证了低倍物镜下的大视场,又实现了与高倍物镜相当的成像能力,同时能够获取样品的相位信息,甚至允许估计物镜自身的瞳孔像差并减小其影响^[6-9]。

重构算法是保证能够顺利求解出高分辨率振幅和相位图像的关键,可以分为两大类:全局法和顺序法。全局法一次更新使用全部的图像集,而顺序法仅使用一幅原始图像。传统 FPM 中使用 Gerchberg-Saxton (G-S)算法,即交替投影法^[10];为了减少重构过程中瞳孔像差的影响,Ou 等^[11]提出嵌入式瞳孔像差恢复的 EPRY 法;为了更好地应对成像器件存在噪声干扰的情况,Zuo 等^[12]提出自适应步长的顺序法;为了加快解的收敛速度和稳定性,Tian 等^[13]计算二阶梯度,提出顺序高斯-牛顿法。顺序法虽然具有初始收敛速度快、计算成本小的优点,但对噪声干扰敏感,有时无法收敛。全局法则具有抗干扰能力强、鲁棒性好、收敛速度快的优点,但计算成本会有所增加。Bian 等^[14]基于梯度下降法提出了基于 Wirtinger flow 的全局法;Yeh 等^[15]总结前人的经验提出了全局拟牛顿法。但遗憾的是,这些全局法的更新步长的选择并不完善,也不具有理论指导意义,合理的更新步长对全局算法的成功重建至关重要:太小的步长会导致收敛速度很慢,太大的步长则会导致重建失败。此外,对于采集的数据集噪声干扰较为严重的情况,上述算法也没有针对性的应对措施。

因此,本文详细地给出了 FPM 全局重构算法的建模过程,包括梯度下降法和牛顿法,并在此基础上根据数学公式的推导提出两类具有理论指导意义的全局变步长更新策略,分别称二分法和牛顿法。它们各有应用的特点,均能在更新猜测对象频谱的同时联合恢复物镜的瞳孔像差。同时提出将顺序法和全局法相结合的思想,充分利用它们各自的优势。对于采集图像噪声干扰较严重的情况,提出利用暗场图像信息来计算各阶梯度值的方法,该方法能够有效减少成像器件噪声的影响,获得重建质量更好的高分辨率振幅和相位图像。

2 FPM 原理

2.1 FPM 数学模型

首先,FPM 重构过程是在空域 (x, y) 和傅里叶域 (u, v) 之间交替迭代的。设 $o(x, y)$ 表示样品的复振幅透过率,F 表示二维傅里叶变换,样品的频谱 $O(u, v) = F[o(x, y)]$ 。其次,用波矢为 (u_n, v_n) 的平面光波照射薄样品,相当于在频域中将频谱的中心平移 $(-u_n, -v_n)$,其中 $n \in [1, N_{\text{img}}]$,表示 LED 单元的

序号索引。在样品平面 $z=0$ 处,光波矢可计算为

$$u_n = |\mathbf{k}| \cos \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha, \quad v_n = |\mathbf{k}| \cos \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta, \quad (1)$$

式中: $|\mathbf{k}|$ 为真空中的波数; λ 为照明光波长; α 和 β 分别为光波矢与 x 轴和 y 轴正向的夹角。令中心 LED 单元坐标为 (x_c, y_c) ,第 n 个 LED 单元坐标为 (x_n, y_n) ,相邻 LED 单元间距为 d , h 为 LED 阵列距离样品的垂直高度,则 $\cos \alpha$ 和 $\cos \beta$ 可分别计算为

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{(x_c - x_n)d}{\sqrt{[(x_c - x_n)d]^2 + [(y_c - y_n)d]^2 + h^2}} \\ \cos \beta = \frac{(y_c - y_n)d}{\sqrt{[(x_c - x_n)d]^2 + [(y_c - y_n)d]^2 + h^2}} \end{cases} \quad (2)$$

最后,物镜在频域中对应半径为 $f_{\text{obj}} = N_{\text{Aobj}} \cdot |\mathbf{k}|$ 的圆形瞳孔函数 $P(u, v)$,相机的采样频率 $f_{\text{cam}} = 2\pi M/l_{\text{cam}}$,应满足 Nyquist 采样要求 $f_{\text{cam}} \geq 2f_{\text{obj}}$,其中 N_{Aobj} 为物镜数值孔径, M 为物镜放大倍数, l_{cam} 为相机像素尺寸。

在 FPM 系统中,将薄样品放置在低 N_{Aobj} 的前焦面处,从 N_{img} 个低分辨率强度图像 $I_n(x, y)$ 恢复出高分辨率样品频谱。样品被第 n 个 LED 单元发出的平面光波照射,并由 $P(u, v)$ 低通滤波,此时物镜后焦面处的样品频谱可以表示为

$$\begin{aligned} O_n(u, v) &= F\{o(x, y) \exp[i \cdot (u_n \cdot x + v_n \cdot y)]\} \times \\ P(u, v) &= O(u - u_n, v - v_n) P(u, v), \end{aligned} \quad (3)$$

像面处对应的光场分布 $g_n(x, y) = F^{-1}[O_n(u, v)]$,其中 F^{-1} 表示二维傅里叶逆变换。依次点亮所有 LED 单元,子孔径之间的交叠扩展了频域带宽,并获得超出物镜空间分辨率极限的高频信息,上述的实验装置与成像过程^[6]如图 1 所示。因此,FPM 突破光学系统空间带宽积(SBP)的限制,实现了大视场、高分辨率和定量相位成像,应用潜力巨大^[16]。

传统 G-S 恢复过程这里不再详述,读者可参阅文献^[5]中的详细步骤。值得指出的是,FPM 最终可实现的空间分辨率极限由物镜数值孔径 N_{Aobj} 和照明数值孔径 N_{Aill} 共同决定。 N_{Aill} 的表达式为

$$N_{\text{Aill}} = \frac{\sqrt{(x_m \cdot d)^2 + (y_m \cdot d)^2}}{\sqrt{(x_m \cdot d)^2 + (y_m \cdot d)^2 + h^2}}, \quad (4)$$

式中: (x_m, y_m) 为 LED 阵列最大坐标值。合成孔径 $N_{\text{Asyn}} = N_{\text{Aobj}} + N_{\text{Aill}}$,FPM 所能实现的重构图像分辨率极限 $l_{\text{im}} = \lambda/N_{\text{Asyn}}$ 。

2.2 向量化模型

大多数重构算法是通过最小化测量值和猜测值之

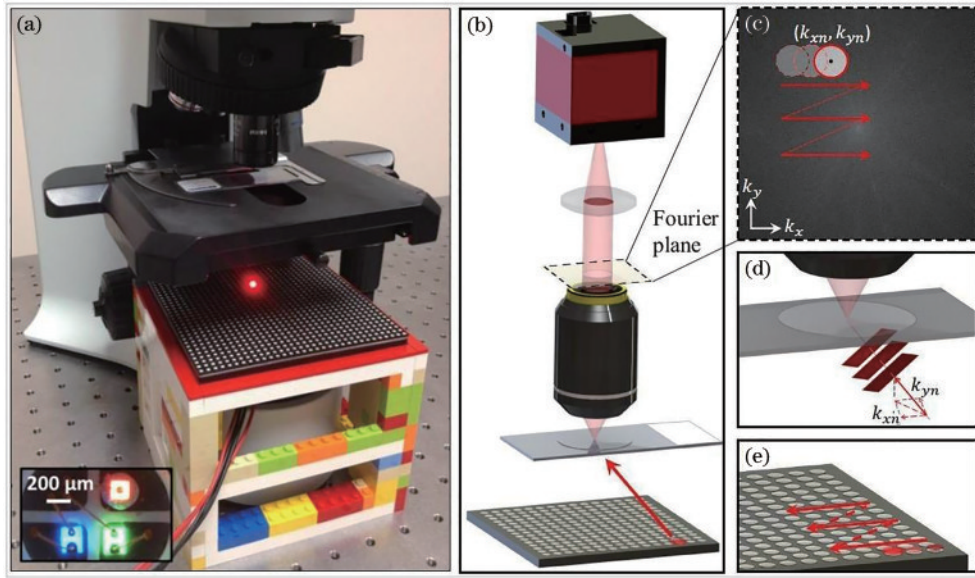


图 1 FPM 技术实验装置及原理示意图^[6]。(a) FPM 系统实物图;(b) FPM 工作过程原理图;(c) 相互交叠的频域子孔径;(d) LED 阵列倾斜光照; (e) LED 阵列顺序点亮过程

Fig. 1 Schematic of FPM experimental setup and principle^[6]. (a) Physical map of FPM system; (b) schematic of the working process of FPM; (c) overlapped frequency domain sub-apertures; (d) LED array oblique light illumination; (e) LED array sequential lighting process

间的差异来求解 FPM 最优化问题的,优化目标^[17]可以表述为

$$f_A = \min_{o,p} \sum_n \sum_{x,y} \left\{ \sqrt{I_n(x,y)} - \left| F^{-1} [P(u,v)O(u-u_n, v-v_n)] \right| \right\}^2, \quad (5)$$

此目标函数旨在最小化测量幅度和猜测幅度之间的差异,因此称为基于幅度的目标函数。对于这类多元优化问题,可以使用线性代数重新表述,认为是连续问题适当离散化方法^[15]。具有 $M \times M$ 像素的 $I_n(x,y)$ 向量化为 $M^2 \times 1$ 的向量 \mathbf{I}_n ;重建的高分辨率图像像素为 $N \times N$,且 $N > M$,实际上需要求解样品频谱,故向量化为 $N^2 \times 1$ 的向量 \mathbf{O} ; $P(u,v)$ 被向量化为 $M^2 \times 1$ 的向量 \mathbf{P} ;根据 LED 阵列照明角度的改变会引起 \mathbf{O} 的平移这一性质,在乘以 \mathbf{P} 之前, \mathbf{O} 通过元素仅为 0 和 1 的 $M^2 \times N^2$ 矩阵 \mathbf{Q}_n 选择截取,可以理解为在 \mathbf{O} 上对应于各照明角度的不同平移量,并将 $N^2 \times 1$ 的向量截取为 $M^2 \times 1$ 的向量;离散二维傅里叶变换和逆变换定义为 \mathbf{F} 和 \mathbf{F}^{-1} ,是大小为 $M^2 \times M^2$ 的对角矩阵。 $|\cdot|$ 、 $|\cdot|^2$ 、 $\sqrt{\cdot}$ 和 $/$ 是逐元素运算符,对应 MATLAB 软件中点运算, $\text{diag}(\cdot)$ 运算符将向量中各元素放入矩阵对角线中,或取矩阵的对角线元素生成向量。值得指出的是,这里引入 \mathbf{Q}_n 是为了便于接下来的向量化公式推导,在实际的仿真编程与实验中并不需要 \mathbf{Q}_n ,因为表达式 $\text{diag}(\mathbf{P})\mathbf{Q}_n\mathbf{O}$ 本质上就是大小为 $M^2 \times 1$ 的子频谱 \mathbf{O}_n 。

基于上述描述,重新改写基于幅度的优化模型,首先,前向模型 $\mathbf{g}_n = \mathbf{F}^{-1} \text{diag}(\mathbf{P})\mathbf{Q}_n\mathbf{O}$,式(5)改写为向量形式:

$$f_A = \min_{o,p} \left\| \sum_n \sqrt{I_n} - |\mathbf{g}_n| \right\|_2^2, \quad (6)$$

式中: $\|\cdot\|_2$ 表示向量的 2 范数,用来衡量大小。为了使用迭代优化算法使其最小化,需要计算目标函数的梯度,根据 Parseval 定理^[18],在频域中重新制定式(6)的误差度量:

$$F_A = \min_{o,p} \left\| \sum_n |\psi_n - \text{diag}(\mathbf{P})\mathbf{Q}_n\mathbf{O}| \right\|_2^2, \quad (7)$$

式中: ψ_n 指将第 n 个光波矢对应的猜测对象的幅值 $|\mathbf{g}_n|$ 用采集的低分辨率测量值 $\sqrt{I_n}$ 替换,保持相位不变,并变换回频域的指标。 F_A 相对于 \mathbf{O} 的梯度表达式为

$$\nabla_o F_A = -2 \sum_n [\text{diag}(\mathbf{P})\mathbf{Q}_n]^H / |\mathbf{P}|_{\max}^2 [\psi_n - \text{diag}(\mathbf{P})\mathbf{Q}_n\mathbf{O}]. \quad (8)$$

同时,为了实现估计瞳孔像差的功能,求 F_A 相对于 \mathbf{P} 的梯度,得到

$$\nabla_p F_A = -2 \sum_n \text{diag}(\mathbf{Q}_n\mathbf{O})^H / |\mathbf{Q}_n\mathbf{O}|_{\max}^2 [\psi_n - \text{diag}(\mathbf{P})\mathbf{Q}_n\mathbf{O}], \quad (9)$$

式中: $(\cdot)^H$ 表示共轭转置; $\mathbf{Q}_n\mathbf{O}$ 表示猜测对象频谱的特定平移和截取; $\psi_n - \text{diag}(\mathbf{P})\mathbf{Q}_n\mathbf{O}$ 为残差项,它找到了猜测值和测量值之间的差异,且这种差异携带了更新前后的信息。因此,全局梯度下降法的更新公式为

$$\mathbf{O}^{(i+1)} = \mathbf{O}^{(i)} - \alpha_1^{(i)} \nabla_{\mathbf{O}} F_{\Lambda}(\mathbf{O}^{(i)}), \quad (10)$$

$$\mathbf{P}^{(i+1)} = \mathbf{P}^{(i)} - \beta_1^{(i)} \nabla_{\mathbf{P}} F_{\Lambda}(\mathbf{P}^{(i)}), \quad (11)$$

式中: i 为当前迭代次数; α_1 为猜测对象的更新步长; β_1 为瞳孔函数的更新步长。对比一阶梯度, 二阶梯度可以提高算法的收敛速度和鲁棒性。牛顿法使用目标函数的一阶、二阶梯度以在每次迭代中实现更好的更新。目标函数相对于 \mathbf{O} 和 \mathbf{P} 的二阶梯度为

$$\nabla_{\mathbf{O}}^2 F_{\Lambda} = 2 \sum_n \text{diag} \left\{ \left[\text{diag}(\mathbf{P}) \mathbf{Q}_n \right]^H \left[\text{diag}(\mathbf{P}) \mathbf{Q}_n \right] \right\}, \quad (12)$$

$$\nabla_{\mathbf{P}}^2 F_{\Lambda} = 2 \sum_n \text{diag} \left[\text{diag}(\mathbf{Q}_n \mathbf{O})^H \text{diag}(\mathbf{Q}_n \mathbf{O}) \right]. \quad (13)$$

利用求得的各阶梯度值, 对应的全局牛顿更新公式为

$$\mathbf{O}^{(i+1)} = \mathbf{O}^{(i)} - \alpha_1^{(i)} \nabla_{\mathbf{O}, N} F_{\Lambda}(\mathbf{O}^{(i)}) / \left[\nabla_{\mathbf{O}}^2 F_{\Lambda}(\mathbf{O}^{(i)}) + \Delta_{\mathbf{O}} \right], \quad (14)$$

$$\mathbf{P}^{(i+1)} = \mathbf{P}^{(i)} - \beta_1^{(i)} \nabla_{\mathbf{P}, N} F_{\Lambda}(\mathbf{P}^{(i)}) / \left[\nabla_{\mathbf{P}}^2 F_{\Lambda}(\mathbf{P}^{(i)}) + \Delta_{\mathbf{P}} \right]. \quad (15)$$

值得指出的是, 牛顿法与梯度下降法中的一阶梯度略有不同, 此时无需包含 $|\mathbf{P}|_{\max}^2$ 与 $|\mathbf{Q}_n \mathbf{O}|_{\max}^2$ 预处理项。此外, 由于二阶梯度在分母上, 为了算法的稳定性, 引入正则化向量 $\Delta_{\mathbf{O}}$ 与 $\Delta_{\mathbf{P}}$, 均取值为 1 即可。

3 全局变步长策略

根据上述推导, 得到了梯度下降法和牛顿法的全局更新公式, 但遗留了一个重要的问题, 就是每次迭代更新步长的选择。无论是 α_1 , 还是 β_1 , 它们对最终的重建结果都有着决定性的影响。步长太小, 收敛速度会很慢, 而步长太大, 则会导致算法发散, 重建失败。而且每次迭代的最佳更新步长不是一成不变的, 需要根据当前进度给出反馈信息, 以实现更新步长的动态变化。因此, 接下来将推导出两类全局更新的变步长重构算法, 这算法对梯度下降法和牛顿法均适用。

3.1 二分法

重新考虑 FPM 向量化模型, 目的是最小化目标函数式 (7), 当求得其一阶梯度和二阶梯度时, 每次的更新方向也就确定下来了, 此时不同的更新步长会带来不同的更新结果。将更新步长作为变量, 则对应全局梯度下降法的更新步长的目标函数为

$$\varphi_{\mathbf{O}}(\alpha_1^{(i)}) = F_{\Lambda} \left[\mathbf{O}^{(i)} - \alpha_1^{(i)} \nabla_{\mathbf{O}} F_{\Lambda}(\mathbf{O}^{(i)}) \right], \quad (16)$$

$$\varphi_{\mathbf{P}}(\beta_1^{(i)}) = F_{\Lambda} \left[\mathbf{P}^{(i)} - \beta_1^{(i)} \nabla_{\mathbf{P}} F_{\Lambda}(\mathbf{P}^{(i)}) \right]. \quad (17)$$

对应牛顿法的更新步长目标函数为

$$\varphi_{\mathbf{O}, N}(\alpha_1^{(i)}) = F_{\Lambda} \left\{ \mathbf{O}^{(i)} - \alpha_1^{(i)} \nabla_{\mathbf{O}, N} F_{\Lambda}(\mathbf{O}^{(i)}) / \left[\nabla_{\mathbf{O}}^2 F_{\Lambda}(\mathbf{O}^{(i)}) + \Delta_{\mathbf{O}} \right] \right\}, \quad (18)$$

$$\varphi_{\mathbf{P}, N}(\beta_1^{(i)}) = F_{\Lambda} \left\{ \mathbf{P}^{(i)} - \beta_1^{(i)} \nabla_{\mathbf{P}, N} F_{\Lambda}(\mathbf{P}^{(i)}) / \left[\nabla_{\mathbf{P}}^2 F_{\Lambda}(\mathbf{P}^{(i)}) + \Delta_{\mathbf{P}} \right] \right\}. \quad (19)$$

为使式 (16)~(19) 最小化, 首先给出每次迭代的更新步长的初始取值区间, 对于梯度下降法, 设 $\alpha_1^{(i)}$ 的初始取值区间为 $[a, b]$, $\beta_1^{(i)}$ 的初始取值区间为 $[c, d]$ 。令 $a_1 = a + 0.25(b - a)$, $b_1 = a + 0.75(b - a)$, $c_1 = c + 0.25(d - c)$, $d_1 = c + 0.75(d - c)$ 。接下来比较 $\varphi_{\mathbf{O}}(a_1)$ 与 $\varphi_{\mathbf{O}}(b_1)$ 的大小, 如果 $\varphi_{\mathbf{O}}(a_1) < \varphi_{\mathbf{O}}(b_1)$, 则 a 保持不变, $b = 0.5(a + b)$; 否则, b 保持不变, $a = 0.5(a + b)$ 。同理, 如果 $\varphi_{\mathbf{P}}(c_1) < \varphi_{\mathbf{P}}(d_1)$, 则 c 保持不变, $d = 0.5(c + d)$; 否则, d 保持不变, $c = 0.5(c + d)$ 。

对于全局牛顿法类似, 这里不再详述。由于每当更新步长子迭代完成一次, 取值区间缩减一半, 故称为二分法。值得指出的是: 梯度下降法中, $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 均取值为 $[0, 0.1]$ 即可; 牛顿法中, $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 均取值为 $[0.5, 1.5]$ 即可。一般 3 至 5 轮子迭代即可获得满意的更新步长, 此时取 $\alpha_1^{(i)} = 0.5(a + b)$, $\beta_1^{(i)} = 0.5(c + d)$ 。至此, 完成了全局更新变步长二分法。从上述推导过程可以看出, 二分法具有物理意义直观、计算简便的特点。

3.2 牛顿法

继续考虑更新步长的目标函数 $\varphi(s^{(i)})$, 为求其最小值, 令一阶导数 $\varphi'(s^{(i)})$ 为 0, 此时的变量 $s^{(i)}$ 即为最佳更新步长, 这里使用 s 指代更新步长 α_1 或 β_1 。根据 Taylor 展开式,

$$\varphi'(s^{(i)}) \approx \varphi'(s_0^{(i)}) + \varphi''(s_0^{(i)})(s^{(i)} - s_0^{(i)}), \quad (20)$$

式中: $s_0^{(i)}$ 为此次迭代初始步长。推导出更新步长子迭代公式,

$$s^{(i)} = s_0^{(i)} - \varphi'(s_0^{(i)}) / \varphi''(s_0^{(i)}), \quad (21)$$

接下来, 关键是求出 $\varphi'(s^{(i)})$ 和 $\varphi''(s^{(i)})$, 为了表达式的简洁, 设置中间变量,

$$\begin{cases} \mathbf{d}_{\mathbf{O}}^{(i)} = -\nabla_{\mathbf{O}} F_{\Lambda}(\mathbf{O}^{(i)}) \\ \mathbf{d}_{\mathbf{O}, N}^{(i)} = -\nabla_{\mathbf{O}, N} F_{\Lambda}(\mathbf{O}^{(i)}) / \left[\nabla_{\mathbf{O}}^2 F_{\Lambda}(\mathbf{O}^{(i)}) + \Delta_{\mathbf{O}} \right] \end{cases}, \quad (22)$$

分别表示梯度下降法和牛顿法的频谱更新方向,

$$\begin{cases} \mathbf{d}_{\mathbf{P}}^{(i)} = -\nabla_{\mathbf{P}} F_{\Lambda}(\mathbf{P}^{(i)}) \\ \mathbf{d}_{\mathbf{P}, N}^{(i)} = -\nabla_{\mathbf{P}, N} F_{\Lambda}(\mathbf{P}^{(i)}) / \left[\nabla_{\mathbf{P}}^2 F_{\Lambda}(\mathbf{P}^{(i)}) + \Delta_{\mathbf{P}} \right] \end{cases}, \quad (23)$$

同理, 式 (23) 表示瞳孔函数的更新方向。对于梯度下降法和牛顿法, 分别求得更新步长目标函数的一阶和二阶导数为

$$\varphi_{\mathbf{O}(N)}'(\alpha_1^{(i)}) = -2 \sum_n \left[\boldsymbol{\psi}_n - \text{diag}(\mathbf{P}^{(i)}) \mathbf{Q}_n (\mathbf{O}^{(i)} + \alpha_1^{(i)} \mathbf{d}_{\mathbf{O}(N)}^{(i)}) \right]^T \left[\text{diag}(\mathbf{P}^{(i)}) \mathbf{Q}_n \mathbf{d}_{\mathbf{O}(N)}^{(i)} \right], \quad (24)$$

$$\varphi_{\mathbf{P}(N)}'(\beta_1^{(i)}) = -2 \sum_n \left[\boldsymbol{\psi}_n - \text{diag}(\mathbf{P}^{(i)} + \beta_1^{(i)} \mathbf{d}_{\mathbf{P}(N)}^{(i)}) \mathbf{Q}_n \mathbf{O}^{(i)} \right]^T \left[\text{diag}(\mathbf{d}_{\mathbf{P}(N)}^{(i)}) \mathbf{Q}_n \mathbf{O}^{(i)} \right], \quad (25)$$

$$\varphi_{o(N)}''(\alpha_1^{(i)}) = 2 \sum_n \left[\text{diag}(\mathbf{P}^{(i)}) \mathbf{Q}_n \mathbf{d}_{o(N)}^{(i)} \right]^\top \left[\text{diag}(\mathbf{P}^{(i)}) \mathbf{Q}_n \mathbf{d}_{o(N)}^{(i)} \right], \quad (26)$$

$$\varphi_{p(N)}''(\beta_1^{(i)}) = 2 \sum_n \left[\text{diag}(\mathbf{d}_{p(N)}^{(i)}) \mathbf{Q}_n \mathbf{O}^{(i)} \right]^\top \left[\text{diag}(\mathbf{d}_{p(N)}^{(i)}) \mathbf{Q}_n \mathbf{O}^{(i)} \right]. \quad (27)$$

值得指出的是,由于更新步长 $s^{(i)}$ 是实数且应大于 0,故最终的更新步长子迭代公式为

$$s^{(i)} = \left| s_0^{(i)} - \text{Re} \left[\varphi'(s_0^{(i)}) / \varphi''(s_0^{(i)}) \right] \right|. \quad (28)$$

至此,全局更新变步长牛顿法的推导过程已经完成,根据式(28),给定初始步长 $\alpha_0^{(i)}$ 和 $\beta_0^{(i)}$,3至5轮子迭代即可获得满意的更新步长 $\alpha_1^{(i)}$ 和 $\beta_1^{(i)}$ 。对于全局梯度下降法, $\alpha_0^{(i)}$ 和 $\beta_0^{(i)}$ 均取值为 0.05 即可;对于全局牛顿法,均取值为 1 即可。利用该方法求得的更新步长是十分精确的,收敛速度也是最快的,效果理想,但计算过程稍复杂。

4 仿真与实验

针对全局变步长重构算法,接下来通过 MATLAB 仿真数据和实验数据来验证其有效性。值得指出的是,由于全局法每次迭代使用所有采集的图像信息,梯度表达式又与残差项密切相关,因此良好的初始猜测频谱和瞳孔函数对全局法的稳定性尤为重要,特别是全局牛顿法,更加接近真值的初始猜测值会带来更好的重建结果。顺序法具有初始收敛速度快的特点,因此将顺序法与全局法相结合,发挥各自的优势。对于采集图像所含

瞳孔像差不严重的情况,使用 G-S 算法生成的 \mathbf{O} 作为全局法的初始猜测对象频谱,初始 \mathbf{P} 的幅值设置为半径由 f_{obj} 决定的外 0 内 1 的圆形低通滤波函数,相位设置为 0;若瞳孔像差较严重,则由 EPRY 法生成初始 \mathbf{O} 和 \mathbf{P} 。之后会给出终止判断准则,用于停止顺序法,启动全局法进行迭代更新。 f_A 的最小化是迭代优化算法的理论指导,由式(6),定义 $E^{(i)} = f_A(\mathbf{O}^{(i)}, \mathbf{P}^{(i)})$,用来衡量第 i 轮迭代后对应于 f_A 的误差度量,为了该指标的合理性,需对图像灰度值进行归一化处理。

4.1 仿真数据

首先使用仿真数据来验证所提全局变步长重构算法。设置仿真参数以对 FPM 系统真实建模,显微物镜 $N_{\text{Aobj}} = 0.1$, $M = 4$, LED 阵列照明光波长 $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$,数量为 15^2 ,照明单元间隔 $d = 4 \text{ mm}$,距离样品的垂直高度 $h = 90 \text{ mm}$,相机像素尺寸 $l_{\text{cam}} = 10 \mu\text{m}$,等效像素大小为 $2.5 \mu\text{m}$ 。原始低分辨率图像的像素数为 100^2 ,最终重建的高分辨率图像具有 400^2 的像素数,输入理想的高分辨率图像以及瞳孔函数,如图 2 所示。由于仿真数据具有理想的振幅与相位信息,可用于重建图像质量的比较,因此定义

$$E_A^{(i)} = \frac{\|\mathbf{O}_{\text{ture}} - \mathbf{O}_{\text{recover}}^{(i)}\|_2}{\|\mathbf{O}_{\text{ture}}\|_2}, E_p^{(i)} = \frac{\|\angle \mathbf{O}_{\text{ture}} - \angle \mathbf{O}_{\text{recover}}^{(i)}\|_2}{\|\angle \mathbf{O}_{\text{ture}}\|_2}, \quad (29)$$

分别表示第 i 轮迭代后重建图像的振幅和相位与理想高分辨率图像的相对误差度量,式中 \angle 表示相位信息。同样地,式(29)中的图像灰度值需要归一化处理。

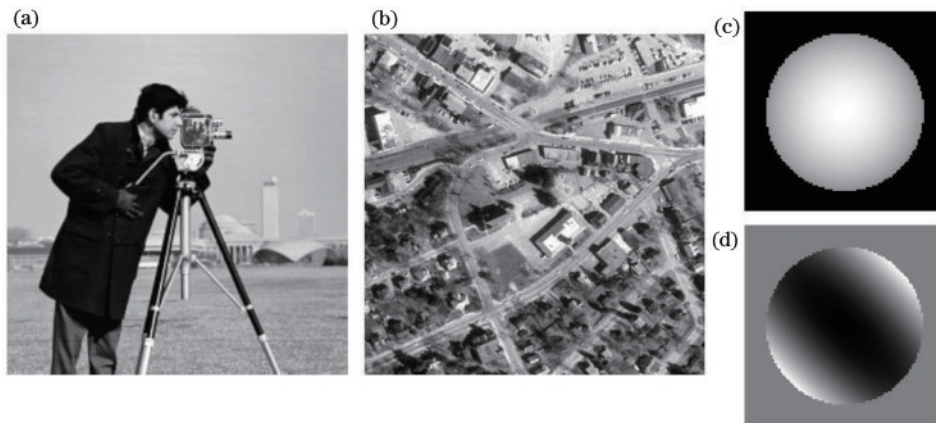


图 2 模拟输入的高分辨率图像和瞳孔函数。(a)理想高分辨率振幅;(b)理想高分辨率相位;(c)瞳孔函数振幅;(d)瞳孔函数相位

Fig. 2 Simulated high-resolution images and pupil functions. (a) Ideal high-resolution amplitude; (b) ideal high-resolution phase;

(c) pupil function amplitude; (d) pupil function phase

当不添加瞳孔像差和成像器件噪声干扰时,即完全使用理想的数据集,顺序法能够很好完成重建,因此这种情况不是讨论的重点。而实际采集到的低分辨率图像不可能是理想的,一定含有误差源,此时在仿真数据中添加模拟的瞳孔像差和成像器件的噪声干扰,来比较各重构算法之间的差异。在存在噪声的情况下,

最有可能破坏重建质量的是小角度照明时采集的明场图像,因为明场图像比暗场图像的能量大得多,较大的噪声更可能破坏原始数据。如果 $N_{\text{Aobj}} > N_{\text{Aill}}$,对应明场成像;反之则为暗场成像。为了突出对比性并模拟性能较低的成像器件的实验,接下来重点讨论噪声干扰较严重的情况。

图 3 展示了几种典型的顺序法进行 20 轮迭代后的重建结果。从图 3 可以看出:由于 G-S 算法无法校正瞳孔像差,因此重建的振幅和相位图像相互串扰严重,质

量很差;EPRY 法和顺序高斯-牛顿法则具有像差估计与校正的功能,因此串扰情况较轻,相位图像较为理想,但噪声干扰对重建振幅图像的影响明显,质量较差。



图 3 几种典型的顺序法重建的高分辨率振幅和相位图像。(a)传统 G-S 法;(b) EPRY 法;(c)顺序高斯-牛顿法
Fig. 3 High-resolution amplitude and phase images are reconstructed by several typical sequential methods. (a) Traditional G-S method; (b) EPRY method; (c) sequential Gauss-Newton method

接下来使用所提全局变步长重构算法,并观察重建质量。需要指出的是,由于此时数据集含有较严重的瞳孔像差,使用 EPRY 法生成的 $O^{(i)}$ 和 $P^{(i)}$ 作为全局法的初始值,终止判断准则为 $(E^{(i-1)} - E^{(i)})/E^{(i-1)} < 0.01$,该表达式成立时停止顺序法的迭代。由于此时的噪声干扰较严重,独特性地采用全局法计算各阶梯度时,舍弃明场图像数据,只考虑暗场即可,并利用求得的梯度信息来更新猜测对象频谱与瞳孔函数。最终目标是使恢复的图像细节清晰,背景光滑,因此当成像器件噪声干扰的程度无法预估时,可以根据顺序法在停止迭代时恢复的高分辨率振幅和相位图像的直观感受来选择全局法的明、暗场更新方式。

图 4 展示了全局梯度下降法变步长更新策略进行 20 轮迭代后重建的高分辨率振幅和相位图像,以及恢复的瞳孔函数。全局牛顿法的结果类似,这里不再给出。从图 4 可以看出,联合顺序法与所提全局变步长更新策略,独特性地计算暗场梯度值,最终实现重建的相位图像与顺序法相似,几乎没有串扰现象,且重建的振幅图像所受噪声干扰的影响明显小于顺序法,背景平滑度更好,噪声斑点更少,图像更清晰,验证了全局变步长算法强大的重构能力。此外,观察恢复的瞳孔函数,与模拟输入的瞳孔函数吻合度较高,也验证了瞳

孔像差的校正能力。

图 5 绘制了各算法的误差度量指标曲线。由于该数据集噪声干扰较为严重,因此明场图像数据相较于暗场包含的噪声和瞳孔像差更为突出,不可靠程度更大,应计算暗场信息对应的误差度量 $E_{\text{dark}}^{(i)}$ 。从图 5 可以看出,无论是全局梯度下降二分法还是牛顿法的变步长更新策略, E_A 和 E_{dark} 相比顺序法均收敛于更小的数值, E_P 差别不大。从相位重建图像中也可以看出,全局变步长法与顺序法并无明显差异,都实现了瞳孔像差的校正,而振幅重建图像的质量却有明显提高,符合各曲线图的走势。各顺序法的指标收敛数值与此前分析的重建图像的质量好坏相一致,这里不再赘述。

4.2 实验数据

接下来,为了进一步验证所提重构算法的改进性能,使用 FPM 的开源实验数据集对各重构算法进行比较。由于此时没有真值输入图像,只计算 $E^{(i)}$ 即可。读者可以在文献 [19-20] 上找到所用到的实验采集的开源数据集。

4.2.1 USAF 分辨率板

实验参数设置: $N_{\text{Aobj}} = 0.1$, $M = 4$, $\lambda = 0.626 \mu\text{m}$, LED 阵列照明单元个数为 21^2 , $d = 2.5 \text{ mm}$, $h = 87.5 \text{ mm}$, $l_{\text{cam}} = 6.5 \mu\text{m}$ 。原始低分辨率图像像素数为

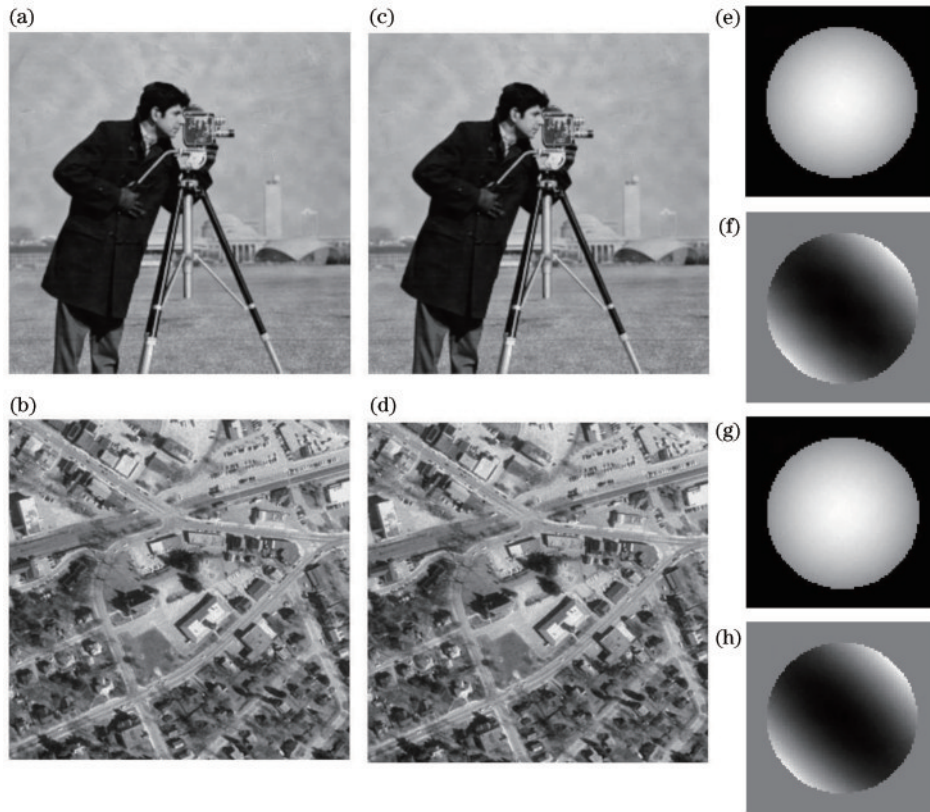


图 4 变步长更新策略的全局梯度下降法重建的图像。(a)(b)更新步长二分法重建的振幅和相位图像;(c)(d)更新步长牛顿法重建的振幅和相位图像;(e)(f)更新步长二分法恢复的瞳孔函数振幅和相位;(g)(h)更新步长牛顿法恢复的瞳孔函数振幅和相位

Fig. 4 Images reconstructed by global gradient descent method with variable step-size update strategy. (a) (b) Reconstructed amplitude and phase images by update step-size dichotomy; (c) (d) reconstructed amplitude and phase images by update step-size Newton method; (e) (f) amplitude and phase of pupil function recovered by update step-size dichotomy; (g) (h) amplitude and phase of pupil function recovered by update step-size Newton method

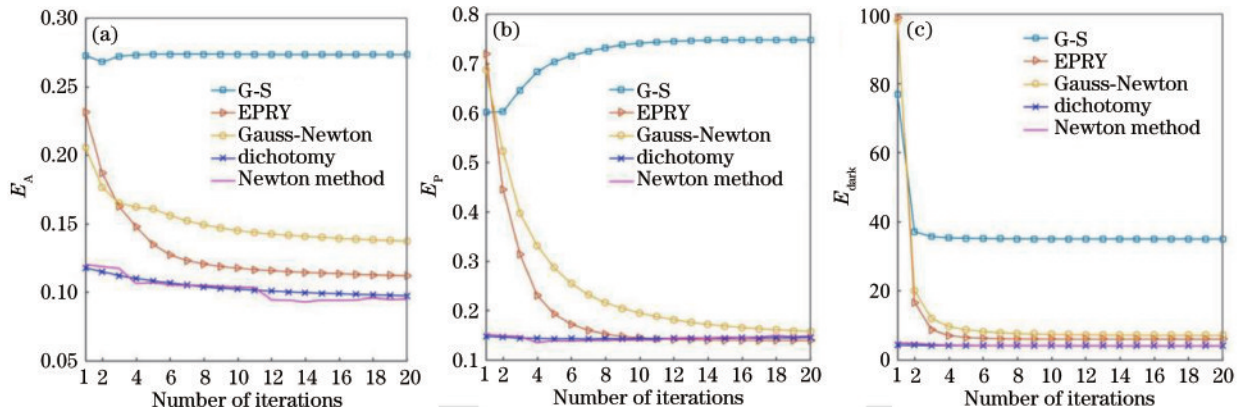


图 5 各重构算法误差度量指标曲线。(a)振幅相对误差度量指标曲线;(b)相位相对误差度量指标曲线;(c)目标函数误差度量指标曲线

Fig. 5 Error measurement index curves of each reconstruction algorithm. (a) Curve of amplitude relative error measurement index; (b) curve of phase relative error measurement index; (c) curve of cost function error measurement index

128²,重建的高分辨率图像具有 512²的像素数。

图 6 为各重构算法进行 15 轮迭代后恢复的高分辨率振幅图像和相对应的误差度量曲线。从图 6(a)~(e)可以看出,从各重构算法的重建图像中均可以分辨第 9 组元素,其中最小线对的空间分辨率为 1.55 μm,

与理论上可实现的空间分辨率相一致。其中,G-S法、EPRY法与顺序高斯-牛顿法重建的图像背景低频伪影较明显,而全局牛顿变步长各重构算法均实现了背景的光滑清晰,几乎没有低频伪影,全局梯度下降法变步长策略的重构结果类似,这里不再展示。从图 6(f)

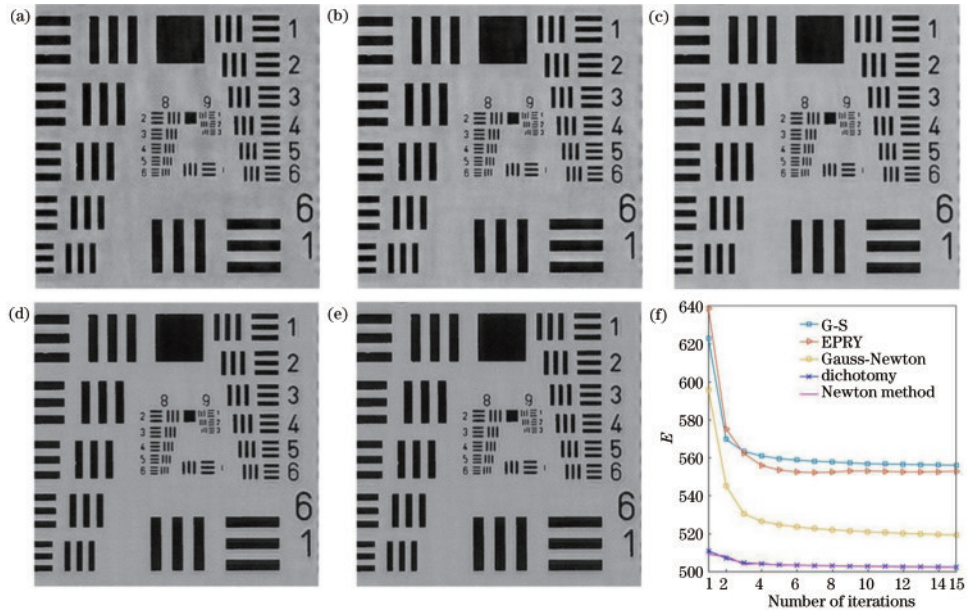


图 6 各重构算法重建的高分辨率振幅图像与误差度量曲线。(a) G-S法;(b) EPRY法;(c)顺序高斯-牛顿法;(d)全局牛顿更新步长二分法;(e)全局牛顿更新步长牛顿法;(f)误差度量曲线

Fig. 6 High-resolution amplitude images reconstructed by each reconstruction algorithm and error measurement curve. (a) G-S method; (b) EPRY method; (c) sequential Gauss-Newton method; (d) global Newton with update step-size dichotomy method; (e) global Newton with update step-size Newton method; (f) error measurement curve

可以看出,全局变步长算法的误差度量指标均小于各顺序法,与重建图像的直观感受相吻合,并且各更新步长策略收敛到很接近的数值,效果相当。值得指出的是,该实验数据集的噪声干扰较小,全局变步长算法利用所有的采集图像来计算梯度信息,且瞳孔像差也较小,终止判断准则保持不变,使用G-S法生成的 $O^{(i)}$ 和 $P^{(i)}$ 作为初始输入即可。

4.2.2 小鼠肾细胞

上一组实验数据集是瞳孔像差和成像器件的噪声干扰较小的情况,接下来讨论当误差较为严重时的各重构算法的恢复效果。该实验参数设置: $N_{\text{Obj}} = 0.1$,

$M = 4, \lambda = 0.532 \mu\text{m}$, LED 阵列照明单元个数为 15^2 , $d = 4 \text{ mm}, h = 90.88 \text{ mm}, l_{\text{cam}} = 7.336 \mu\text{m}$ 。原始低分辨率图像像素数为 201^2 ,重建的高分辨率图像具有 804^2 的像素数。

图 7 为各顺序法进行 15 轮迭代后恢复的高分辨率振幅与相位图像。从图 7 可以看出:由于实验数据集的噪声干扰严重,EPRY法和顺序高斯-牛顿法重建的振幅图像对比度很差,小鼠肾细胞轮廓模糊,效果十分不理想;G-S法重建的振幅图像较清晰,但相位图像模糊,说明同样受到了瞳孔像差和噪声的影响。

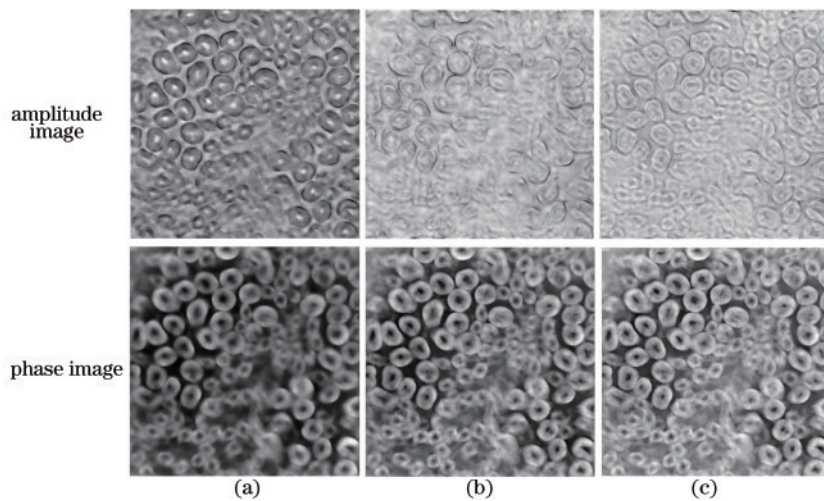


图 7 各顺序法重建的振幅与相位图像。(a) G-S法;(b) EPRY法;(c)顺序高斯-牛顿法

Fig. 7 Amplitude and phase images reconstructed by each sequential method. (a) G-S method; (b) EPRY method; (c) sequential Gauss-Newton method

作为对比,图 8(a)~(d)分别展示了全局梯度下降更新步长二分法与全局牛顿更新步长牛顿法重建的振幅和相位图像。从图 8 可以看出,各全局变步长重构算法恢复的振幅图像对比度高,轮廓特征清晰,效果好于 EPRY 和顺序高斯-牛顿法,恢复的相位图像边缘也更加锐利,效果好于 G-S 法,因此,无论是样品的振幅还是相位均得到令人满意的重建。值得指出的是,由于实验数据集瞳孔像差不可忽略,此时全局法的初始值应使用 EPRY 法的结果,终止判断

准则与之前描述的一致。此外,由于该数据集噪声干扰较严重,明场图像相较于暗场包含的噪声和瞳孔像差更为突出,同之前所述,利用全局法进行各阶梯度的计算时应舍弃明场数据,只计算暗场即可。同时,通过计算暗场相对应的误差度量指标 $E_{\text{dark}}^{(i)}$,图 8(e)绘制了各算法 15 轮迭代的误差度量曲线,可以看出,相较于各顺序法,全局变步长重构算法的误差度量指标均收敛至更小的数值,体现了强大的抗干扰能力和出色的重建能力。

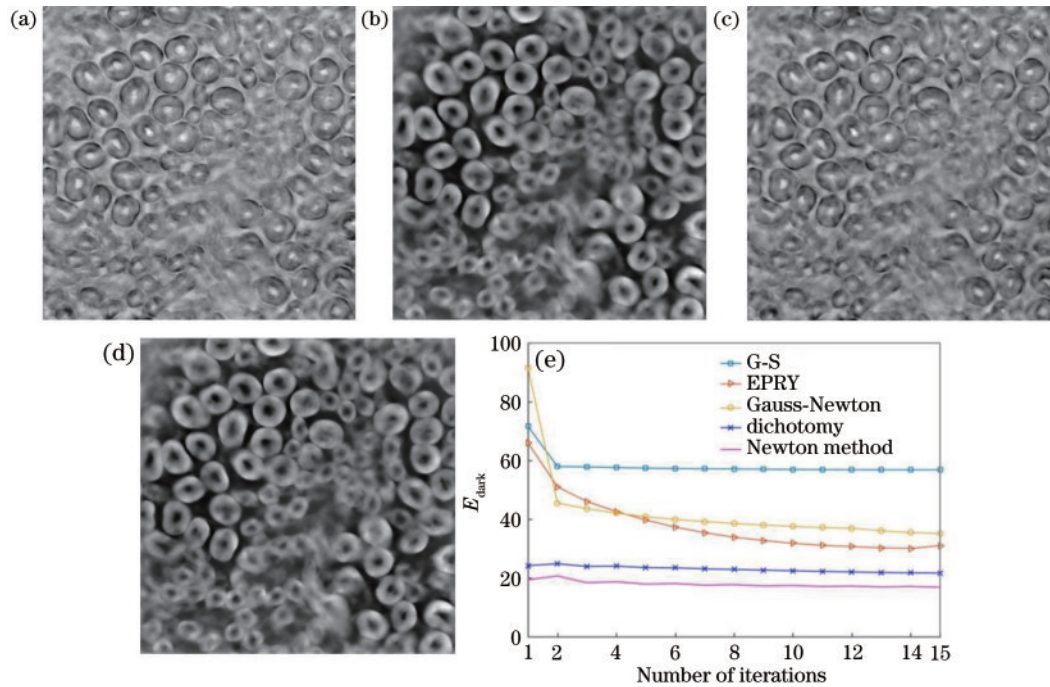


图 8 全局变步长算法恢复的图像与误差度量曲线。(a) (b)全局梯度下降更新步长二分法重建的振幅与相位图像;(c)(d)全局牛顿更新步长牛顿法重建的振幅与相位图像;(e)各重构算法对应的误差度量曲线

Fig. 8 Images restored by global variable step-size algorithm and error measurement curve. (a) (b) Amplitude and phase images reconstructed by global gradient descent update step-size dichotomy; (c) (d) amplitude and phase images reconstructed by global Newton updating step-size Newton method; (e) error measurement curve corresponding to each reconstruction algorithm

5 结 论

完成了理论推导与仿真、实验验证的内容,相较于顺序法,各全局变步长重构算法均实现了重建高分辨率振幅和相位图像质量的进一步提升,同时具有像差恢复与校正的功能。当原始数据集的噪声干扰轻微时,所提算法能够有效地减少低频伪影现象,提高重建图像质量;当噪声干扰严重时,顺序法重建的图像可能会被严重破坏,导致重构失败,利用所提全局变步长重构算法配合暗场梯度计算则可以提高重建图像的质量。此思想的核心是减少噪声影响更严重的明场图像,增加暗场图像在更新过程中所占的权重。基于这一理念,读者也可以根据实际的实验环境采取部分明场与暗场的全局变步长更新方式,这些选择本身就具有高度的灵活性。此外,观察仿真与实验数据对应的各误差度量曲线可知,全局变步长重构算法只需在顺

序法的基础上增加额外的 3~5 轮迭代过程即可收敛,时间成本仅增加了几秒钟,而最终重建图像的质量却有明显提升,既保证了高效率又实现了高质量。

参 考 文 献

- [1] 付芸,王天乐,赵森.超分辨光学显微的成像原理及应用进展[J].激光与光电子学进展,2019,56(24):240002. Fu Y, Wang T L, Zhao S. Imaging principles and applications of super-resolution optical microscopy [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2019, 56(24): 240002.
- [2] 孙佳嵩,张玉珍,陈钱,等.傅里叶叠层显微成像技术:理论、发展和应用[J].光学学报,2016,36(10):1011005. Sun J S, Zhang Y Z, Chen Q, et al. Fourier ptychographic microscopy: theory, advances, and applications[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(10): 1011005.
- [3] 刘晶丹.计算光学显微成像理论与关键技术研究[D].北

- 京:北京理工大学, 2017.
- Liu J D. Research on theory and key techniques of computational optical microscopy imaging[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2017.
- [4] 邵晓鹏, 苏云, 刘金鹏, 等. 计算成像内涵与体系(特邀)[J]. 光子学报, 2021, 50(5): 0511001.
- Shao X P, Su Y, Liu J P, et al. Connotation and system of computational imaging(invited) [J]. Acta Photonica Sinica, 2021, 50(5): 0511001.
- [5] Zheng G A, Horstmeyer R, Yang C. Wide-field, high-resolution Fourier ptychographic microscopy[J]. Nature Photonics, 2013, 7(9): 739-745.
- [6] 张艳. 基于傅里叶叠层理论的计算显微成像方法研究[D]. 西安:中国科学院西安光学精密机械研究所, 2018.
- Zhang Y. Computational microscopy via Fourier ptychography[D]. Xi'an: Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 2018.
- [7] Ou X Z, Horstmeyer R, Yang C, et al. Quantitative phase imaging via Fourier ptychographic microscopy[J]. Optics Letters, 2013, 38(22): 4845-4848.
- [8] Konda P C, Loetgering L, Zhou K C, et al. Fourier ptychography: current applications and future promises[J]. Optics Express, 2020, 28(7): 9603-9630.
- [9] 毛海锋, 赵巨峰, 崔光芒, 等. 基于傅里叶叠层显微成像的LED阵列位置校正方法[J]. 光学学报, 2021, 41(4): 0411002.
- Mao H F, Zhao J F, Cui G M, et al. LED array position correction method based on Fourier ptychographic microscopy[J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(4): 0411002.
- [10] Elser V. Phase retrieval by iterated projections[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2003, 20(1): 40-55.
- [11] Ou X Z, Zheng G A, Yang C. Embedded pupil function recovery for Fourier ptychographic microscopy[J]. Optics Express, 2014, 22(5): 4960-4972.
- [12] Zuo C, Sun J S, Chen Q. Adaptive step-size strategy for noise-robust Fourier ptychographic microscopy[J]. Optics Express, 2016, 24(18): 20724-20744.
- [13] Tian L, Li X, Ramchandran K, et al. Multiplexed coded illumination for Fourier ptychography with an LED array microscope[J]. Biomedical Optics Express, 2014, 5(7): 2376-2389.
- [14] Bian L H, Suo J L, Zheng G A, et al. Fourier ptychographic reconstruction using Wirtinger flow optimization[J]. Optics Express, 2015, 23(4): 4856-4866.
- [15] Yeh L H, Dong J, Zhong J S, et al. Experimental robustness of Fourier ptychography phase retrieval algorithms[J]. Optics Express, 2015, 23(26): 33214-33240.
- [16] 李通, 赵巨峰, 毛海锋, 等. 基于角度照明优化的傅里叶叠层显微成像方法[J]. 激光与光电子学进展, 2020, 57(8): 081106.
- Li T, Zhao J F, Mao H F, et al. An efficient Fourier ptychographic microscopy imaging method based on angle illumination optimization[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(8): 081106.
- [17] 张韶辉, 周国城, 崔柏岐, 等. 傅里叶叠层显微成像模型、算法及系统研究综述[J]. 激光与光电子学进展, 2021, 58(14): 1400001.
- Zhang S H, Zhou G C, Cui B Q, et al. Review of Fourier ptychographic microscopy: models, algorithms, and systems[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2021, 58(14): 1400001.
- [18] Fienup J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J]. Applied Optics, 1982, 21(15): 2758-2769.
- [19] Nanjing University of Science & Technology. Smart Computational Imaging (SCI) Lab[EB/OL]. [2022-02-04]. <http://www.scilaboratory.com/h-col-123.html>.
- [20] SkipperFred/MEng-Fourier-Ptychography[EB/OL]. [2022-02-04]. <http://github.com/SkipperFred/MEng-Fourier-Ptychography>.